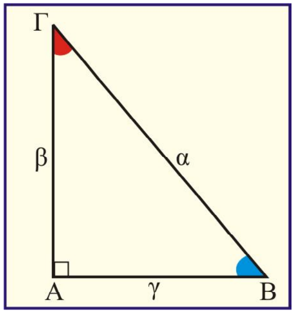
2.1 Τριγωνομετρικοί αριθμοί οξείας - αμβλείας γωνίας

Ερώτηση 1

Πώς ορίζονται οι τριγωνομετρικοί αριθμοί μιας οξείας γωνίας σε ορθογώνιο τρίγωνο;

Απάντηση



- Το ημίτονο της οξείας γωνίας Β σε ορθογώνιο τρίγωνο ορίζεται ως το πηλίκο της απέναντι κάθετης πλευράς, προς την υποτείνουσα, δηλαδή

$$\text{ημ}B = \frac{\beta}{\alpha}\left(\frac{\text{απέναντι κάθετη}}{\text{υποτείνουσα}}\right)$$

- Το συνημίτονο της οξείας γωνίας Β σε ορθογώνιο τρίγωνο ορίζεται ως το πηλίκο της προσκείμενης κάθετης πλευράς, προς την υποτείνουσα, δηλαδή

$$\text{συν}B = \frac{\gamma}{\alpha}\left(\frac{\text{προσκείμενη κάθετη}}{\text{υποτείνουσα}}\right)$$

- Η εφαπτομένη της οξείας Β γωνίας σε ορθογώνιο τρίγωνο ορίζεται ως το πηλίκο της απέναντι κάθετης πλευράς προς την προσκείμενη δηλαδή

$$\text{εφ}B = \frac{\beta}{\alpha}\left(\frac{\text{απέναντι κάθετη}}{\text{προσκείμενη κάθετη}}\right)$$

Ομοίως ορίζονται οι τριγωνομετρικοί αριθμοί της γωνίας Γ.

- $\text{ημ}\Gamma = \frac{\gamma}{\alpha}$, • $\text{συν}\Gamma = \frac{\beta}{\alpha}$, • $\text{εφ}\Gamma = \frac{\gamma}{\beta}$

Ερώτηση 2

Πως ορίζονται οι τριγωνομετρικοί αριθμοί μιας γωνίας με τη βοήθεια ενός ορθοκανονικού συστήματος αξόνων;

Απάντηση

Έστω ένα ορθοκανονικό σύστημα αξόνων xOy, ένα σημείο M(x, y) και ω η γωνία που σχηματίζεται από την ημιευθεία Ox, όταν αυτή περιστραφεί γύρω από το O αντίθετα με τους δείκτες του ρολογιού ή όπως λέμε κατά τη θετική φορά, μέχρι να συμπέσει με την ημιευθεία OM. Η γωνία ω παίρνει τιμές από 0^o εώς 360^o.

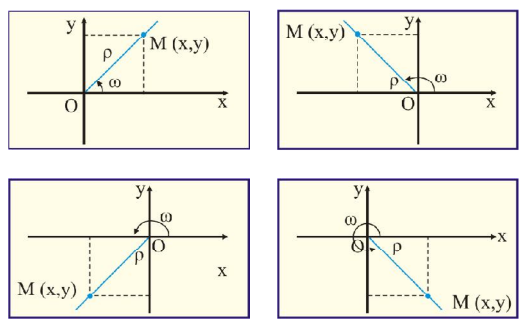
Έστω ότι $OM = \rho$. Τότε οι τριγωνομετρικοί αριθμοί της γωνίας ω ορίζονται ως εξής:

$$\text{ημ}\omega = \frac{y}{\rho}\left(\frac{\text{τεταγμένη του M}}{\text{OM}}\right)$$

$$\text{συν}\omega = \frac{x}{\rho}\left(\frac{\text{τετμημένη του M}}{\text{OM}}\right)$$

όταν $\widehat{\omega} \neq 90^\circ$ και $\widehat{\omega} \neq 270^\circ$ ορίζεται η εφαπτομένη ως εξής:

$$\text{εφ}\omega = \frac{y}{x}\left(\frac{\text{τεταγμένη του M}}{\text{τετμημένη του M}}\right)$$

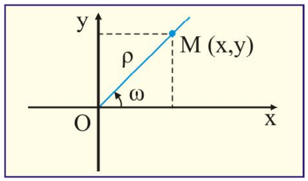


Ερώτηση 3

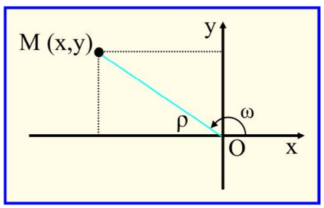
Από τι εξαρτάται το πρόσημο των τριγωνομετρικών αριθμών μιας γωνίας $\omega = X\hat{O}M$;
Να βρείτε το πρόσημο των τριγωνομετρικών αριθμών: ημ280°, συν35°, εφ87° και συν300°.

Απάντηση

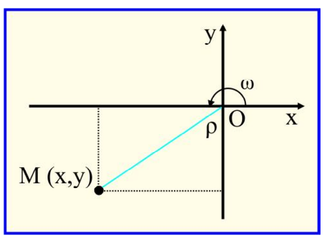
Το πρόσημο των τριγωνομετρικών αριθμών της γωνίας γωνίας $\omega = X\hat{O}M$ εξαρτάται από το τεταρτημόριο στο οποίο βρίσκεται το σημείο Μ. Έτσι:



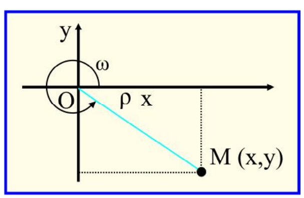
- στο 1ο τεταρτημόριο είναι
  $x > 0$ και $y<0$ άρα
  $$\eta\mu\omega = \frac{y}{\rho} > 0 \,,\, \sigma\upsilon\nu\omega = \frac{x}{\rho} > 0$$
  και $\varepsilon\varphi\omega = \frac{y}{x} > 0$



- στο 2ο τεταρτημόριο είναι
  $x < 0$ και $y > 0$ άρα
  $$\eta\mu\omega = \frac{y}{\rho} > 0, \sigma\upsilon\nu\omega = \frac{x}{\rho} < 0 \text{κα}$$
  $$\varepsilon\varphi\omega = \frac{y}{x} < 0$$



- στο 3ο τεταρτημόριο είναι
  $x < 0$ και $y < 0$ άρα
  $$\eta\mu\omega = \frac{y}{\rho} < 0, \sigma\upsilon\nu\omega = \frac{x}{\rho} < 0 \text{κα}$$
  $$\varepsilon\varphi\omega = \frac{y}{x} > 0$$



- στο 4ο τεταρτημόριο είναι
  $x > 0$ και $y < 0$ άρα
  $$\eta\mu\omega = \frac{y}{\rho} < 0 \,,\, \sigma\upsilon\nu\omega = \frac{x}{\rho} > 0 \text{ και}$$
  $$\varepsilon\varphi\omega = \frac{y}{x} < 0$$

Συνοπτικά το πρόσημο των τριγωνομετρικών αριθμών φαίνεται στον παρακάτω πίνακα:

τεταρτημόριο / Τριγ. Αριθ.	1ο	2ο	3ο	4ο
ημx	+	+	-	-
συνx	+	-	-	+
εφx	+	-	+	-

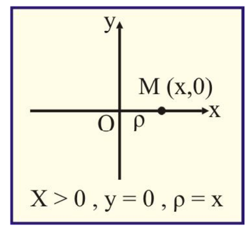
Σύμφωνα με τα προηγούμενα είναι:

$$\eta\mu 280^\circ < 0,\ \ \sigma\upsilon\nu 35^\circ > 0,\ \ \varepsilon\varphi 87^\circ > 0, \sigma\upsilon\nu 300^\circ > 0$$

Ερώτηση 4

Ποιοι είναι οι τριγωνομετρικοί αριθμοί των 0°, 90°, 180°, 270°.

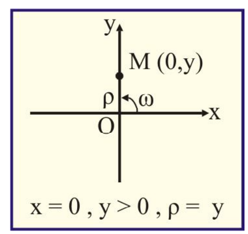
Απάντηση



- Αν $\hat{\omega} = 0^\circ$ έχουμε:

$$\eta\mu 0^\circ = \frac{y}{\rho} = \frac{0}{\rho} = 0\,,$$

$$\sigma\upsilon\nu 0^\circ = \frac{x}{\rho} = \frac{x}{x} = 1 \quad \varepsilon\varphi 0^\circ = \frac{y}{x} = \frac{0}{x} = 0$$



- Αν $\hat{\omega} = 90^\circ$ έχουμε:

$$\eta\mu 90^\circ = \frac{y}{\rho} = \frac{y}{y} = 1\,,$$

$$\sigma\upsilon\nu 90^\circ = \frac{x}{\rho} = \frac{0}{y} = 0$$

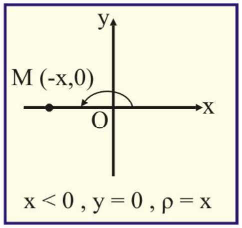
Η $\varepsilon\varphi 90^\circ = \frac{y}{x}$, δεν ορίζεται αφού $x = 0$.

- Αν $\widehat{\omega} = 180^\circ$ έχουμε:

$$\eta\mu 180^\circ = \frac{y}{\rho} = \frac{0}{\rho} = 0\,,$$

$$\sigma\upsilon\nu 180^\circ = \frac{x}{\rho} = \frac{-x}{x} = -1$$

$$\varepsilon\varphi 180^\circ = \frac{y}{x} = \frac{0}{-x} = 0$$

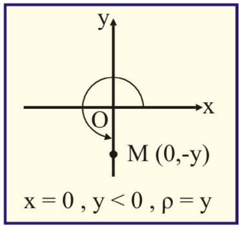


- Αν $\widehat{\omega} = 270^\circ$ έχουμε:

$$\eta\mu 270^\circ = \frac{y}{\rho} = \frac{-y}{y} = -1\,,$$

$$\sigma\upsilon\nu 270^\circ = \frac{x}{\rho} = \frac{0}{y} = 0$$

Η $\varepsilon\varphi 270^\circ = \dfrac{y}{x}$ δεν ορίζεται αφού $x = 0$.



Ερώτηση 5

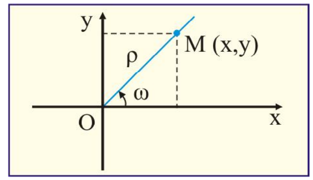
Τι τιμές μπορεί να πάρει το ημίτονο και το συνημίτονο μιας γωνίας ω; Ισχύει η ισότητα: ημω = 2,3;

Απάντηση

Επειδή $\rho = OM \geq |x|$ και $\rho \geq |y|$, για οποιαδήποτε γωνία ω ισχύουν:

$$-1 \leq \eta\mu\omega \leq 1 \quad \text{και} \quad -1 \leq \sigma\upsilon\nu\omega \leq 1$$

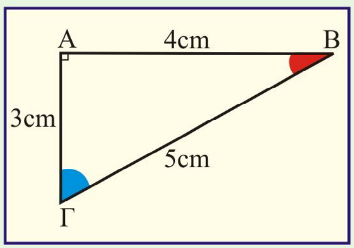
Το ημω δεν μπορεί να ισούται με 2,3 γιατί 2,3 > 1.



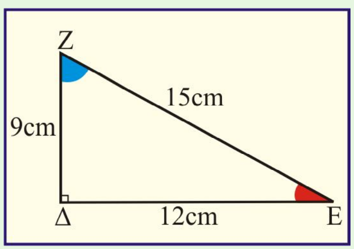
ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗΣ

1 Να βρεθούν οι τριγωνομετρικοί αριθμοί των οξειών γωνιών των παρακάτω τριγώνων:

α.



β.



Λύση

α. Από τον ορισμό κάθε τριγωνομετρικού αριθμού έχουμε:

$$\eta\mu\Gamma = \frac{\text{απέναντι κάθετη}}{\text{υποτείνουσα}} = \frac{AB}{B\Gamma} = \frac{4cm}{5cm} = 0{,}8$$

$$\sigma\upsilon\nu\Gamma = \frac{\text{προσκείμενη κάθετη}}{\text{υποτείνουσα}} = \frac{A\Gamma}{B\Gamma} = \frac{3cm}{5cm} = 0{,}6$$

$$\varepsilon\varphi\Gamma = \frac{\text{απέναντι κάθετη}}{\text{προσκείμενη κάθετη}} = \frac{AB}{A\Gamma} = \frac{4cm}{3cm} = 1{,}33$$

Ομοίως: $\eta\mu B = \dfrac{A\Gamma}{B\Gamma} = \dfrac{3cm}{5cm} = 0{,}6\,,$

$$\sigma\upsilon\nu B = \frac{AB}{B\Gamma} = \frac{4cm}{5cm} = 0{,}8\,,$$

$$\varepsilon\varphi B = \frac{A\Gamma}{AB} = \frac{3cm}{4cm} = 0{,}75$$

β. Όμοια για το τρίγωνο στην περίπτωση β. έχουμε:

$$\eta\mu E = \frac{\Delta Z}{EZ} = \frac{9cm}{15cm} = 0{,}6$$

$$\sigma\upsilon\nu E = \frac{\Delta E}{EZ} = \frac{12cm}{15cm} = 0{,}8$$

$$\varepsilon\varphi E = \frac{\Delta E}{\Delta Z} = \frac{9cm}{12cm} = 0{,}75$$

$$\eta\mu Z = \frac{\Delta E}{EZ} = \frac{12cm}{15cm} = 0{,}8$$

$$\sigma\upsilon\nu Z = \frac{\Delta Z}{EZ} = \frac{9cm}{15cm} = 0{,}6$$

$$\varepsilon\varphi Z = \frac{\Delta E}{\Delta Z} = \frac{12cm}{9cm} \simeq 1{,}33$$

2 Να υπολογιστούν οι τριγωνομετρικοί αριθμοί της γωνίας των 130°.

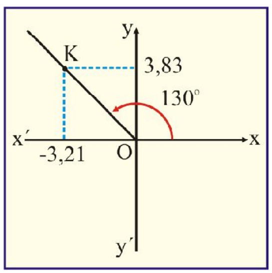
Λύση

Σχεδιάζουμε ένα σύστημα αξόνων και μια γωνία 130°. Στην τελική πλευρά της παίρνουμε τυχαίο σημείο Κ και βρίσκουμε τις συντεταγμένες του $K(-3{,}21,\ 3{,}83)$ και $OK = 5$, τότε:

$$\eta\mu 130^\circ = \frac{y}{OK} = \frac{3{,}83}{5} = 0{,}766$$

$$\sigma\upsilon\nu 130^\circ = \frac{x}{OK} = \frac{-3{,}215}{5} = -0{,}643$$

$$\varepsilon\varphi 130^\circ = \frac{y}{x} = \frac{3{,}83}{-3{,}21} \simeq 1{,}19$$



3 Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή των παραστάσεων:

$A = 3\eta\mu x - 1$ $\qquad$ $B = 4\sigma\upsilon\nu x - 3$

Λύση

Γνωρίζουμε ότι $\quad -1 \leq \eta\mu x \leq 1$

Πολλαπλασιάζουμε με 3: $\quad 3(-1) \leq 3\eta\mu x \leq 3 \cdot 1$

$-3 \leq 3\eta\mu x \leq 3$

Προσθέτουμε το -1 $\quad -3-1 < 3\eta\mu x - 1 \leq 3-1$

Κάνουμε πράξεις $\quad -4 \leq 3\eta\mu x - 1 \leq 2$

Άρα η παράσταση Α έχει ελάχιστη τιμή το -4 και μέγιστη το +2.

Γνωρίζουμε ότι $\quad -1 \leq \sigma\upsilon\nu x \leq 1$

$4(-1) \leq 4\sigma\upsilon\nu x \leq 4 \cdot 1$

Αφαιρούμε το 3 $\quad -4 + (-3) \leq 4\sigma\upsilon\nu x - 3 \leq 4 - 3$

$-7 \leq 4\sigma\upsilon\nu x - 3 \leq 1$

Άρα η παράσταση Β έχει ελάχιστη τιμή το - 7 και μέγιστη το 1.

4 Σε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων Οxy παίρνουμε το σημείο $M(-3,4)$.
Να υπολογιστούν οι τριγωνομετρικοί αριθμοί της γωνίας $\omega = x\hat{O}M$.

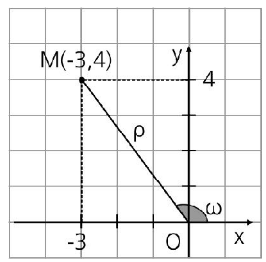
Λύση

Για την απόσταση $OM = \rho$ έχουμε:

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$$

Άρα: $\eta\mu\omega = \frac{y}{\rho} = \frac{4}{5}$, $\sigma\upsilon\nu\omega = \frac{x}{\rho} = \frac{3}{5}$

και $\varepsilon\varphi\omega = \frac{y}{x} = \frac{4}{-3} = -\frac{4}{3}$

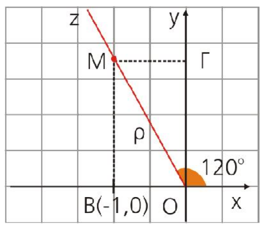


5 Σε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων Οxy φέρουμε ημιευθεία Oz, ώστε $x\hat{O}z = 120°$. Πάνω στην Oz παίρνουμε το σημείο Μ με τετμημένη -1. Να υπολογιστούν οι τριγωνομετρικοί αριθμοί της γωνίας $x\hat{O}M = 120°$.

Λύση

Φέρνουμε $MB \perp x'x$ και $M\Gamma \perp y'y$.

Επειδή $x\hat{O}M = 120°$ και $x\hat{O}y = 90°$ θα είναι $\Gamma\hat{O}M = 30°$, οπότε από το ορθογώνιο τρίγωνο ΟΜΓ:



$$\varepsilon\varphi 30° = \frac{M\Gamma}{O\Gamma} \quad \text{ή} \quad O\Gamma = \sqrt{3} \quad \text{και}$$

$$\rho = \sqrt{(-1)^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{1+3} = 2$$

$$\text{Άρα } \eta\mu 120° = \frac{y}{\rho} = \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \sigma\upsilon\nu 120° = \frac{x}{\rho} = -\frac{1}{2} \text{ και}$$

$$\varepsilon\varphi 120° = \frac{y}{x} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{-1}{2}} = -\sqrt{3}.$$

6 Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας $\omega = x\hat{O}M$, όταν:
α) Μ(3, 4) β) Μ(5, -12) γ) Μ(0, 4)

Λύση

α) $\eta\mu\omega = \dfrac{4}{\sqrt{3^2+4^2}} = \dfrac{4}{5}$, $\sigma\upsilon\nu\omega = \dfrac{3}{\sqrt{3^2+4^2}} = \dfrac{3}{5}$, $\varepsilon\varphi\omega = \dfrac{4}{3}$

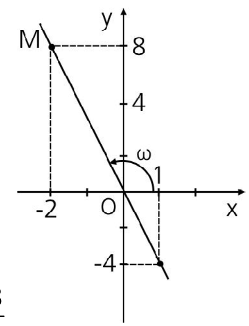
β) $\eta\mu\omega = \dfrac{-12}{13}$, $\sigma\upsilon\nu\omega = \dfrac{5}{13}$, $\varepsilon\varphi\omega = -\dfrac{12}{5}$

γ) $\eta\mu\omega = \dfrac{4}{\sqrt{4^2}} = 1$, $\sigma\upsilon\nu\omega = \dfrac{0}{4} = 0$, η εφω δεν ορίζεται.

7 Μια ευθεία ε έχει εξίσωση y = -4x.
α) Να σχεδιάσετε την ευθεία ε και να προσδιορίσετε την τεταγμένη ενός σημείου της Μ που έχει τετμημένη -2.
β) Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας $\omega = x\hat{O}M$.

Λύση

α) Για x = -2, είναι y = -4(-2) = 8.
Άρα Μ(-2, 8).

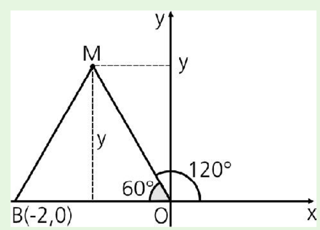


β) $\eta\mu\omega = \dfrac{8}{\sqrt{(-2)^2+8^2}} = \dfrac{8}{\sqrt{68}}$

$= \dfrac{8\sqrt{68}}{68} = \dfrac{2\sqrt{68}}{17}$

$\sigma\upsilon\nu\omega = \dfrac{-2}{\sqrt{68}}$, $\varepsilon\varphi\omega = \dfrac{\frac{2\sqrt{68}}{17}}{\frac{-2}{\sqrt{68}}} = -\dfrac{68}{17}$

8 Στο παρακάτω σχήμα το τρίγωνο ΟΒΜ είναι ισόπλευρο.
Να υπολογίσετε:
α) τις συντεταγμένες του Μ.
β) τους τριγωνομετρικούς αριθμούσm της γωνίας 120°.



Λύση

α) Αν M(x, y) τότε:

$$x=\frac{0+(-2)}{2}=-1 \text{ και } εφ60°=\frac{y}{1}=\sqrt{3} \text{ ή } y=\sqrt{3}.$$

Τότε: $M\left(-1,\sqrt{3}\right)$.

β) $ημ120°=\frac{y}{OM}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{1^2+\left(\sqrt{3}\right)^2}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

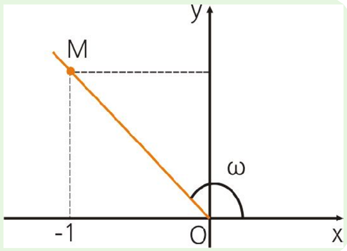
$συν120°=\frac{x}{OM}=\frac{-1}{2}$, $εφ120°=\frac{y}{x}=\frac{\sqrt{3}}{-1}=-\sqrt{3}$

$συνω=\frac{-1}{\sqrt{5}}=\frac{-\sqrt{5}}{5}$, $εφω=\frac{2}{-1}=-2$

9 Στο διπλανό σχήμα είναι $εφω=-\frac{4}{3}$. Αν η τεταγμένη του σημείου M είναι -1, τότε να υπολογίσετε:

α) την τεταγμένη του σημείου M.

β) το ημω και το συνω.



Λύση

α) Έστω $M(x,y)$, τότε: $εφω=\frac{y}{x}$ ή $-\frac{4}{3}=\frac{y}{-1}$ ή $y=\frac{4}{3}$

β) $ημω=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{\frac{4}{3}}{\sqrt{(-1)^2+\left(\frac{4}{3}\right)^2}}=\frac{\frac{4}{3}}{\sqrt{\frac{25}{9}}}=\frac{\frac{4}{3}}{\frac{5}{3}}=\frac{4}{5}$

$συνω=-\frac{-1}{\frac{5}{3}}=-\frac{3}{5}$

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1 *Για το σημείο $M\left(7,\sqrt{32}\right)$ είναι $ρ=OM=9$. Αν $ω=x\hat{O}M$ να συμπληρώσετε τις παρακάτω ισότητες:*

ημω = ……… συνω = ……… εφω = ………

2 *Αν για τη γωνία ω ισχύει: $180<ω=x\hat{O}M<270°$, τότε να συμπληρώσετε τα παρακάτω κενά με το σύμβολο > ή <.*

ημω…0 συν…0 εφω…0

3 *Να χαρακτηρίσετε τις επόμενες προτάσεις με (Σ), αν είναι σωστές ή με (Λ), αν είναι λανθασμένες:*

α. Για κάθε γωνία ω ισχύει $-1 \leq ημω \leq 1$. ☐

β. Αν η γωνία ω είναι οξεία, τότε $εφω < 0$. ☐

γ. Αν για τη γωνία ω ισχύει $ημω > 0$, τότε η ω είναι οξεία. ☐

δ. Το ημίτονο οποιασδήποτε γωνίας τριγώνου είναι αρνητικός αριθμός. ☐

4 *Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα αντιστοιχίζοντας σε κάθε τριγωνομετρικό αριθμό της στήλης Α τον ίσο του αριθμό από τη στήλη Β.*

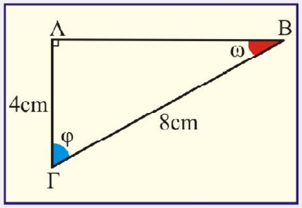
Στήλη Α	Στήλη Β
α. $συν90°$	1. 0
β. $ημ180°$	2. -1
γ. $συν0°$	3. 1
δ. $ημ90°$	
ε. $εφ0°$	
στ. $εφ180°$	
ζ. $ημ0°$	
η. $συν180°$	

α	β	γ	δ	ε	στ	ζ	η

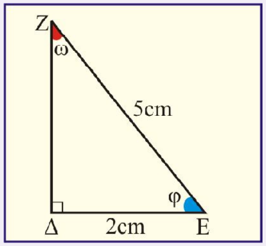
ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1 Να υπολογιστούν οι γωνίες ω και φ σε κάθε μία περίπτωση:

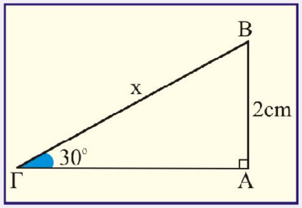
α.

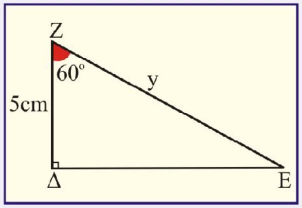


β.

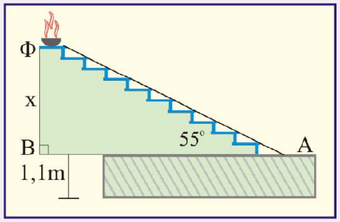


2 Να υπολογίσετε τα x και y σε κάθε μία περίπτωση:

α. 

β. 

3 Να υπολογίσετε το ύψος στο οποίο βρίσκεται η ολυμπιακή φλόγα.



4 Να υπολογίσετε το γινόμενο: $συν180^\circ \cdot συν360^\circ \cdot ημ90^\circ \cdot ημ270^\circ$.

5 Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή των παραστάσεων: **α.** $A = 2ημx + 1$ **β.** $B = 2συνx - 1$

6 Να υπολογίσετε το πρόσημο των παρακάτω τριγωνομετρικών αριθμών:
α. ημ120°, συν120°, εφ120° **β.** ημ70°, συν70°, εφ70°

7 Αν $90^\circ \leq x \leq 180^\circ$ και $3ημx = 0,9$ να υπολογίσετε τη γωνία x.

8 Αν $0^\circ \leq x \leq 270^\circ$ και $συνx + 0,8 = 0,3$ να υπολογίσετε τη γωνία x.

9

Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας $\omega = x\hat{O}M$, όταν:

α. $M(4,3)$ **β.** $M(5,-12)$ **γ.** $M(0,2)$.

10

Μια ευθεία ε έχει εξίσωση $y = 2x$.

α. Να σχεδιάσετε την ευθεία ε και να προσδιορίσετε την τεταγμένη ενός σημείου της Μ που έχει τετμημένη -1.

β. Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας $\omega = x\hat{O}M$.

11

Στο διπλανό σχήμα είναι $\varepsilon\varphi\omega = -4$. Αν η τετμημένη του σημείου Μ είναι -1, τότε να υπολογίσετε:

α. την τεταγμένη του σημείου Μ.

β. το ημω και το συνω.