4.2 Η συνάρτηση $y = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$

Ερώτηση 1

Τι γνωρίζετε για τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$;

Απάντηση

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y=\alpha x^2+\beta x+\gamma$ με $\alpha \neq 0$ είναι παραβολή με:

- **Κορυφή** το σημείο $K\left(-\frac{\beta}{2\alpha},-\frac{\Delta}{4\alpha}\right)$, όπου $\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma$ και
- **Άξονα συμμετρίας** την κατακόρυφη ευθεία που διέρχεται από την κορυφή Κ και έχει εξίσωση $x=-\frac{\beta}{2\alpha}$.

Γενικά

- Αν $\alpha > 0$, η συνάρτηση $y=\alpha x^2+\beta x+\gamma$ παίρνει **ελάχιστη τιμή** $y=-\frac{\Delta}{4\alpha}$, όταν $x=-\frac{\beta}{2\alpha}$
- Αν $\alpha < 0$, η συνάρτηση $y=\alpha x^2+\beta x+\gamma$ παίρνει **μέγιστη τιμή** $y=-\frac{\Delta}{4\alpha}$, όταν $x=-\frac{\beta}{2\alpha}$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ – ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1 Να σχεδιαστεί η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y=x^2-4$ και να βρεθούν τα κοινά σημεία με τον άξονα $x'x$.

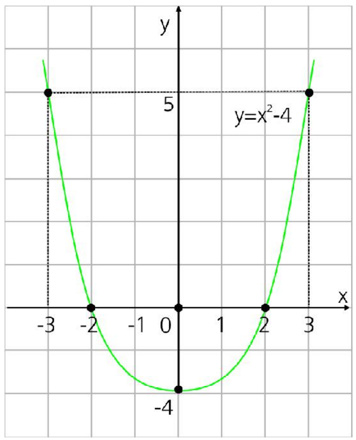
Λύση

Η συνάρτηση $y=x^2-4$ είναι της μορφής $y=\alpha x^2+\beta x+\gamma$ με α = 1, β = 0 και γ = -4, οπότε έχουμε $-\frac{\beta}{2\alpha}=-\frac{0}{2\cdot 1}=0$ και $-\frac{\Delta}{4\alpha}=-\frac{0^2-4\cdot 1\cdot(-4)}{4\cdot 1}=-4$.

Άρα η γραφική της παράσταση είναι παραβολή με κορυφή το σημείο $K(0,-4)$ και άξονα συμμετρίας την ευθεία $x=0$, δηλαδή τον άξονα $y'y$.

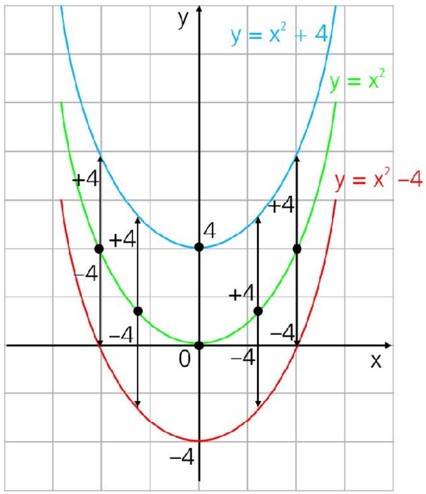
Για τον ακριβέστερο σχεδιασμό της παραβολής προσδιορίζουμε μερικά ακόμη σημεία της.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	5	0	-3	-4	-3	0	5



Για να βρούμε τα κοινά σημεία της παραβολής $y=x^2-4$ με τον άξονα $x'x$ θέτουμε $y=0$ (τα σημεία του άξονα $x'x$ έχουν τεταγμένη 0) και έχουμε $x^2-4=0$ ή $x^2=4$, οπότε x = 2 ή x = -2. Άρα, τα κοινά σημεία της παραβολής και του άξονα $x'x$ είναι τα $A(-2,0)$ και $B(2,0)$.

Παρατήρηση:
Η παραβολή $y = x^2 - 4$, που έχει κορυφή το σημείο $K(0,-4)$, μπορεί να προκύψει και με κατακόρυφη μετατόπιση της παραβολής $y = x^2$ προς τα κάτω κατά 4 μονάδες (δεν υπάρχει οριζόντια μετατόπιση, γιατί η τετμημένη της κορυφής είναι 0).
Ομοίως, η παραβολή $y = x^2 + 4$, που έχει κορυφή το σημείο Κ(0, 4) μπορεί να προκύψει και με κατακόρυφη μετατόπιση της παραβολής $y = x^2$ προς τα πάνω κατά 4 μονάδες (δεν υπάρχει οριζόντια μετατόπιση, γιατί η τετμημένη της κορυφής είναι 0).



2 Να σχεδιαστεί η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = (x-4)^2$ και να βρεθεί το κοινό της σημείο με τον άξονα $y'y$.

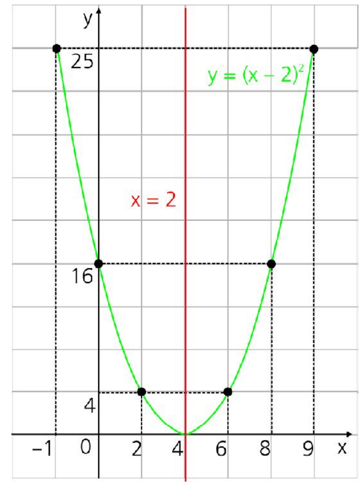
Λύση

Η συνάρτηση $y = (x-4)^2$ γράφεται $y = x^2 - 8x + 16$ και είναι της μορφής $y = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ με α = 1, β = -8 και γ = 16, οπότε

έχουμε: $-\frac{\beta}{2\alpha} = -\frac{-8}{2\cdot 1} = 4$ και $-\frac{\Delta}{4\alpha} = \frac{-(-8)^2 - 4\cdot 1\cdot 16}{4\cdot 1} = 0$

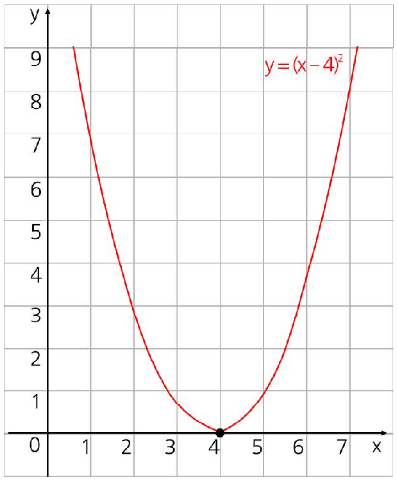
Άρα, η γραφική της παράσταση είναι παραβολή με κορυφή το σημείο Κ(4,0) και άξονα συμμετρίας την ευθεία x = 4. Για τον ακριβέστερο σχεδιασμό της παραβολής προσδιορίζουμε μερικά ακόμα σημεία της.

x	-1	0	2	4	6	8	9
y	25	16	4	0	4	16	25



Για να βρούμε το κοινό σημείο της παραβολής $y = (x-4)^2$ με τον άξονα $y'y$, θέτουμε x = 0 (τα σημεία του άξονα $y'y$ έχουν τετμημένη 0), οπότε έχουμε $y = (0-4)^2 = 16$. Άρα, το κοινό σημείο της παραβολής με τον άξονα $y'y$ είναι $A(0,16)$.

Παρατήρηση:
Η παραβολή $y = (x-4)^2$, που έχει κορυφή το σημείο $K(4,0)$, μπορεί να προκύψει και με οριζόντια μετατόπιση της παραβολής $y = x^2$ προς τα δεξιά κατά 4 μονάδες (δεν υπάρχει κατακόρυφη μετατόπιση, γιατί η τεταγμένη της κορυφής είναι 0).



3 Να σχεδιαστεί η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = x^2 - 2x$ και να προσδιοριστούν οι τιμές του x για τις οποίες είναι $y < 0$.

Λύση

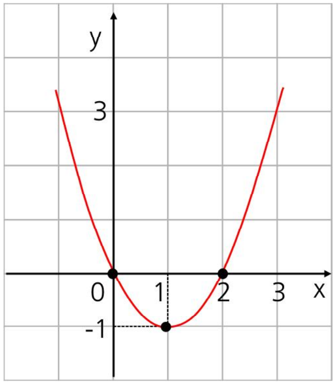
Η συνάρτηση $y = x^2 - 2x$ είναι της μορφής $y = x^2 - 2x$ με α = 1, β = -2 και γ = 0, οπότε έχουμε $-\frac{\beta}{2\alpha} = -\frac{-2}{2\cdot 1} = 1$ και

$$-\frac{\Delta}{4\alpha} = -\frac{(-2)^2 - 4\cdot 1\cdot 0}{4\cdot 1} = -1.$$

Άρα, η γραφική της παράσταση είναι παραβολή με κορυφή το σημείο Κ(1, -1) και άξονα συμμετρίας την ευθεία x = 1.
Για τον ακριβέστερο σχεδιασμό της παραβολής προσδιορίζουμε μερικά ακόμη σημεία της.

x	0	1	2	3
y	0	-1	0	3

Σχεδιάζουμε την παραβολή και παρατηρούμε ότι τα σημεία της που έχουν τεταγμένη y αρνητική είναι εκείνα που έχουν τετμημένη x μεταξύ των αριθμών 0 και 2. Άρα, είναι $y < 0$, όταν $0 < x < 2$.



4 Δίνεται η συνάρτηση $y = x^2 + 4x + \lambda$.
α. Για ποια τιμή του πραγματικού αριθμού λ το σημείο Α(1,10) ανήκει στη γραφική παράσταση της συνάρτησης;
β. Αν λ = -5, να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης για $-4 \le x \le 1$ και να βρείτε τα κοινά της σημεία με τους άξονες.

Λύση

α. Αφού διέρχεται από το σημείο Α(1,10), πρέπει οι συντεταγμένες του σημείου Α, να επαληθεύουν την εξίσωση $y = x^2 + 4x + \lambda$.
Άρα, για x = 1 και y = 10, έχουμε $10 = 1^2 + 4\cdot 1 + \lambda$ ή $\lambda = +5$.

β. Για λ =-5 η συνάρτηση $y = x^2 + 4x - 5$ είναι της μορφής $y = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ με α =1, β = 4 και γ = -5, οπότε έχουμε:

$$-\frac{\beta}{2\alpha} = -\frac{+4}{2\cdot 1} = -2 \text{ και } -\frac{\Delta}{4\alpha} = -\frac{4^2 - 4\cdot 1\cdot(-5)}{4\cdot 1} = -9$$

Άρα, η γραφική της παράσταση είναι παραβολή με κορυφή το σημείο $K(-2,-9)$ και άξονα συμμετρίας την ευθεία x = -2.

Για να βρούμε το κοινό σημείο της παραβολής με τον άξονα y'y, θέτουμε $x=0$, οπότε έχουμε y = -5. Άρα το κοινό σημείο της παραβολής με τον άξονα y'y είναι το σημείο $A(0,-5)$.

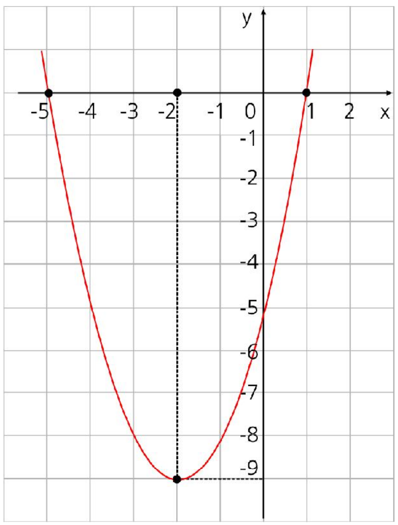
Για να βρούμε τα κοινά σημεία της παραβολής με τον άξονα x'x, θέτουμε $y=0$, οπότε έχουμε:

$$x^2+4x-5=0 \text{ ή } (x = 1 \text{ και } x = -5)$$

Άρα τα κοινά σημεία της παραβολής με τον άξονα x'x είναι τα Α(1,10) και Β(-5,0).

Για τον ακριβέστερο σχεδιασμό της παραβολής προσδιορίζουμε μερικά ακόμη σημεία της.

x	-5	0	1
y	0	-5	0



5 Να σχεδιάσετε την παραβολή $y=x^2-5x+4$. Αν Α,Β,Γ είναι τα κοινά της σημεία με τους άξονες, να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ.

Λύση

Η συνάρτηση $y=x^2-5x+4$ είναι της μορφής $y=\alpha x^2+\beta x+\gamma$ με α =1, β = -5 και γ = 4, οπότε έχουμε:

$$-\frac{\beta}{2\alpha}=-\frac{-5}{2\cdot 1}=\frac{+5}{2} \text{ και } -\frac{\Delta}{4\alpha}=-\frac{(-5)^2-4\cdot 1\cdot 4}{4\cdot 1}=\frac{-9}{4}.$$

Άρα, η γραφική της παράσταση είναι παραβολή με κορυφή το σημείο $K\left(\frac{+5}{2},\frac{-9}{4}\right)$ και άξονα συμμετρίας την ευθεία $x=\frac{5}{2}$.

Για να βρούμε το κοινό σημείο της παραβολής με τον άξονα y'y, θέτουμε $x=0$, οπότε έχουμε, $y=4$. Άρα το κοινό σημείο της παραβολής με τον άξονα y'y είναι το σημείο $A(0,4)$.

Για να βρούμε τα κοινά σημεία της παραβολής με τον άξονα x'x, θέτουμε $y=0$, οπότε έχουμε: $x^2-5x+4=0$ ή ($x=1$ και $x=4$)

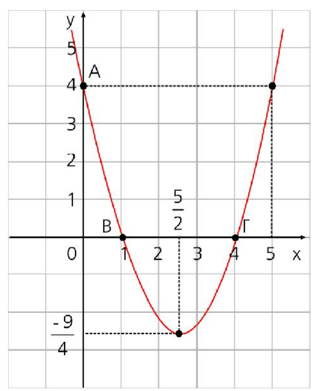
Άρα τα κοινά σημεία της παραβολής με τον άξονα x'x είναι τα Β(1,0) και Γ(4,0).

Για τον ακριβέστερο σχεδιασμό της παραβολής προσδιορίζουμε μερικά ακόμη σημεία της.

x	0	1	2	4	5
y	4	0	-2	0	4

Το τρίγωνο ΑΒΓ έχει εμβαδόν

$$(\text{ΑΒΓ})=\frac{1}{2}(\text{ΒΓ})(\text{ΟΑ})=\frac{1}{2}(4-1)\cdot 4=6\text{τ.μ.}$$



6 Να βρείτε τους αριθμούς β και γ, ώστε η συνάρτηση $y = x^2 + βx + γ$ για x = 2 να παίρνει ελάχιστη τιμή την y = -5.

Λύση

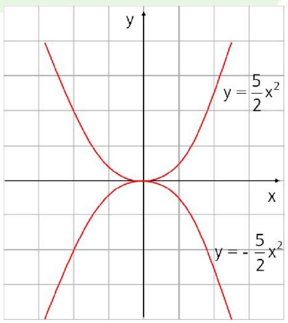
Πρέπει να ισχύουν: $-\dfrac{β}{2α} = -\dfrac{β}{2 \cdot 1} = 2$ και

$-\dfrac{Δ}{4α} = -\dfrac{β^2 - 4 \cdot 1 \cdot γ}{4 \cdot 1} = -5$.

Άρα β = -4 και γ = -1 και συνεπώς $y = x^2 - 4x - 1$.

7 Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $4y^2 = 25x^4$ παριστάνει δύο παραβολές συμμετρικές ως προς τον άξονα $x'x$, τις οποίες και να τις σχεδιάσετε στο ίδιο σύστημα αξόνων.

Λύση



Επειδή $y^2 = \dfrac{25}{4}x^4$ είναι:

$y = \dfrac{5}{2}x^2$ ή $y = -\dfrac{5}{2}x^2$, άρα η εξίσωση παριστάνει δύο παραβολές συμμετρικές ως προς τον άξονα $x'x$.

8 Να βρείτε την εξίσωση της παραβολής, που έχει κορυφή το σημείο Κ(1,4) και τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο Α(0,1).

Λύση

Έστω $y = αx^2 + βx + γ$, με $α \neq 0$ η εξίσωση της παραβολής, τότε: $-\dfrac{β}{2α} = 1$, $\dfrac{-Δ}{4α} = 4$

Επίσης το Α(0,1) ικανοποιεί την $y = αx^2 + βx + γ$, δηλ:

$1 = α \cdot 0^2 + β \cdot 0 + γ$ ή $γ = 1$. Συνεπώς:

$\dfrac{-β}{2α} = 1$, $\quad -\dfrac{β^2 - 4αγ}{4α} = 4$ ή

$β = -2α$, $\quad \dfrac{(-2α)^2 - 4α}{4α} = -4$ ή

β = -2α, $\quad \dfrac{4α^2 - 4α}{4α} = -4$ ή

β = -2α, $\quad α^2 - α + 4α = 0$ ή

β = -2α, $\quad α^2 + 3α = 0$ ή

β = -2α, $\quad α(α + 3) = 0$ ή

β = -2α, $\quad$ α = 0 ή α = -3

Για α = 0: β = 0 (απορρίπτεται αφού α = 0)

Για α = -3: β = 6

Τελικά η εξίσωση της παραβολής είναι: $y = -3x^2 + 6x + 1$

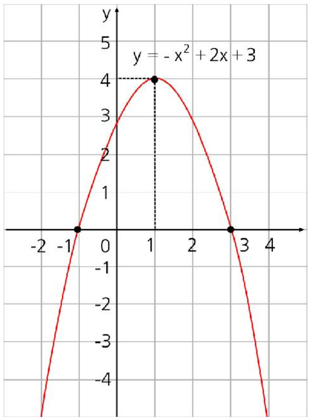
ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1 *Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = -x^2 + 2x + 3$. Να συμπληρώσετε τα κενά σε καθεμιά από τις παρακάτω προτάσεις.*

α. Η γραφική παράσταση είναι .... με κορυφή το σημείο .... και άξονα συμμετρίας την ευθεία ....

β. Η συνάρτηση αυτή παίρνει .... τιμή y = ..., όταν x = ...

γ. Η γραφική παράσταση τέμνει τον άξονα $x'x$ στα σημεία ...., ... και τον άξονα $y'y$ στο σημείο ....



2 *Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση. Η παραβολή $y = 3x^2 + 4$ έχει:*

i) Κορυφή το σημείο

α. $(2,4)$ β. $(0,-12)$ γ. $(0,4)$ δ. $(4,0)$

ii) Άξονας συμμετρίας την ευθεία με εξίσωση

α. $x = 4$ β. $y = 4$ γ. $x = 0$ δ. $y = 0$

3 *Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με (Σ), αν είναι σωστές ή με (Λ), αν είναι λανθασμένες:*

α. Η συνάρτηση $y = -4x^2 - 7x + 4$ παίρνει ελάχιστη τιμή. ☐

β. Η παραβολή $y = x^2 - 3x + 2$ τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $A(0,2)$. ☐

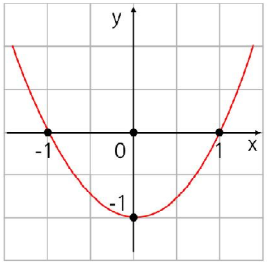
γ. Ο άξονας $y'y$ είναι άξονας συμμετρίας της παραβολής $y = 7x^2 - 10$. ☐

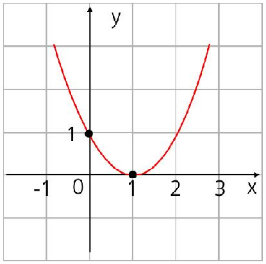
δ. Η κορυφή της παραβολής $y = (x-2)^2$ είναι σημείο του άξονα $x'x$. ☐

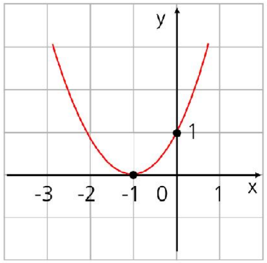
ε. Η κορυφή της παραβολής $y = x^2 + 4$ είναι σημείο του άξονα $y'y$. ☐

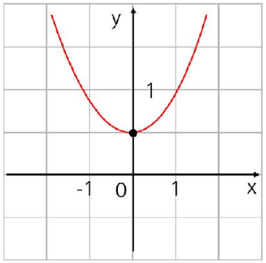
4 *Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα αντιστοιχίζοντας σε κάθε παραβολή της εξίσωσή της.*

1. $y = (x+1)^2$ 2. $y = x^2 - 1$ 3. $y = x^2 + 1$ 4. $y = (x-1)^2$

α)


β)


γ)


δ)


α	β	γ	δ

5 *Ορισμένες τιμές της συνάρτησης $y = αx^2 + βx + γ$ με $α < 0$ φαίνονται στον πίνακα.*

x	-2	0	1	4
y	0	3	4	5

Να συμπληρώσετε τα κενά σε καθεμιά από τις παρακάτω προτάσεις:

α. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης είναι παραβολή με άξονα συμμετρίας την ευθεία .... και κορυφή το σημείο ....

β. Η συνάρτηση αυτή παίρνει μέγιστη τιμή $y =$ .... , όταν $x =$ ....

γ. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης τέμνει τον άξονα $x'x$ στα σημεία ...., ... και τον άξονα $y'y$ στο σημείο ....

6 *Ν' αντιστοιχίσετε τις παραβολές:*

1. $y = x^2 + 4x - 1$ **2.** $y = 2x^2 - 9$ **3.** $y = x^2 - 7x$ **4.** $y = -2x^2$

με τα σημεία Α, Β, Γ, Δ που είναι οι κορυφές τους και να συμπληρώσετε τα κενά.

$A\left(\frac{7}{2},\quad\right)$, $B(0,-9)$, $Γ(-2,\quad)$, $Δ(0,0)$.

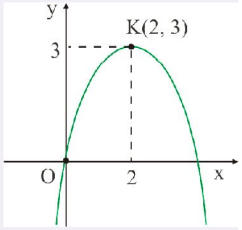
ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1 Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της παραβολής $y = x^2 + x + 1$.

2 Σε οικόπεδο που έχει σχήμα ισοσκελούς ορθογωνίου τριγώνου με κάθετη πλευρά 20m, θα χτίσουμε σπίτι σχήματος ορθογωνίου ΑΔΕΖ.

α. Αν $ΑΖ = x$ να εκφράσετε το εμβαδόν Ε σαν συνάρτηση του x.

β. Να βρείτε για ποια τιμή του x το εμβαδόν ΑΔΕΖ γίνεται μέγιστο.



3 Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f για την οποία η γραφική της παράσταση είναι η παραβολή του διπλανού σχήματος.

4 Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = 3x^2 - (λ - 1)x - λ^2 + 1$.
Να βρείτε το λ ώστε το ελάχιστο της συνάρτησης f να γίνεται μέγιστο.

5 Δίνεται το τριώνυμο $f(x) = 3x^2 - 4(2α + β)x + α - 3β$.
Να βρείτε τα α, β ώστε να έχει ρίζα τον αριθμό -2 και συγχρόνως να παρουσιάζει ελάχιστο στο $x = 3$.

6 Δίνεται η παραβολή $f(x) = x^2 + (k + 2)x + k + 2$
Να βρείτε το k σε κάθε μία από τις παρακάτω περιπτώσεις:

α. αν εφάπτεται στον x'x.

β. αν τέμνει τον x'x σε δύο σημεία.

γ. αν δεν τέμνει τον x'x.

δ. αν έχει άξονα συμμετρίας την $x = 3$.

ε. αν παρουσιάζει ελάχιστο για $x = 5$.

στ. αν έχει ελάχιστο το -8.

ζ. αν τέμνει τον x'x στο Α(3, 0).

η. αν τέμνει τον y'y στο Β(0, 5).

7 Δίνεται η ευθεία $y = x + 1$ (1) και το σημείο Α(2, 1). Να βρείτε εκείνο το σημείο Μ(x, y) της ευθείας που η απόσταση (ΑΜ) είναι η ελάχιστη. Ποια είναι αυτή;

8 Να βρείτε στις παρακάτω παραβολές, την κορυφή, τον άξονα συμμετρίας, τα σημεία στα οποία οι παραβολές τέμνουν τους άξονες, το μέγιστο ή το ελάχιστο κάθε συνάρτησης καθώς και την τιμή του x για την οποία συμβαίνει αυτό και να τις σχεδιάσετε:

α. $y=-x^2-x+6$ β. $y=x^2+x-20$ γ. $y=x^2-3x-28$ δ. $y=x^2-x+1$

9 Να σχεδιαστεί η παραβολή $y=x^2-7x+2\kappa$, αν αυτή διέρχεται από το σημείο $A(3,-6)$.

10 Να προσδιοριστεί ο $\lambda\in R$, ώστε η συνάρτηση: $f(x)=(\lambda+2)x^2+\lambda x-1,\quad \lambda\neq-2$ να παρουσιάζει ελάχιστο το -2.

11 Να βρεθεί ο $\lambda\in R$ ώστε η ευθεία $\psi=\lambda x-2$ να είναι εφαπτομένη της παραβολής $\psi=x^2-x-1$ στο σημείο με τετμημένη 1.

12 Να αποδείξετε ότι οι παραβολές: $(c_1):\psi=x^2$ και $(c_2):\psi=-x^2-4x-5$ δεν έχουν κανένα κοινό σημείο.

13 Να αποδείξετε ότι οι παραβολές $(c_1):\psi=x^2+x-2$ και $(c_2):\psi=-x^2-2x+3$ τέμνονται σε δυο σημεία, τα οποία μαζί με τις κορυφές των παραβολών σχηματίζουν παραλληλόγραμμο.

ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗΣ

Άσκηση 1

Δίδεται συνάρτηση f με $f(x)=\alpha x^2-1$. Να βρεθεί για ποια τιμή του $\alpha\in R$ το σημείο $A(\sqrt{3},5)$, ανήκει στη γραφική παράσταση της συνάρτησης.

Άσκηση 2

Να βρείτε στις παρακάτω παραβολές, την κορυφή, τον άξονα συμμετρίας, τα σημεία στα οποία οι παραβολές τέμνουν τους άξονες, το μέγιστο ή το ελάχιστο κάθε συνάρτησης καθώς και την τιμή του x για την οποία συμβαίνει αυτό και να τις σχεδιάσετε:

α. $y=x^2-5x$, για $-1\le x\le 6$ β. $y=4x-x^2$, για $-2\le x\le 4$

Άσκηση 3

Να βρείτε την εξίσωση της παραβολής, που έχει κορυφή το σημείο $K(1,4)$ και τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $A(0,1)$.