

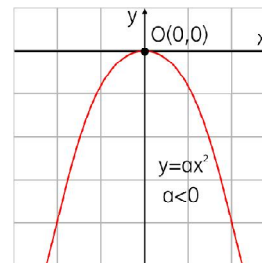
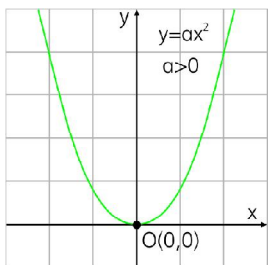
## 4.1 Η συνάρτηση $y = ax^2$

### Ερώτηση 1

Τι γνωρίζετε για τη γραφική παράσταση της συνάρτησης  $y = ax^2$ ;

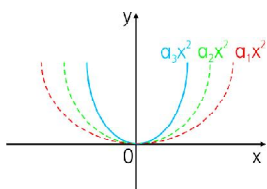
### Απάντηση

- Έχει γραφική παράσταση μία καμπύλη που ονομάζεται **παραβολή** με κορυφή το σημείο  $O(0,0)$  και άξονα συμμετρίας τον άξονα  $y'y$ .
- Αν  $a > 0$  τότε: η παραβολή βρίσκεται από τον άξονα  $x'x$  και πάνω και η συνάρτηση παίρνει **ελάχιστη τιμή**  $y = 0$ , όταν  $x = 0$ .
- Αν  $a < 0$ , τότε: η παραβολή βρίσκεται από τον άξονα  $x'x$  και κάτω και η συνάρτηση παίρνει **μέγιστη τιμή**  $y = 0$ , όταν  $x = 0$ .

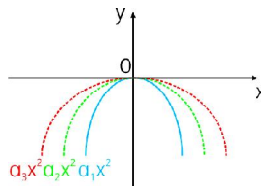


Στα παρακάτω σχήματα έχουμε σχεδιάσει την παραβολή  $y = ax^2$  για διάφορες τιμές του αριθμού  $a$ . Παρατηρήστε ότι:

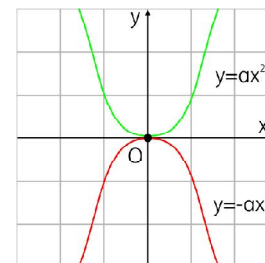
α) Ο συντελεστής  $a$  δεν καθορίζει μόνο τη θέση της παραβολής  $y = ax^2$  ως προς τον άξονα  $x'x$ , αλλά καθορίζει και το "άνοιγμά" της. Όταν η απόλυτη τιμή του  $a$  αυξάνεται, τότε η παραβολή "κλείνει".



αν  $0 < a_1 < a_2 < a_3$   
οι αντίστοιχες γραφικές παραστάσεις τους φαίνονται στο παραπάνω σχήμα.



αν  $a_1 < a_2 < a_3 < 0$   
οι αντίστοιχες γραφικές παραστάσεις τους φαίνονται παραπάνω σχήμα.



Οι παραβολές  $y = ax^2$  και  $y = -ax^2$  είναι συμμετρικές ως προς άξονα συμμετρίας  $x'x$ .

## ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ - ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

**1** Να βρεθεί η τιμή του  $a$ , ώστε η παραβολή  $y = ax^2$  να διέρχεται από το σημείο  $A(-2,8)$ .

**Λύση**

Για να διέρχεται η παραβολή  $y = ax^2$  από το σημείο  $A(-2,8)$ , πρέπει οι συντεταγμένες του σημείου  $A$ , να επαληθεύουν την εξίσωση  $y = ax^2$ .

Άρα, για  $x = -2$  και  $y = 8$ , έχουμε  $8 = a(-2)^2$  ή  $8 = 4a$ , οπότε  $a = 2$ .

**2** Να σχεδιαστεί η παραβολή  $y = -8x^2$  όταν  $-\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}$  και να βρεθεί η μέγιστη και η ελάχιστη τιμή που παίρνει η μεταβλητή  $y$ . Ποια σημεία της παραβολής έχουν τεταγμένη  $-\frac{8}{9}$ ;

**Λύση**

Σχηματίζουμε πίνακα τιμών της συνάρτησης  $y = -8x^2$ .

$x$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$0$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
$y$	$-2$	$-\frac{1}{2}$	$0$	$-\frac{1}{2}$	$-2$

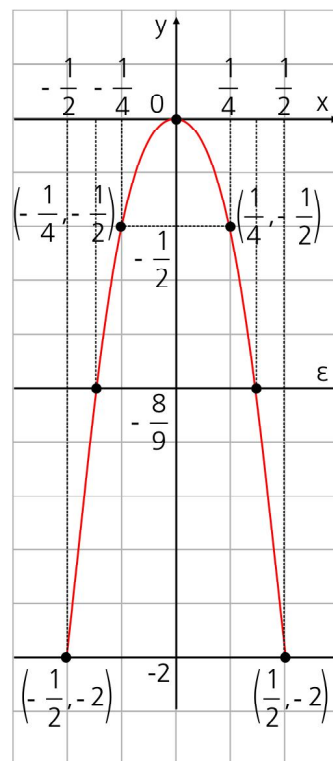
Με τη βοήθεια των τιμών αυτών σχεδιάζουμε την παραβολή. Από τη γραφική παράσταση προκύπτει ότι, για όλες τις τιμές του  $x$ , από το  $-\frac{1}{2}$  έως και το  $\frac{1}{2}$  οι αντίστοιχες τιμές του  $y$  είναι από το  $-2$  έως και το  $0$  ( $-2 \leq y \leq 0$ ).

Άρα, η μέγιστη τιμή του  $y$  είναι το  $0$ , όταν  $x = 0$  και η ελάχιστη τιμή του  $y$  είναι το  $-2$ , όταν  $x = -\frac{1}{2}$  ή  $x = \frac{1}{2}$ .

Για  $y = -\frac{8}{9}$  έχουμε:  $-\frac{8}{9} = -8x^2$  ή  $x^2 = \frac{1}{9}$ , οπότε  $x = \pm\frac{1}{3}$ .

Άρα τα ζητούμενα σημεία είναι τα  $(-\frac{1}{3}, -\frac{8}{9})$  και  $(\frac{1}{3}, -\frac{8}{9})$ .

Τα σημεία αυτά μπορούν να βρεθούν και από τη γραφική παράσταση, αφού είναι κοινά σημεία της ευθείας  $\epsilon: y = -\frac{8}{9}$  και της παραβολής  $y = -8x^2$ .



Να σχεδιάσετε τις παραβολές:

3

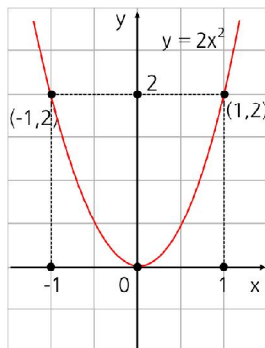
α.  $y = 2x^2$  β.  $y = -2x^2$  γ.  $y = -\frac{3}{4}x^2$  δ.  $y = \frac{3}{4}x^2$

### Λύση

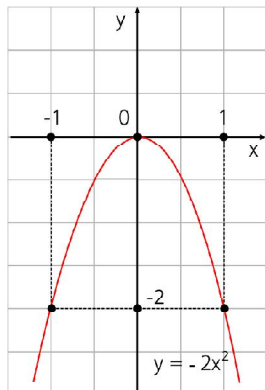
α. Γνωρίζουμε από τη θεωρία ότι αν  $a > 0$  η παραβολή  $y = ax^2$  είναι της μορφής  $\cup$  και αν  $a < 0$  είναι  $\cap$  με κορυφή το  $(0, 0)$ . Το  $a$  καθορίζει πόσο "ανοικτή" ή "κλειστή" θα είναι η καμπύλη.

Γι' αυτό δίνουμε μια τιμή στο  $x$  και προσδιορίζουμε ένα σημείο της καμπύλης. Ως συμμετρική προς τον άξονα  $y'y$  θα διέρχεται και από το συμμετρικό του σημείου που βρήκαμε ως προς τον άξονα  $y'y$ .

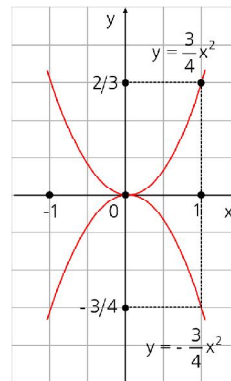
Για  $x = 1$  είναι  $y = 2$  άρα διέρχεται από το  $(1, 2)$  οπότε και από το  $(-1, 2)$ .



β. Επειδή οι παραβολές  $y = ax^2$  και  $y = -ax^2$  είναι συμμετρικές ως προς άξονα συμμετρίας τον  $x'x$ , θα είναι:

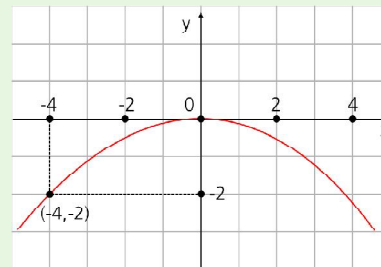


Ομοίως έχουμε γ, δ (βλ. έπε σήμα)

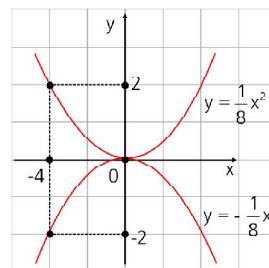


Να βρείτε την εξίσωση της παραβολής στο σχήμα παρακάτω. Να σχεδιάσετε τη συμμετρική της ως προς τον άξονα  $x'x$  και να γράψετε την εξίσωσή της.

4



### Λύση



Είναι της μορφής  $y = ax^2$  με  $a < 0$ .

Ισχύει  $-2 = a \cdot (-4)^2$  ή  $a = -\frac{1}{8}$ . Άρα είναι η  $y = -\frac{1}{8}x^2$ .

**5** Να βρείτε τα σημεία της παραβολής  $y = -4x^2$  που έχουν τεταγμένη  $-16$ .

**Λύση**

Πρέπει  $-16 = -4x^2$  ή  $x^2 = \frac{16}{4}$  ή  $x = \pm 2$ .

Άρα τα σημεία είναι τα:  $(2, -16)$  και  $(-2, -16)$ .

**6** Να βρείτε την τιμή του  $\eta$ , ώστε η παραβολή  $y = (\eta - 2)x^2$  να διέρχεται από το σημείο  $M\left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$ .

**Λύση**

Πρέπει οι συντεταγμένες του σημείου  $M$  να επαληθεύουν την εξίσωσής της παραβολής, δηλαδή:

$$\frac{1}{4} = (\eta - 2) \left(-\frac{1}{4}\right)^2 \quad \text{ή} \quad \frac{1}{4} = (\eta - 2) \frac{1}{16} \quad \text{ή} \quad \eta - 2 = 4 \quad \text{ή} \quad \eta = 6.$$

**7** Αν η συνάρτηση  $y = \frac{1}{\eta}x^2$  παίρνει μέγιστη τιμή και η γραφική της παράσταση διέρχεται από το σημείο  $M(4, \eta)$ , να βρείτε την τιμή του αριθμού  $\eta$ .

**Λύση**

Αφού παίρνει μέγιστη τιμή είναι  $\frac{1}{\eta} < 0$  δηλ.  $\eta < 0$ . Αφού διέρχεται από το  $(4, \eta)$  ισχύει:

$$\eta = \frac{1}{\eta} \cdot 4^2 \quad \text{ή} \quad \eta^2 = 4^2 \quad \text{ή} \quad \eta = \pm 4 \quad \text{και επειδή} \quad \eta < 0, \quad \text{είναι} \quad \eta = -4.$$

## ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

**1** Ποια από τα παρακάτω σημεία ανήκουν στην παραβολή  $y = -4x^2$ ;

α.  $A(-1, -4)$       β.  $B(2, -4)$       γ.  $\Gamma\left(\frac{1}{2}, 1\right)$       δ.  $\Delta\left(-\frac{1}{2}, 1\right)$

**2** Ποιες από τις παρακάτω συναρτήσεις παίρνουν μέγιστη και ποιες ελάχιστη τιμή;

α.  $y = -2x^2$       β.  $y = 2x^2$       γ.  $y = (-3x)^2$       δ.  $y = -(3x)^2$

**3** Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με ( $\Sigma$ ), αν είναι σωστές ή με ( $\Lambda$ ), αν είναι λανθασμένες:

α. Η παραβολή  $y = 2x^2$  έχει κορυφή το σημείο  $O(0, 0)$ .

β. Ο άξονας  $x'x$  είναι άξονας συμμετρίας της παραβολής  $y = -x^2$ .

4.1 Η συνάρτηση  $y = ax^2$ 

γ. Οι παραβολές  $y = 3x^2$  και  $y = -3x^2$  είναι συμμετρικές ως προς τον άξονα  $y'y$ .

δ. Η συνάρτηση  $y = 5x^2$  παίρνει ελάχιστη τιμή την  $y = 0$ .

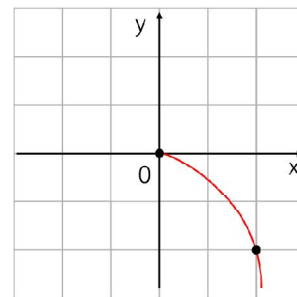
ε. Η συνάρτηση  $y = -7x^2$  παίρνει μέγιστη τιμή την  $y = 0$ .

στ. Αν η παραβολή  $y = ax^2$  διέρχεται από το σημείο  $M(-1,4)$ ,  
τότε θα διέρχεται και από το σημείο  $\Lambda(2,4)$ .

4 Στο διπλανό σύστημα αξόνων έχουμε σχεδιάσει ένα τμήμα της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $y = -x^2$ .

α. Να ολοκληρώσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης.

β. Στο ίδιο σύστημα αξόνων να σχεδιάσετε και τη γραφική παράσταση της συνάρτησης  $y = \frac{1}{4}x^2$ .



5 Αν η παραβολή  $y = ax^2$  διέρχεται από το σημείο  $M(4,-16)$ , τότε:

α.  $a = 2$

β.  $a = -1$

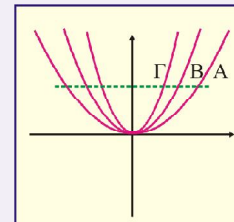
γ.  $a = -4$

δ.  $a = \frac{1}{8}$

## ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1 Μια δορυφορική κεραία έχει διάμετρο  $AB = 16\text{m}$ . Η καμπύλη  $AOB$  είναι τόξο παραβολής με εξίσωση  $y = \frac{1}{4}x^2$ . Πόσο απέχουν τα  $A, B$  από το έδαφος που θεωρείται ο  $x'x$ .

2 Να βρείτε τις εξισώσεις των παραβολών του διπλανού σχήματος, αν γνωρίζετε ότι το  $A(2,1)$ ,  $B(1,1)$ ,  $\Gamma(\frac{1}{2}, 1)$ .



3 i. Να βρείτε την εξίσωση της παραβολής με κορυφή το σημείο  $O(0,0)$  που διέρχεται από το σημείο  $A(1,4)$ .  
ii. Στη συνέχεια να βρείτε την εξίσωση της παραβολής που έχει γραφική παράσταση το συμμετρικό σχήμα αυτής του ερωτήματος (i), ως προς τον άξονα  $x'x$ .

- 4 Να σχεδιάσετε τις παραβολές  $\psi = -2x^2$  και  $\psi = 2x^2$  στο ίδιο σύστημα αξόνων. Ποια σχέση έχουν μεταξύ τους οι γραφικές παραστάσεις των δύο παραβολών;
- 5 Δίνεται η παραβολή  $\psi = a \cdot x^2$ . Να βρείτε τον  $a$ , αν η παραβολή διέρχεται από το σημείο  $(-3, -27)$ . Στη συνέχεια να τη σχεδιάσετε.
- 6 Να σχεδιαστεί η παραβολή  $\psi = ax^2$ , αν γνωρίζετε ότι διέρχεται από το σημείο  $M\left(1, \frac{1}{4}\right)$ .
- 7 Να σχεδιαστεί η παραβολή  $\psi = \frac{3}{4}x^2$  και  $-4 \leq x \leq 4$  και έπειτα να σχεδιαστεί η συμμετρική της ως προς τον άξονα  $x'x$  και να βρεθεί η εξίσωση της παραβολής αυτής.
- 8 Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = (k-2)x^2$ . Αν είναι  $f(2) - 3f(1) = 2$ , να βρεθεί το  $k$  και έπειτα να γίνει η γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f$ .
- 9 Να γίνει η γραφική παράσταση της συνάρτησης  $\psi = kx^2 + \eta$  αν γνωρίζετε ότι διέρχεται από την αρχή των αξόνων και από το σημείο  $M(3,3)$ .
- 10 Θεωρούμε την ευθεία  $(\epsilon) : \psi = \eta x - 2$  και την παραβολή  $(\varsigma) : \psi = 2x^2$ . Να προσδιοριστεί ο  $\eta \in \mathbb{R}$  ώστε η ευθεία  $(\epsilon)$  να έχει με την παραβολή  $(\varsigma)$    
 i. Ένα κοινό σημείο   
 ii. Δυο κοινά σημεία   
 iii. Κανένα κοινό σημείο

### ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗΣ

#### Άσκηση 1

Ένα ισόπλευρο τρίγωνο έχει πλευρά  $x$ . Να εκφράσετε το εμβαδόν του  $y$  ως συνάρτηση του  $x$  και να σχεδιάσετε τη γραφική της παράσταση.

#### Άσκηση 2

Τα σημεία  $A, B$  ανήκουν στις παραβολές  $y = 3x^2$  και  $y = -2x^2$  αντιστοίχως και έχουν την ίδια τετμημένη  $-1$ . Να βρείτε την απόσταση των σημείων  $A, B$ .

#### Άσκηση 3

Αν  $A, B$  είναι σημεία της παραβολής  $y = 2x^2$  με την ίδια τεταγμένη  $32$ , να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου  $OAB$ , όπου  $O$  η αρχή των αξόνων.