

3.2 Η έννοια του γραμμικού συστήματος - γραφική επίλυση

Ερώτηση 1

Ποια είναι η μορφή ενός συστήματος δύο γραμμικών εξισώσεων, δύο αγνώστων; Να δοθεί παράδειγμα.

Απάντηση

Η μορφή είναι $\begin{cases} \alpha \cdot x + \beta \cdot y = \gamma \\ \alpha' \cdot x + \beta' \cdot y = \gamma' \end{cases}$ (Σ) όπου $\alpha, \beta, \alpha', \beta'$ είναι οι συντελεστές των αγνώστων x, y και γ, γ' είναι οι σταθεροί όροι του συστήματος. Για παράδειγμα το

$$\begin{cases} 2x + 5y = 1 \\ 6x + 2y = -1 \end{cases}$$

είναι γραμμικό σύστημα 2 εξισώσεων με 2 αγνώστους.

Ερώτηση 2

Τι ονομάζουμε επίλυση ενός συστήματος;

Απάντηση

Επίλυση ονομάζουμε τη διαδικασία κατά την οποία προσπαθούμε να βρούμε κάθε ζεύγος της μορφής (x, y) το οποίο να επαληθεύει και τις δύο εξισώσεις του συστήματος.

Ερώτηση 3

Τι ονομάζουμε λύση ενός συστήματος; Να δοθεί παράδειγμα.

Απάντηση

Λύση ενός συστήματος ονομάζουμε κάθε ζεύγος της μορφής (x, y) το οποίο ικανοποιεί και τις δύο εξισώσεις του συστήματος.

Για παράδειγμα, το σύστημα:

$$\begin{cases} 2x + y = 5 \\ 3x + 2y = 8 \end{cases}$$

έχει λύση το ζεύγος $(2, 1)$, δηλαδή $x = 2, y = 1$.

Ερώτηση 4

Τι παριστάνει στο επίπεδο κάθε μια από τις εξισώσεις ενός γραμμικού συστήματος με δύο αγνώστους;

Απάντηση

Κάθε εξίσωση του συστήματος παριστάνει στο επίπεδο μια ευθεία.

Ερώτηση 5

Πώς επιλύουμε γραφικά ένα σύστημα; Να δοθούν παραδείγματα.

Απάντηση

Στο ίδιο σύστημα αξόνων σχεδιάζουμε τις δύο ευθείες που αντιπροσωπεύουν τις δύο εξισώσεις του συστήματος και στη συνέχεια παρατηρούμε εάν τέμνονται, εάν είναι παράλληλες ή αν ταυτίζονται (ίδια ευθεία).

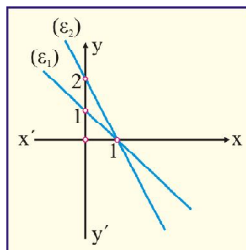
Αναλυτικότερα:

- Αν τέμνονται τότε οι συντεταγμένες του σημείου τομής τους (του κοινού τους σημείου) θα επαληθεύουν και τις δύο εξισώσεις του συστήματος, άρα θα είναι ζευγάρι λύσεων αυτού.
- Αν είναι παράλληλες (κανένα κοινό σημείο) το σύστημα δεν θα έχει κανένα ζευγάρι λύσεων και σ' αυτή την περίπτωση θα χαρακτηρίζεται αδύνατο.
- Αν οι δύο ευθείες ταυτίζονται τότε σημαίνει ότι όλα τα σημεία τους (που είναι άπειρα) θα ικανοποιούν με τις συντεταγμένες τους και τις δύο εξισώσεις. Επομένως το σύστημα θα έχει άπειρα ζευγάρια λύσεων και θα χαρακτηρίζεται αόριστο.

Για παράδειγμα, θα λύσουμε το σύστημα:

$$\begin{cases} x + y = 1 & (1) \\ 2x + y = 2 & (2) \end{cases}$$

Σχεδιάζουμε στο ίδιο σύστημα αξόνων τις ευθείες (ϵ_1) , (ϵ_2) που είναι οι γραφικές παραστάσεις των εξισώσεων (1) και (2).



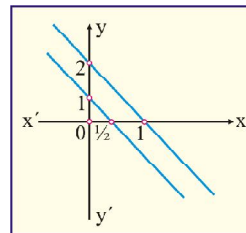
Παρατηρούμε ότι τέμνονται στο σημείο A $(1, 0)$, δηλαδή $x = 1$, $\psi = 0$ που επαληθεύουν τις δύο εξισώσεις.

Πράγματι είναι : $1 + 0 = 1$ και $2 \cdot 1 + 0 = 2$.

As λύσουμε γραφικά και το σύστημα $\begin{cases} 2x + \psi = 1 \\ 6x + 3\psi = 6 \end{cases}$

Σχεδιάζουμε και πάλι τις γραφικές παραστάσεις των εξισώσε-

ων και διαπιστώνουμε ότι πρόκειται για παράλληλες ευθείες.



Άρα το σύστημα είναι αδύνατο.

Αν λύναμε την κάθε εξίσωση ως προς ψ θα είχαμε $\psi = -2x + 1$ και $3\psi = -6x + 6$ ή $\psi = -2x + 2$.

Δηλαδή έχουν τον ίδιο συντελεστή του x .

Άρα οι ευθείες είναι παράλληλες προς την ευθεία με εξίσωση $y = -2x$ και επειδή τέμνουν τον άξονα $y'y$ σε διαφορετικά σημεία θα είναι μεταξύ τους παράλληλες.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ - ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

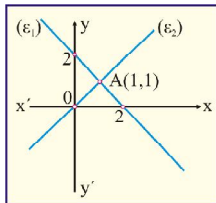
1

Να λυθεί γραφικά το παρακάτω σύστημα:

$$\begin{cases} x + \psi = 2 & (\epsilon_1) \\ x = \psi & (\epsilon_2) \end{cases}$$

Λύση

Παρατηρούμε ότι οι ευθείες (ϵ_1) και (ϵ_2) τέμνονται στο σημείο A $(1, 1)$. Άρα το ζεύγος $(1, 1)$ αποτελεί λύση του συστήματος. Πράγματι έχουμε: $1 + 1 = 2$ και $1 = 1$.

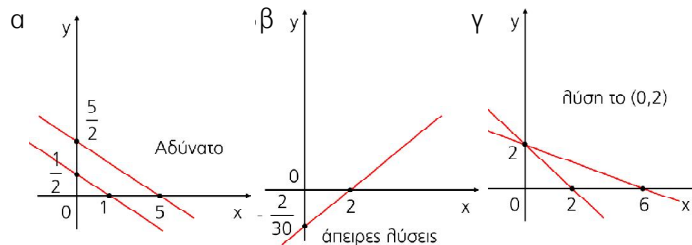


2

Να προσδιορίσετε γραφικά το πλήθος των λύσεων σε καθένα από τα παρακάτω συστήματα

$$\alpha. \begin{cases} x + 2y = 5 \\ x + 2y = 1 \end{cases} \quad \beta. \begin{cases} x - 3y = 2 \\ 2x - 6y = 4 \end{cases} \quad \gamma. \begin{cases} x + y = 2 \\ x + 3y = 6 \end{cases}$$

Λύση



ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1 Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση.

Το σύστημα $\begin{cases} x - y = 5 \\ 2x + y = 4 \end{cases}$ έχει ως λύση τις συντεταγμένες του σημείου:

α. Α(3,2) β. Β(2,3) γ. Γ(4,-1) δ. Δ(3,-2)

2 Αν οι εξισώσεις ενός γραμμικού συστήματος παριστάνονται με τις ευθείες ϵ_1 και ϵ_2 , να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα αντιστοιχίζοντας σε κάθε ζεύγος ευθειών της στήλης Α, το σωστό συμπέρασμα από τη στήλη Β.

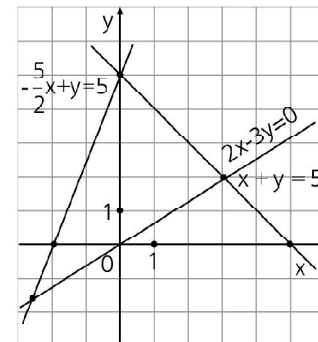
Στήλη Α	Στήλη Β
α. Οι ευθείες ϵ_1, ϵ_2 τέμνονται.	1. Το σύστημα είναι αδύνατο.
β. Οι ευθείες ϵ_1, ϵ_2 είναι παράλληλες.	2. Το σύστημα έχει μία μόνο λύση.
γ. Οι ευθείες ϵ_1, ϵ_2 συμπίπτουν.	3. Το σύστημα είναι αδύνατο.

α	β	γ

3 Με τη βοήθεια του διπλανού σχήματος να βρείτε τη λύση σε καθένα από τα παρακάτω συστήματα.

α. $\begin{cases} 2x - 3y = 0 \\ -2x + y = -4 \end{cases}$ β. $\begin{cases} 2x - 3y = 0 \\ 2x + 3y = 12 \end{cases}$

γ. $\begin{cases} y = 0 \\ -\frac{5}{2}x + y = 5 \end{cases}$ δ. $\begin{cases} x = 0 \\ x + y = 5 \end{cases}$



ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1 Να λύσετε γραφικά τα συστήματα:

α. $\begin{cases} x = 3 \\ x + y = 4 \end{cases}$

β. $\begin{cases} y = 2 \\ -2x + y = 6 \end{cases}$

γ. $\begin{cases} x + y = 0 \\ x - y = 0 \end{cases}$

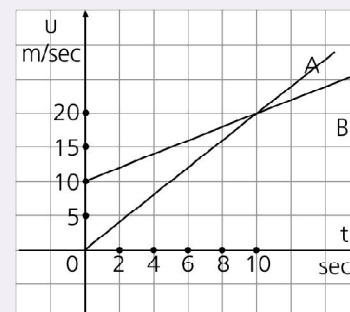
δ. $\begin{cases} 3x - y = 4 \\ x - y = 0 \end{cases}$

ε. $\begin{cases} 4x + 8y = 12 \\ 5x + 10y = 15 \end{cases}$

στ. $\begin{cases} x - 2y = 10 \\ 4x - 8y = 5 \end{cases}$

2 Στο επόμενο σχήμα φαίνεται το διάγραμμα ταχύτητας - χρόνου δύο αυτοκινήτων Α και Β.
Να βρείτε:

- α. Την αρχική ταχύτητα κάθε αυτοκινήτου.
- β. Σε πόσο χρόνο μετά την εκκίνησή τους τα δύο αυτοκίνητα θα έχουν την ίδια ταχύτητα και ποια θα είναι αυτή;



3 Αν ο Νίκος είχε πάρει 2 βαθμούς παραπάνω από τον Γιώργο στο διαγώνισμα των μαθηματικών θα είχε τον ίδιο βαθμό με τον Γιώργο. Αν ο Γιώργος είχε πάρει δύο βαθμούς παραπάνω από τον Νίκο θα είχε τον διπλάσιο βαθμό από αυτόν που πήρε στο διαγώνισμα των μαθηματικών. Τι βαθμό έγραψε ο καθένας;

4 Μπορείτε να υπολογίσετε τους συντελεστές του συστήματος $\begin{cases} \dots x + 4y = 1 \\ 2x - \dots y = 3 \end{cases}$, αν γνωρίζετε ότι το σύστημα έχει λύση $(3, 1)$;

5 Να αποδείξετε ότι τα συστήματα

$$\begin{cases} x + 2y = 5 \\ 3x - 2y = 7 \end{cases} \quad \text{και} \quad \begin{cases} x + 4y = 7 \\ -3x + 4y = -5 \end{cases} \quad \text{έχουν κοινή λύση.}$$

ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗΣ

Θέμα 1ο

A. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με (Σ), αν είναι σωστές ή με (Λ), αν είναι λανθασμένες.

α) Το ζεύγος $(2,3)$ είναι λύση της εξίσωσης $3x - y = 3$.

β) Η ευθεία $\varepsilon : 3x - 7y = 0$ διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

γ) Η εξίσωση $y = -10$ παριστάνει ευθεία παράλληλη στον άξονα $y' y$.

δ) Αν δύο ευθείες είναι παράλληλες, τότε το σύστημα των εξισώσεών τους είναι αόριστο.

(4 Μονάδες)

B. Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση:

i) Οι ευθείες $\varepsilon_1 : 2x - 3y = -1$ και $\varepsilon_2 : 3x - 4y = -1$ έχουν κοινό σημείο το

α) A(9,0)

β) B(1,1)

γ) Γ(6,-2)

δ) Δ(3,-4)

ii) Το σύστημα $\begin{cases} x + 2y = 5 \\ 2x + 4y = 10 \end{cases}$

α) έχει μία λύση, β) είναι αόριστο, γ) είναι αδύνατο

(6 Μονάδες)

Θέμα 2ο

Να λύσετε το σύστημα $\begin{cases} 3x + 5y = -4 \\ 3x + 2y = 0 \end{cases}$

(4 Μονάδες)

Θέμα 3ο

Αν οι ευθείες $\varepsilon_1 : (κ - 1)x + (η + 1)y = 10$ και $\varepsilon_2 : (κ - 2)x + ηy = 3$ τέμνονται στο σημείο $M(2,1)$, να υπολογίσετε τις τιμές των αριθμών $κ$ και $η$.

(6 Μονάδες)