

3.1 Η έννοια της γραμμικής εξίσωσης

Ερώτηση 1

Τι είναι η γραμμική εξίσωση με δύο αγνώστους και πότε παριστάνει ευθεία;

Τι ονομάζουμε λύση μιας τέτοιας εξίσωσης;

Απάντηση

Μια εξίσωση της μορφής

$$a \cdot x + \beta \cdot y = \gamma$$

όπου a, β, γ είναι γνωστοί πραγματικοί αριθμοί, λέγεται γραμμική εξίσωση με δύο αγνώστους τους x, y .

Παριστάνει ευθεία όταν $a \neq 0$ ή $\beta \neq 0$.

Κάθε ζεύγος αριθμών (x, y) που επαληθεύει την εξίσωση $a \cdot x + \beta \cdot y = \gamma$, λέγεται λύση της εξίσωσης.

Για παράδειγμα

- Η εξίσωση $2x + 4y = 20$ είναι γραμμική εξίσωση με δύο αγνώστους τους x και y . Τα ζεύγη $(2, 4)$ και $(4, 3)$ είναι λύσεις της εξίσωσης $2x + 4y = 20$, διότι :

$$2 \cdot 2 + 4 \cdot 4 = 20 \quad 2 \cdot 4 + 4 \cdot 3 = 20$$

Ερώτηση 2

Πότε ένα σημείο ανήκει σε μια ευθεία;

Απάντηση

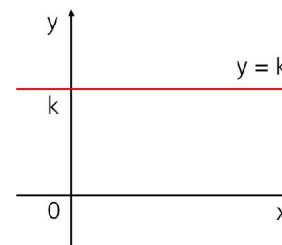
Αν οι συντεταγμένες ενός σημείου επαληθεύουν την εξίσωση μιας ευθείας, τότε το σημείο ανήκει στην ευθεία αυτή.

Ερώτηση 3

Τι παριστάνει η εξίσωση $y = k$, $k \neq 0$;

Απάντηση

Η εξίσωση $y = k$ με $k \neq 0$ παριστάνει μια ευθεία που είναι παράλληλη στον άξονα x' και τέμνει τον άξονα y' στο σημείο $(0, k)$, ενώ η εξίσωση $y = 0$ παριστάνει τον άξονα x' .

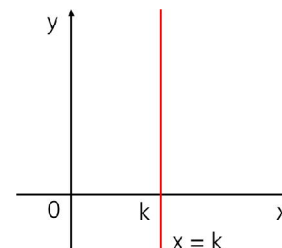


Ερώτηση 4

Τι παριστάνει η εξίσωση $x = k$, $k \neq 0$;

Απάντηση

Η εξίσωση $x = k$ με $k \neq 0$ παριστάνει μια ευθεία που είναι παράλληλη στον άξονα y' και τέμνει τον άξονα x' στο σημείο $(k, 0)$ ενώ η εξίσωση $x = 0$ παριστάνει τον άξονα y' .



ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ - ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1

- α. Να σχεδιαστεί η ευθεία: $\epsilon: 3x - 4y = 12$
 β. Ένα σημείο M έχει τεταγμένη -1. Ποια πρέπει να είναι η τετμημένη του, ώστε το σημείο να ανήκει στην ευθεία ϵ ;

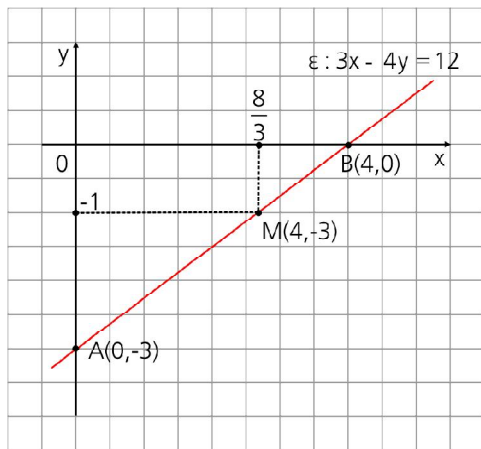
Λύση

α. Για να σχεδιάσουμε την ευθεία $\epsilon: 3x - 4y = 12$ αρκεί να προσδιορίσουμε δύο σημεία της.

Για $x = 0$ έχουμε $-4y = 12$, οπότε $y = -3$.

Για $y = 0$ έχουμε $3x = 12$, οπότε $x = 4$.

Άρα η εξίσωση $3x - 4y = 12$ παριστάνει ευθεία ϵ που διέρχεται από τα σημεία $A(0, -3)$ και $B(4, 0)$.



- β. Το σημείο M ανήκει στην ευθεία ϵ , αν οι συντεταγμένες του επαληθεύουν την εξίσωσή της. Αφού το σημείο M

έχει τεταγμένη $y = -1$ για την τετμημένη του x πρέπει να ισχύει $3x - 4(-1) = 12$ ή $3x + 4 = 12$ ή $3x = 8$ ή $x = \frac{8}{3}$.

Άρα η τετμημένη του M είναι $x = \frac{8}{3}$.

2

Αν η ευθεία $\epsilon: ax - y = 2$ διέρχεται από το σημείο $A(1, 3)$, τότε να προσδιοριστεί η τιμή του a και στη συνέχεια να βρεθούν τα κοινά σημεία της ϵ με τους άξονες.

Λύση

Η ευθεία $\epsilon: ax - y = 2$ διέρχεται από το σημείο $A(1, 3)$, οπότε οι συντεταγμένες του σημείου A επαληθεύουν την εξίσωση $ax - y = 2$. Άρα έχουμε $a - 3 = 2$ ή $a = 5$. Επομένως η ευθεία έχει εξίσωση $5x - y = 2$.

Για $x = 0$ έχουμε $5 \cdot 0 - y = 2$ ή $-y = 2$ ή $y = -2$, δηλαδή η ευθεία ϵ τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $(0, -2)$.

Για $y = 0$ έχουμε $5x - 0 = 2$ ή $5x = 2$ ή $x = \frac{2}{5}$, δηλαδή η ευθεία ϵ τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο $(\frac{2}{5}, 0)$.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

- 1 α. Η εξίσωση $2x = 3x$ έχει λύση τον αριθμό: A.0 B.1 Γ.2 Δ.3
 β. Η εξίσωση $2x - y = 1$ έχει λύση το ζεύγος: A.(2,2) B.(1,1) Γ.(0,0) Δ. καμία
 γ. Η μορφή λύσεων της εξίσωσης $x - y = 1$ είναι: A.(x,x+1) B.(x,x) Γ.(y+1,y) Δ.(y,y)

2 Ποια από τα ζεύγη $(3,2)$, $(1,4)$, $(0,5)$, $(-3,4)$, $(-2,1)$ είναι λύσεις της εξίσωσης $3x + 4y = 17$;

3 Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με (Σ), αν είναι σωστές ή με (Λ), αν είναι λανθασμένες.

α. Το σημείο $(3,-2)$ ανήκει στην ευθεία $\epsilon: 3x - y = 11$.

β. Η ευθεία $\epsilon: 4x + y = -8$ τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο $(-2,0)$.

γ. Η ευθεία $\epsilon: 3x + 4y = 0$ διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

δ. Η ευθεία $\epsilon: 2x + y = 7$ τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $(0,4)$.

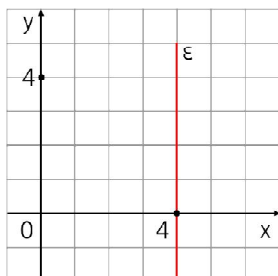
4 Να συμπληρώσετε τον πίνακα αντιστοιχίζοντας σε κάθε ευθεία ϵ των παρακάτω σχημάτων μία από τις εξισώσεις

1. $y = 4$

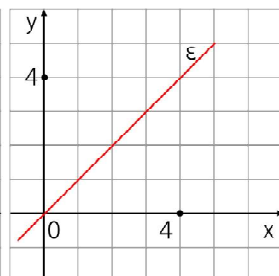
2. $x = -2$

3. $y = x$

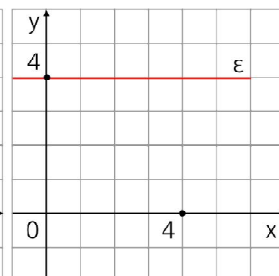
4. $x = 4$



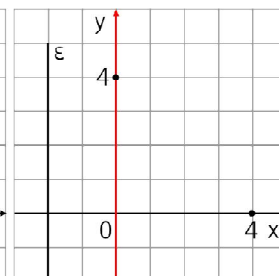
(σχήμα α)



(σχήμα β)



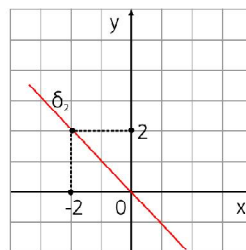
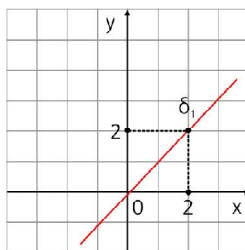
(σχήμα γ)



(σχήμα δ)

α	β	γ	δ

- 5 Οι ευθείες δ_1, δ_2 διχοτομούν τις γωνίες των αξόνων. Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση.



- i) Η εξίσωση της δ_1 είναι: α) $x = 2$ β) $y = 2$ γ) $y = x$ δ) $y = -x$
 ii) Η εξίσωση της δ_2 είναι: α) $x = -2$ β) $y = -2$ γ) $y = x$ δ) $y = -x$

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

- 1 Να σχεδιάσετε στο ίδιο σύστημα αξόνων τις ευθείες:
 α. $\epsilon_1 : 2x - y = 4$ β. $\epsilon_2 : -6x + 3y = 7$ γ. $\epsilon_3 : 8x - 4y = 13$
 Τι παρατηρείτε;
- 2 Δίνεται η ευθεία $\epsilon : 3x + 4y = 6 - 2\eta$.
 α. Να βρείτε τον αριθμό η , ώστε η ευθεία ϵ να διέρχεται από την αρχή των αξόνων.
 β. Για $\eta = 3$ να σχεδιάσετε την ευθεία ϵ .
- 3 Αν η ευθεία $\epsilon : 3x - 5y = 15$ τέμνει τους άξονες $x'x$ και $y'y$ στα σημεία A και B αντιστοίχως, τότε:
 α. Να προσδιορίσετε τις συντεταγμένες των σημείων A και B.
 β. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου OAB, όπου O η αρχή των αξόνων.
- 4 α. Στο ίδιο σύστημα αξόνων να σχεδιάσετε τις ευθείες με εξισώσεις: $x = -2$, $x = 4$, $y = -1$ και $y = 5$
 β. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τετραπλεύρου που σχηματίζεται.
- Να βρείτε την τιμή του η , ώστε η εξίσωση $(\eta + 4)x + (\eta - 2)y = 6$ να παριστάνει ευθεία που είναι:
- 5 α. παράλληλη στον άξονα $x'x$ β. παράλληλη στον άξονα $y'y$
 Να σχεδιάσετε την αντίστοιχη ευθεία σε κάθε περίπτωση.

ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗΣ

Ερώτηση 1

Ποιες είναι οι εξισώσεις των διχοτόμων των γωνιών του ορθοκανονικού συστήματος xOy ;

Ερώτηση 2

Ποια μορφή έχει μια γραμμική εξίσωση με δύο αγνώστους x, y ;

Ποιες είναι οι λύσεις μιας γραμμικής εξίσωσης;

Τι παριστάνουν στο επίπεδο οι λύσεις μιας γραμμικής εξίσωσης;

Άσκηση 1

Να βρείτε το η ώστε η εξίσωση $(\eta - 1)x + \eta(\eta - 1)y = 3$ να παριστάνει ευθεία.

Άσκηση 2

Δίνεται η εξίσωση $2x + 3y = 5$

α. Να συμπληρώσετε τον πίνακα

x		$5/2$		2
y	$5/3$		1	

β. Να παραστήσετε τις παραπάνω λύσεις με σημεία του επιπέδου.

Άσκηση 3

Να βρείτε την τιμή του η , ώστε η εξίσωση $(\eta - 2)x + (\eta - 1)y = 8$ να παριστάνει ευθεία που είναι:

α. παράλληλη στον άξονα x'

β. παράλληλη στον άξονα y'

Να σχεδιάσετε την αντίστοιχη ευθεία σε κάθε περίπτωση.