

## 2.4 Κλασματικές εξισώσεις

### Ερώτηση 1

Ποια λέμε κλασματική εξίσωση;

### Απάντηση

Αν σε μια εξίσωση υπάρχουν κλάσματα και σε ένα τουλάχιστον απ' αυτά υπάρχει άγνωστος στον παρονομαστή, η εξίσωση λέγεται κλασματική εξίσωση.

### Ερώτηση 2

Ποια βήματα ακολουθούμε για να λύσουμε μια κλασματική εξίσωση;

### Απάντηση

Όταν θέλουμε να λύσουμε μια κλασματική εξίσωση ακολουθούμε τα παρακάτω βήματα:

Παραγοντοποιούμε με τους παρονομαστές και

1. Παραγοντοποιούμε τους παρονομαστές και βρίσκουμε τις τιμές του αγνώστου που μηδενίζουν τους παρονομαστές. Αυτό γίνεται γιατί σε μια κλασματική παράσταση ο παρονομαστής δεν μπορεί να είναι ίσος με μηδέν.
2. Βρίσκουμε το Ε.Κ.Π. των παρονομαστών.
3. Πολλαπλασιάζουμε όλους τους όρους της εξίσωσης με το Ε.Κ.Π.
4. Απαλείφουμε τους παρονομαστές κάνοντας απλοποίηση. Προσέχουμε μετά την απαλοιφή οι αριθμητές των κλασμάτων να μπαίνουν μέσα σε παρένθεση (αν είναι αθροίσματα ή διαφορές).
5. Λύνουμε την εξίσωση που προκύπτει μετά την απαλοιφή των παρονομαστών. Συνήθως η εξίσωση που προκύπτει μετά την απαλοιφή των παρονομαστών είναι 1ου βαθμού ή 2ου βαθμού μ' έναν άγνωστο.
6. Ελέγχουμε αν κάποια από τις λύσεις που βρήκαμε, μηδενίζει τους παρονομαστές στο βήμα 1. Αν τυχόν συμβαίνει αυτό, τότε την απορρίπτουμε.



### Παρατήρηση

1. Είναι σημαντικό για τη σωστή επίλυση μιας κλασματικής εξίσωσης να μην ξεχνάμε, τόσο τους περιορισμούς στην αρχή (τις τιμές του αγνώστου που μηδενίζουν τους παρονομαστές), όσο και τον έλεγχο στο τέλος (αν είναι δηλαδή δεκτές όλες οι λύσεις που βρήκαμε).
2. Αν όλες οι λύσεις που βρήκαμε εξαιρούνται από τους περιορισμούς, τότε η εξίσωση είναι αδύνατη.
3. Αν βρούμε ότι η εξίσωση είναι αόριστη, τότε η κλασματική εξίσωση έχει λύσεις όλες τις πραγματικές τιμές εκτός απ' αυτές που έχουν εξαιρεθεί από τους περιορισμούς.

## ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ - ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1

Να λυθεί η εξίσωση:  $\frac{4}{x-2} + 5 = x + 3$

### Λύση

• Βρίσκουμε πρώτα τους περιορισμούς.

Πρέπει:  $x - 2 \neq 0$  δηλαδή  $x \neq 2$ .

•  $\frac{4}{x-2} + 5 = x + 3$

$$(x-2) \cdot \frac{4}{x-2} + (x-2) \cdot 5 = (x-2) \cdot (x+3)$$

[ποληλαπλασιάζουμε με το **Ε.Κ.Π. =  $x-2$** ]

$$4 + (x-2) \cdot 5 = (x-2) \cdot (x+3)$$

[κάνουμε απαλοιφή παρονομαστών]

$$4 + 5x - 10 = x^2 + 3x - 2x - 6 \quad [\text{πράξεις}]$$

$$-x^2 - 3x + 2x + 6 + 4 + 5x - 10 = 0$$

[μεταφέρουμε όλους τους όρους στο 1<sup>ο</sup> μέλος]

$$-x^2 + 4x = 0 \quad [\text{κοινός παράγοντας το } -x]$$

$$-x(x-4) = 0$$

$$-x = 0 \text{ ή } x - 4 = 0 \text{ δηλαδή } \mathbf{x = 0} \text{ ή } \mathbf{x = 4}$$

και οι δύο λύσεις είναι δεκτές, γιατί δεν εξαιρούνται λόγω περιορισμών.

2

Ένας αριθμός είναι μικρότερος από τον τριπλάσιο του αντιστρόφου του κατά 2. Να βρεθεί ο αριθμός αυτός και ο αντίστροφός του.

### Λύση

Έστω ότι ο αριθμός είναι ο  $x$  και μάλιστα  $x \neq 0$ , εφόσον έχει αντίστροφο.

Ο αντίστροφος του αριθμού είναι ο  $\frac{1}{x}$ . Ο τριπλάσιος του

αντίστροφου είναι ο  $3 \cdot \frac{1}{x} = \frac{3}{x}$ .

Επειδή ο  $x$  είναι μικρότερος από τον  $\frac{3}{x}$  κατά 2 έχουμε την εξίσωση:

$$x = \frac{3}{x} - 2 \quad [\text{πολ/με με το } \mathbf{Ε.Κ.Π. = x}]$$

$$x \cdot x = x \cdot \frac{3}{x} - x \cdot 2$$

$$x^2 = 3 - 2x \quad [\text{απαλοιφή παρονομαστή}]$$

$$x^2 + 2x - 3 = 0 \quad [\text{όλα στο 1ο μέλος}]$$

Είναι εξίσωση 2<sup>ου</sup> βαθμού με  $a = 1$ ,  $\beta = 2$ ,  $\gamma = 3$

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3) = 4 + 12 = 16.$$

$$\text{Άρα } x = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-2 \pm \sqrt{16}}{2 \cdot 1} = \frac{-2 \pm 4}{2} =$$

$$\rightarrow x_1 = \frac{-2+4}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

$$\rightarrow x_2 = \frac{-2-4}{2} = \frac{-6}{2} = -3$$

Επομένως ο αριθμός μπορεί να είναι το 1 ή το -3 και ο αντίστροφός του αντίστοιχα το 1 ή το  $-\frac{1}{3}$ .

3

Να λυθεί εξίσωση:  $\frac{1}{x} = \frac{2-x}{x+1}$

### Λύση

• Βρίσκουμε πρώτα τους περιορισμούς. Πρέπει:  $x \neq 0$  και  $x+1 \neq 0$  ή  $x \neq -1$

Άρα έχουμε:  $\mathbf{x \neq 0}$  και  $\mathbf{x \neq -1}$ .

• Όταν έχουμε ισότητα δυο κλασμάτων ποηλαπλασιάζουμε "χιαστί". Δηλαδή

$$\frac{1}{x} = \frac{2-x}{x+1} \text{ ή } x+1 = x(2-x)$$

$$x+1 = 2x - x^2 \quad [\text{επιμεριστική}]$$

$$x^2 - 2x + x + 1 = 0 \quad [\text{όλα στο 1ο μέλος}]$$

$$x^2 - x + 1 = 0 \quad [\text{αναγωγές}]$$

Έχουμε εξίσωση 2<sup>ου</sup> βαθμού με  $\mathbf{a = 1}$ ,  $\mathbf{\beta = -1}$ ,  $\mathbf{\gamma = 1}$  και

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 1 - 4 = -3$$

Επειδή  $\Delta < 0$  η εξίσωση είναι αδύνατη.

**4** Να λυθεί η εξίσωση:  $\frac{x}{x-1} + \frac{2}{2-x} = \frac{x^2 - 4x + 2}{x^2 - 3x + 2}$

**Λύση**

• Βρίσκουμε πρώτα τους περιορισμούς

Πρέπει:  $x - 1 \neq 0$ , άρα  $x \neq 1$  και  $2 - x \neq 0$ , άρα  $2 \neq x$  και  $x^2 - 3x + 2 \neq 0$  ή  $(x - 2)(x - 1) \neq 0$ , δηλαδή  $x \neq 2$  και  $x \neq 1$ .

$$\bullet \frac{x}{x-1} + \frac{2}{2-x} = \frac{x^2 - 4x + 2}{(x-2) \cdot (x-1)} \quad \text{ή} \quad \frac{x}{x-1} - \frac{2}{x-2} = \frac{x^2 - 4x + 2}{(x-2) \cdot (x-1)}$$

Πολλαπλασιάζουμε με το Ε.Κ.Π. =  $(x - 2)(x - 1)$  και έχουμε:

$$(x-2) \cdot (x-1) \cdot \frac{x}{x-1} - (x-2) \cdot (x-1) \cdot \frac{2}{x-2} =$$

$$(x-2) \cdot (x-1) \frac{x^2 - 4x + 2}{(x-2) \cdot (x-1)}$$

$$x \cdot (x-2) - (x-1) \cdot 2 = (x^2 - 4x + 2) \quad [\text{απλοποίηση}]$$

$$x^2 - 2x - 2x + 2 = x^2 - 4x + 2 \quad [\text{πράξεις}]$$

$$x^2 - 2x - 2x + 2 - x^2 + 4x - 2 = 0 \quad [\text{όλα στο 1ο μέλος}]$$

$0 \cdot x = 0$ , η οποία είναι αόριστη

Οπότε η αρχική εξίσωση επαληθεύεται για κάθε τιμή του  $x$  εκτός από  $x = 2$  και  $x = 1$  (βλέπε περιορισμούς)

**5**

Κάποιος παραγωγός υπολόγισε να εισπράξει από την πώληση του προϊόντος του στη λαϊκή 450€. Στο δρόμο για τη λαϊκή του έπεσαν 5 κούτες από το φορτηγό του, με αποτέλεσμα να καταστραφούν 50 κιλά προϊόντος. Για να μπορέσει λοιπόν να εισπράξει το ποσό που

είχε υπολογίσει αρχικά, αναγκάστηκε να αυξήσει την τιμή του προϊόντος κατά 0,3€ το κιλό. Να βρείτε πόσα κιλά προϊόντος υπήρχαν στο φορτηγό.

**Λύση**

Έστω ότι το προϊόν ήταν αρχικά  $x$  κιλά με  $x > 0$ . Αν πουλούσε όλο το προϊόν στην αγορά και εισέπραττε 450€, τότε το κάθε

κιλό θα κόστιζε  $\frac{450}{x}$  €. Τελικά όμως αυτά που πούλησε στην

αγορά ήταν  $x - 50$  κιλά προϊόντος και εισέπραξε 450€, άρα

πούλησε το κάθε κιλό  $\frac{450}{x-50}$  €. Η διαφορά στην τιμή που

είχε υπολογίσει αρχικά και την τελική ήταν  $0,3\text{€}$  ή  $\frac{3}{10}$  €.

Επομένως έχουμε την εξίσωση:  $\frac{450}{x-50} - \frac{450}{x} = \frac{3}{10}$

• Βρίσκουμε πρώτα τους περιορισμούς

Πρέπει:  $x \neq 50$  και  $x \neq 0$ , καθώς επίσης  $x > 0$  εφόσον είναι κιλά.

• Πολλαπλασιάζουμε με το Ε.Κ.Π. =  $10x(x - 50)$  και έχουμε:

$$10x \cdot (x - 50) \cdot \frac{450}{x - 50} - 10x \cdot (x - 50) \cdot \frac{450}{x} = 10x \cdot (x - 50) \cdot \frac{3}{10}$$

$$10x \cdot 450 - 10(x - 50)450 = x \cdot (x - 50) \cdot 3 \quad [\text{απλοποίηση}]$$

$$4500x - 4500x + 225000 = 3x^2 - 150x \quad [\text{πράξεις}]$$

$$-3x^2 + 150x + 4500x - 4500x + 225000 = 0$$

[όλα στο 1<sup>ο</sup> μέλος]

$$-3x^2 + 150x + 225000 = 0 \quad [\text{διαιρούμε με } -3]$$

$$x^2 - 50x - 75000 = 0$$

Η τελευταία είναι εξίσωση 2ου βαθμού με  $a = 1$ ,  $\beta = -50$ ,  $\gamma = -75000$ .

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-50)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-75000) = 2500 + 300000 = 302500$$

$$x = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{50 \pm \sqrt{302500}}{2 \cdot 1} = \frac{50 \pm 550}{2} = \begin{cases} \rightarrow x_1 = \frac{50 + 550}{2} = 300 \\ \rightarrow x_2 = \frac{50 - 550}{2} = -250 \end{cases}$$

Άρα  $x = 300$  ή  $x = -250$  (που απορρίπτεται επειδή το  $x$  παριστάνει κιλά και δεν μπορεί να είναι αρνητικός αριθμός). Άρα ο παραγωγός είχε αρχικά 300 κιλά προϊόντος.

### ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

**1** Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με (Σ), αν είναι σωστές ή με (Λ) αν είναι λανθασμένες.

α) Οι όροι της εξίσωσης  $\frac{5}{x-2} + \frac{7}{x} = 4$  ορίζονται αν  $x \neq 0$  και  $x \neq 2$ .

β) Ο αριθμός 2 είναι η λύση της εξίσωσης  $\frac{4}{x-2} + \frac{x}{x} = 4$ .

γ) Αν απαλείψουμε τους παρονομαστές της εξίσωσης  $\frac{4}{x-1} + \frac{7}{(x-1)^2} = 10$ ,

τότε αυτή γράφεται  $4x + 7 = 10$ .

δ) Οι όροι της εξίσωσης  $\frac{x^7}{x^2+4} = x^2$  ορίζονται για κάθε πραγματικό

αριθμό  $x$  και ο αριθμός 0 είναι η λύση της.

**2** Αν διαιρέσουμε έναν αριθμό  $x$  με τον αριθμό που είναι κατά δύο μονάδες μικρότερος βρίσκουμε  $\frac{2}{5}$ .

Ποια από τις παρακάτω εξισώσεις εκφράζει την παραπάνω πρόταση:

α)  $\frac{x}{2-x} = \frac{3}{4}$     β)  $\frac{x+2}{x} = \frac{3}{4}$     γ)  $\frac{x}{x+2} = \frac{3}{4}$     δ)  $\frac{x}{x-2} = \frac{2}{5}$

3 Η εξίσωση  $\frac{x+2}{x-2} + \frac{x+8}{x+2} = 3$  έχει ως λύση τον αριθμό α)  $x=2$  β)  $x=-2$  γ)  $x=0$  δ)  $x=1$

4 Ένας μαθητής για να λύσει την εξίσωση  $\frac{4x-3}{x-2} = \frac{5}{x-2}$ , έκανε απαλοιφή παρανομαστών και λύνοντας την εξίσωση  $4x-3=5$  που προέκυψε, βρήκε ως λύση τον αριθμό  $x=2$ . Η απάντηση του είναι σωστή;

### ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1 Να λυθούν οι εξισώσεις: α)  $\frac{1}{x} + \frac{2}{x^2-x} = \frac{x-6}{x^2-4x+3}$  β)  $\frac{x}{x+1} + \frac{x}{x+2} = \frac{2x^2+3x}{x^2+3x+2}$

2 Να λυθούν οι εξισώσεις: α)  $\frac{2}{x-2} - \frac{4}{x^2-4} = \frac{1}{x+2}$  β)  $\frac{1}{x^2+4x+3} = \frac{1}{x^2+5x+4}$

3 Δύο ποδηλάτες ξεκίνησαν ταυτόχρονα από το Μαραθώνα και κατευθύνθηκαν προς το Παναθηναϊκό Στάδιο, καλύπτοντας απόσταση 40 Km. Ο ένας έφθασε στο Παναθηναϊκό Στάδιο ένα τέταρτο νωρίτερα. Δεδομένου ότι ο πιο γρήγορος ποδηλάτης πήγαινε με 10 Km/h γρηγορότερα, να βρεθούν οι ταχύτητες τους. (Θεωρούμε ότι οι ταχύτητες διατηρούνται σταθερές).

4 Να λυθούν οι εξισώσεις:

α.  $\frac{4\omega+1}{\omega-2} = \frac{9}{\omega-2}$  β.  $\frac{2x+1}{x-3} = 2 - \frac{7}{3-x}$  γ.  $\frac{4}{x} - \frac{3}{x^2} = 1$  δ.  $\frac{y-1}{y} - \frac{2}{y+1} = \frac{y+3}{y(y+1)}$

5 Να λυθούν οι εξισώσεις:

α.  $\frac{x+5}{x^2-25} = \frac{3}{x+5}$  β.  $\frac{1}{a^2-2a} + \frac{a-1}{a} = \frac{a}{a-2}$  γ.  $\frac{2\omega^2}{\omega^2+2\omega} = 3 - \frac{4}{\omega+2}$  δ.  $1 + \frac{3a}{a-2} = \frac{a+4}{a^2-3a+2}$

ε.  $\frac{12}{3\rho-2} - \frac{8}{3\rho+2} - \frac{2-33\rho}{4-9\rho^2} = 0$

6 Να λυθούν οι εξισώσεις:

α.  $\frac{x}{x-\frac{4}{x}} = \frac{4}{3}$  β.  $\frac{1}{1+\frac{3}{x}} - \frac{2}{x-3} = \frac{x-6}{x^2-9}$

**7** Εάν  $A = \frac{x}{x - \frac{4}{x}}$  και  $B = \frac{4}{3}$ , να λύσετε την εξίσωση  $B - A = 0$ .

## ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗΣ

### Ερώτηση 1

Ποια εξίσωση λέγεται κλασματική;

### Ερώτηση 2

- α. Ποια βήματα ακολουθούμε για να λύσουμε μια κλασματική εξίσωση;  
β. Ποιος περιορισμός είναι απαραίτητος σε μια κλασματική εξίσωση και γιατί;

### Άσκηση 1

Οι εξισώσεις  $\frac{1}{x+3} + \frac{1}{x-3} = \frac{12}{x^2-9}$  και  $(x+3) + (x-3) = 12$  έχουν ακριβώς τις ίδιες λύσεις;

### Άσκηση 2

Να λυθεί η εξίσωση: 
$$\frac{x-1}{x-2} = \frac{1}{x^2-5x+6} - \frac{x}{x-3}$$

### Άσκηση 3

Να λυθεί η εξίσωση: 
$$\frac{2}{y+1} - \frac{2}{y} = \frac{1}{y^2} - \frac{3}{(y+1)^2}$$