

2.5 Ανισότητες - Ανισώσεις με έναν άγνωστο

Ερώτηση 1

Πως συγκρίνουμε δύο πραγματικούς αριθμούς a και b ;

Απάντηση

Ο αριθμός a είναι **μεγαλύτερος** από τον b , όταν και μόνον όταν, η διαφορά $a - b$ είναι θετικός αριθμός.

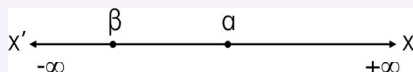
Δηλαδή $a > b$, όταν και μόνον όταν, $a - b > 0$

Ο αριθμός a είναι **μικρότερος** από τον b , όταν και μόνον όταν, η διαφορά $a - b$ είναι αρνητικός αριθμός.

Δηλαδή $a < b$, όταν και μόνον όταν, $a - b < 0$



Αν $a > b$ τότε ο αριθμός a βρίσκεται δεξιότερα από τον αριθμό b πάνω στον άξονα των πραγματικών αριθμών.



Ερώτηση 2

Ποιες ιδιότητες ανισοτήτων γνωρίζετε; Να τις αποδείξετε.

Απάντηση

1. Αν προσθέσουμε και στα δύο μέλη μιας ανισότητας τον ίδιο αριθμό, προκύπτει ανισότητα με την ίδια φορά. Δηλαδή: αν $a > b$ τότε $a + \gamma > b + \gamma$

Απόδειξη:

Θέλουμε να συγκρίνουμε τους αριθμούς $a + \gamma$ και $b + \gamma$. Σύμφωνα με τον ορισμό αν η διαφορά $(a + \gamma) - (b + \gamma)$ είναι θετικός αριθμός τότε ο $a + \gamma$ θα είναι μεγαλύτερος από τον $b + \gamma$.

Είναι $(a + \gamma) - (b + \gamma) = a + \gamma - b - \gamma = a - b > 0$ διότι $a > b$. Συνεπώς $a + \gamma > b + \gamma$.

2. Αν προσθέσουμε κατά μέλη δύο ή περισσότερες ανισότητες της ίδιας φοράς, προκύπτει ανισότητα της ίδιας φοράς. Δηλαδή αν $a > b$ και $\gamma > \delta$ τότε $a + \gamma > b + \delta$

Απόδειξη:

Όπως και προηγουμένως σχηματίζουμε τη διαφορά:

$$(a + \gamma) - (b + \delta) = a + \gamma - b - \delta = (a - b) + (\gamma - \delta) > 0$$

ως άθροισμα θετικών. Έτσι είναι $a + \gamma > b + \delta$.

3. Αν πολλαπλασιάσουμε τα μέλη μιας ισότητας με θετικό αριθμό, τότε προκύπτει ανισότητα της ίδιας φοράς. Δηλαδή: αν $a > b$ και $\gamma > 0$ τότε: $a \cdot \gamma > b \cdot \gamma$

Απόδειξη:

$a\gamma - b\gamma = \gamma(a - b) > 0$, διότι $\gamma > 0$ και $a - b > 0$. Έτσι $a\gamma > b\gamma$

4. Αν πολλαπλασιάσουμε τα μέλη μιας ανισότητας με αρνητικό αριθμό, τότε προκύπτει ανισότητα αντίθετης φοράς. Δηλαδή: αν $a > b$ και $\gamma < 0$ τότε $a\gamma < b\gamma$.

Απόδειξη:

$a\gamma - b\gamma = \gamma(a - b) < 0$, διότι $\gamma < 0$ και $a > b$ άρα $a - b > 0$. Έτσι $a\gamma < b\gamma$.



Εφαρμογή των ιδιοτήτων των ανισοτήτων βρίσκουμε στη λύση ανισώσεων. Ιδιαίτερη προσοχή πρέπει να δοθεί όταν λύνουμε μία ανίσωση, στο σημείο που διαιρούμε με τον συντελεστή του αγνώστου. Αν αυτός είναι αρνητικός διαιρούμε και αλλάζουμε τη φορά της ανίσωσης.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ - ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1 Αν a, β, γ είναι πραγματικοί αριθμοί και $a > \beta$ να συγκρίνετε τους αριθμούς $3a + 4\gamma$ και $3\beta + 4\gamma$.

Λύση

Αφού $a > \beta$ τότε $3a > 3\beta$ (1)
(πολλαπλασιάσαμε και τα δύο μέλη της δεδομένης ανίσωσης με το θετικό αριθμό 3.

Στην σχέση (1) προσθέτουμε και στα δύο μέλη τον αριθμό 4γ και έχουμε: $3a + 4\gamma > 3\beta + 4\gamma$

Επομένως ο $3a + 4\gamma$ είναι μεγαλύτερος του $3\beta + 4\gamma$.

2 Αν $a < 0$, να διατάξετε από τον μικρότερο προς τον μεγαλύτερο τους αριθμούς $a, \frac{1}{3}a$ και $a - 3$.

Λύση

Για να συγκρίνουμε τους αριθμούς $a, \frac{1}{3}a$ σχηματίζουμε τη

διαφορά: $a - \frac{1}{3}a$

$$a - \frac{1}{3}a = \frac{3a - a}{3} = \frac{2a}{3} < 0$$

(διότι $a < 0$ άρα $\frac{2}{3}a < 0$).

Έτσι $a < \frac{1}{3}a$ (1). Όμοια θα συγκρίνουμε τους αριθμούς $a, a - 3$.

Έχουμε $(a - 3) - a = a - 3 - a = -3 < 0$.

Άρα $a - 3 < a$ (2). Από τις σχέσεις (1) και (2) έχουμε: $a - 3 < a < \frac{1}{3}a$.

3 Να λύσετε την ανίσωση: $\frac{2x+2}{3} + 1 \geq \frac{x}{2} - \frac{x-3}{4}$

Λύση

$$\frac{2x+2}{3} + 1 \geq \frac{x}{2} - \frac{x-3}{4}$$

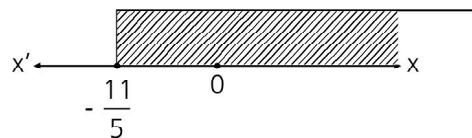
(Πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη με το ΕΚΠ $(2, 3, 4) = 12$)

$$12 \cdot \frac{2x+2}{3} + 12 \cdot 1 \geq 12 \cdot \frac{x}{2} - 12 \cdot \frac{x-3}{4} \quad \text{ή}$$

$$4(2x+2) + 12 \geq 6x - 3(x-3) \quad \text{ή}$$

$$8x + 8 + 12 \geq 6x - 3x + 9 \quad \text{ή} \quad 8x - 6x + 3x \geq 9 - 8 - 12 \quad \text{ή}$$

$$5x \geq -11 \quad \text{ή} \quad \frac{5x}{5} \geq \frac{-11}{5} \quad \text{ή} \quad x \geq -\frac{11}{5}$$



4 Να λύσετε την ανίσωση:

$$5(x-2) + 5 - 9x > -1 - 4x$$

Λύση

$$5(x-2) + 5 - 9x > -1 - 4x \quad \text{ή} \quad 5x - 10 + 5 - 9x > -1 - 4x \quad \text{ή}$$

$$5x - 9x + 4x > -1 + 10 - 5 \quad \text{ή} \quad 0x > 4$$

Η ανίσωση είναι αδύνατη, γιατί δεν υπάρχει αριθμός που να την επαληθεύει, αφού ο $0x$ ισούται με 0 που δεν είναι μεγαλύτερος του 4.

5

Να βρείτε τις κοινές λύσεις των ανισώσεων:

$$2(x-4)+6x-8 \geq 3(2x-4)+10 \quad \text{και}$$

$$-2(x-1)+3x-4(x-2) > -2x+1$$

Λύση

Λύνουμε αρχικά κάθε ανίσωση χωριστά.

$$2(x-4)+6x-8 \geq 3(2x-4)+10 \quad \text{ή}$$

$$2x-8+6x-8 \geq 6x-12+10 \quad \text{ή}$$

$$2x+6x-6x \geq -12+10+8+8 \quad \text{ή}$$

$$2x \geq 14 \quad \text{ή}$$

$$x \geq 7$$

και

$$-2(x-1)+3x-4(x-2) > -2x+1 \quad \text{ή}$$

$$-2x+2+3x-4x+8 > -2x+1 \quad \text{ή}$$

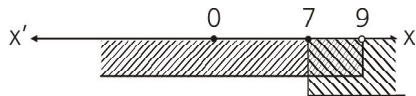
$$-2x+3x-4x+2x > -2-8+1 \quad \text{ή}$$

$$-x > -9 \quad \text{ή}$$

$$x < 9$$

Σημειώνουμε στον ίδιο άξονα τις παραπάνω λύσεις:

Κοινές λύσεις είναι όλοι οι πραγματικοί αριθμοί που είναι μεγαλύτεροι ή ίσοι του 7 και μικρότεροι από τον 9.



6

Αν $x > 3$ και $y < 2$, τότε να αποδείξετε ότι:

$$\text{α) } (x-3)(y-2) < 0 \quad \text{β) } xy+6 < 2x+3y$$

Λύση

$$\text{α) } x-3 > 0 \quad \text{και} \quad y-2 < 0 \quad \text{άρα} \quad (x-3)(y-2) < 0$$

$$\text{β) } xy+6 < 2x+3y \quad \text{ή}$$

$$xy-2x+6-3y < 0 \quad \text{ή}$$

$$x(y-2)-3(y-2) < 0 \quad \text{ή}$$

$$(x-3)(y-2) < 0, \quad \text{που ισχύει}$$

7

Να αποδείξετε ότι:

$$\text{α) Αν } x > 0, \text{ τότε } x + \frac{1}{x} \geq 2 \quad \text{β) Αν } x < 0,$$

$$\text{τότε } x + \frac{1}{x} \leq -2$$

Λύση

$$\text{α) Αρκεί } x^2+1 \geq 2x \quad \text{ή}$$

$$x^2-2x+1 \geq 0 \quad \text{ή} \quad (x-1)^2 \geq 0, \quad \text{που ισχύει}$$

$$\text{β) Αρκεί } x^2+1 \geq -2x \quad \text{ή} \quad x^2+2x+1 \geq 0$$

$$(x+1)^2 \geq 0, \quad \text{που ισχύει}$$

8

Να βρείτε τις κοινές λύσεις των ανισώσεων:

$$\text{α) } \begin{cases} 7x-1 < 8+6x \\ 3x-2 > x-10 \end{cases} \quad \text{β) } \begin{cases} 2x+5 < \frac{x}{2}+2 \\ \frac{x-1}{2}+1 > x+\frac{1}{3} \end{cases}$$

Λύση

$$\text{α) } 7x-1 < 8+6x \quad \text{ή}$$

$$7x-6x < 8+1 \quad \text{ή}$$

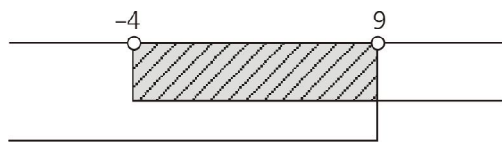
$$x < 9$$

$$3x-2 > x-10 \quad \text{ή}$$

$$3x-x > -10+2 \quad \text{ή}$$

$$2x > -8 \quad \text{ή}$$

$$x > -4$$



$$-4 < x < 9$$

$$\beta) 2x + 5 < \frac{x}{2} + 2$$

$$\frac{x-1}{2} + 1 > x + \frac{1}{3}$$

$$4x + 10 < x + 4$$

$$3(x-1) + 6 > 6x + 2$$

$$3x < -6$$

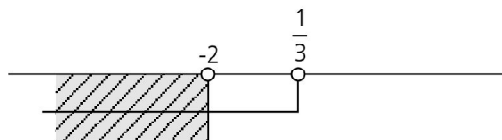
$$3x - 3 + 6 > 6x + 2$$

$$x < -2$$

$$3x - 6x > 2 - 6 + 3$$

$$-3x > -1$$

$$x < \frac{1}{3}$$



$$x < -2$$

9

Να υπολογίσετε τους πραγματικούς αριθμούς α , β , γ που ικανοποιούν τη σχέση

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - 2\alpha - 4\beta - 6\gamma + 14 = 0$$

(Διαγωνισμός Ε.Μ.Ε. 1995).

Λύση

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - 2\alpha - 4\beta - 6\gamma + 14 = 0 \text{ ή}$$

$$\alpha^2 - 2\alpha + 1 + \beta^2 - 4\beta + 4 + \gamma^2 - 6\gamma + 9 = 0 \text{ ή}$$

$$(\alpha - 1)^2 + (\beta - 2)^2 + (\gamma - 3)^2 = 0$$

Πρέπει: $\alpha - 1 = 0$ και $\beta - 2 = 0$ και $\gamma - 3 = 0$ ή

$$\alpha = 1, \beta = 2, \gamma = 3$$

10

Να προσδιορίσετε την ελάχιστη τιμή της παράστασης

$$A = \alpha^2 - 10\alpha\beta + 27\beta^2 - 8\beta + 8$$

Για ποιες τιμές των α , β η παράσταση A γίνεται ελάχιστη;

(Διαγωνισμός Ε.Μ.Ε. 2001).

Λύση

$$\text{Είναι: } A = \alpha^2 - 2 \cdot 5\alpha\beta + 25\beta^2 - 8\beta + 2\beta^2 + 8$$

$$= (\alpha - 5\beta)^2 + 2(\beta^2 - 4\beta + 4)$$

$$= (\alpha - 5\beta)^2 + 2(\beta - 2)^2 \geq 0.$$

Άρα η ελάχιστη τιμή προκύπτει για:

$$\alpha - 5\beta = 0 \text{ και } \beta - 2 = 0 \text{ ή}$$

$$\alpha = 10 \text{ και } \beta = 2.$$

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1 Να σημειώσετε το Σ (σωστή) ή το Λ (λανθασμένη) σε καθεμία από τις παρακάτω προτάσεις:

- α. Αν $a < \beta$ τότε $-2a > -2\beta$.
 β. Για κάθε πραγματικό αριθμό a ισχύει $a^2 > 0$.
 γ. Αν $a < \beta$ τότε $a + \gamma < \beta + \gamma$.
 δ. Αν $a \cdot \beta > 1$ τότε $a > \frac{1}{\beta}$ με $\beta \neq 0$.
 ε. Αν $a > \beta$ τότε $a - \gamma > \beta - \gamma$.

2 Αν $2a + \beta < 4$ και $4a - \beta < 8$ τότε:

- α. $a > 2$ β. $a < 8$ γ. $a > 0$ δ. $a < 2$

3 Αν $x > 3$ ποια από τις ακόλουθες ανισώσεις είναι λάθος;

- α. $x + 3 > 3 + 3$ β. $x - 3 > 3 - 3$ γ. $3 - x > -3 + 3$ δ. $3x > 3 \cdot 3$

4 Να συμπληρώσετε τα κενά στις παρακάτω προτάσεις με το σωστό σύμβολο ανισότητας.

- α. $a < \beta \Leftrightarrow a - \beta \dots 0$ β. $a < \beta$ τότε $-\frac{1}{2}a \dots -\frac{1}{2}\beta$
 γ. Αν $\gamma < 0$ και $a < \beta$ τότε $a\gamma \dots \beta\gamma$ δ. $a < 0$ και $\beta > 0$ τότε $a - \beta \dots 0$

5 Να συμπληρώσετε τα κενά στις παρακάτω προτάσεις:

- α. Ένας αριθμός a είναι από έναν αριθμό β όταν $a - \beta < 0$.
 β. Κάθε θετικός αριθμός είναι από κάθε αρνητικό.
 γ. Κάθε αριθμός που είναι μικρότερος από το μηδέν λέγεται αριθμός.

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1 Αν $2 < x < 5$ και $-1 < y < 4$ να βρείτε μεταξύ ποιων αριθμών περιέχονται οι τιμές των παραστάσεων:

α. $x+2$ β. $y-1$ γ. $-x$ δ. $x+y$ ε. $2x-y$

2 Να λύσετε την ανίσωση: $\frac{4x-1}{5} - \frac{1}{2} > \frac{2x-1}{10} - \frac{4-x}{2}$

3 Να λύσετε την ανίσωση: $6x+4 > 13+2(3x-10)$

4 Αν για το μήκος a ενός ορθογωνίου παραλληλόγραμμου ΑΒΓΔ γνωρίζουμε ότι $2,5 < a < 2,6$ και το πλάτος του β είναι 1,3, μεταξύ ποιών αριθμών βρίσκεται το εμβαδόν του;

5 Να λύσετε τις ανισώσεις: α. $\frac{x-1}{2} - \frac{-3x+4}{6} > \frac{x+2}{4}$ β. $\frac{x+1}{3} - \frac{2(x+4)}{5} < 1$

6 Να βρείτε τις κοινές λύσεις των ανισώσεων :

$$2(x-1) - 4(x+2) > x+7 \quad \text{και} \quad -2(x+3) + 2x - 12 < x+4$$

ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗΣ

Ερώτηση 1

Πως συγκρίνουμε δύο πραγματικούς αριθμούς a και β ; Ποιες ιδιότητες ανισοτήτων γνωρίζετε;

Άσκηση 1

Αν $2x - y < 4$ και $x + y < 8$ τότε:

α. $x > 4$ β. $x < 4$ γ. $y > 0$ δ. $x + y + 1$

Άσκηση 2

Έστω ότι ισχύει: $(x-y) \cdot (x^2+4) > 0$, τότε: α. $x < y$ β. $x = y$ γ. $x > y$ δ. κανένα από τα προηγούμενα