

2.3 Προβλήματα εξισώσεων δευτέρου βαθμού

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ - ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1

Να βρείτε δύο διαδοχικούς ακέραιους με άθροισμα τετραγώνων 61.

Λύση

Έστω x και $x-1$ οι ακέραιοι, τότε: $x^2 + (x-1)^2 = 61$ ή

$$2x^2 - 2x - 60 = 0 \text{ ή } x^2 - x - 30 = 0 \text{ ή } x = \frac{1 \pm 11}{2} \rightarrow \begin{cases} x_1 = 6 \\ x_2 = -5 \end{cases}$$

Άρα οι ζητούμενοι αριθμοί είναι οι: 6 και 5 ή -5 και -6.

2

Να βρεθούν δύο διαδοχικοί περιττοί με άθροισμα τετραγώνων 74.

Λύση

Έστω $2x-1$ και $2x+1$ οι περιττοί, τότε: $(2x-1)^2 + (2x+1)^2 = 74$

$$\text{ή } 8x^2 + 2 = 74 \text{ ή } 8x^2 = 72 \text{ ή } x^2 = 9 \text{ ή } x = 3 \text{ ή } x = -3.$$

Τότε οι αριθμοί είναι οι: 5 και 7 ή -5 και -7.

3

Βρείτε τρεις διαδοχικούς ακέραιους, για τους οποίους γνωρίζετε ότι το άθροισμα τους και το γινόμενό τους είναι ίσα.

Λύση

Έστω $x-1$, x και $x+1$ οι διαδοχικοί ακέραιοι.

$$\text{Τότε: } (x-1) + x + (x+1) = x(x-1)(x+1) \text{ ή}$$

$$3x = x(x^2 - 1) \text{ ή } (x^2 - 1 - 3)x = 0 \text{ ή } x(x-2)(x+2) = 0$$

$x = 0$ ή $x = 2$ ή $x = -2$, άρα οι αριθμοί είναι οι: -1, 0, 1 ή 1, 2, 3 ή -3, -2, -1.

4

Να βρείτε δύο αριθμούς με άθροισμα 7 και γινόμενο 12.

Λύση

Αν x είναι ο ένας αριθμός, τότε ο άλλος θα είναι ο $7-x$, αφού έχουν άθροισμα 7. Επειδή επιπλέον ο x και ο $7-x$ έχουν γινόμενο 12, είναι: $x \cdot (7-x) = 12$ ή $7x - x^2 = 12$ ή $-x^2 + 7x - 12 = 0$ ή $-(x^2 - 7x + 12) = 0$,

οπότε $x^2 - 7x + 12 = 0$, με $a = 1$, $\beta = -7$, $\gamma = 12$.

$$\text{Είναι } \Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-7)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 12 = 49 - 48 = 1 > 0$$

$$x = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{7 \pm \sqrt{1}}{2 \cdot 1} = \frac{7 \pm 1}{2} \rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{7+1}{2} = \frac{8}{2} = 4 \\ x_2 = \frac{7-1}{2} = \frac{6}{2} = 3 \end{cases}$$

Επομένως $x = 4$ ή $x = 3$

• Για $x = 4$, $7 - x = 7 - 4 = 3$

• Για $x = 3$, $7 - x = 7 - 3 = 4$

Οπότε οι δύο αριθμοί είναι οι 4 και 3.

5

Σε ένα ισοσκελές και ορθογώνιο τρίγωνο, η υποτείνουσα είναι μεγαλύτερη από την κάθετη πλευρά κατά 2. Να βρεθούν η υποτείνουσα και οι κάθετες πλευρές.

Λύση

Εάν x με $x > 0$ είναι κάθε μία από τις κάθετες πλευρές (είναι ίσες) και $x+2$ η υποτείνουσα, αφού είναι κατά 2 μεγαλύτερη

ρη, εφαρμόζοντας το πυθαγόρειο θεώρημα έχουμε:

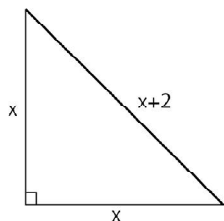
$$(x+2)^2 = x^2 + x^2$$

$$x^2 + 4x + 4 = x^2 + x^2$$

$$x^2 + 4x + 4 - x^2 - x^2 = 0$$

$$-x^2 + 4x + 4 = 0$$

$$-(x^2 - 4x - 4) = 0 \text{ ή } x^2 - 4x - 4 = 0, \text{ με } \alpha = 1, \beta = -4, \gamma = -4.$$



$$\text{Είναι } \Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-4) = 16 + 16 = 32$$

$$\text{οπότε } x = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{4 \pm \sqrt{32}}{2 \cdot 1} = \frac{4 \pm \sqrt{16 \cdot 2}}{2} = \frac{4 \pm 4\sqrt{2}}{2} =$$

$$\begin{aligned} \rightarrow x_1 &= \frac{4 + 4\sqrt{2}}{2} = \frac{4(1 + \sqrt{2})}{2} = \\ &= 2 \cdot (1 + \sqrt{2}) = 2 + 2\sqrt{2} \end{aligned}$$

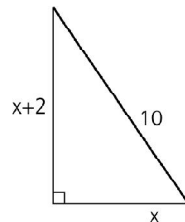
$$\begin{aligned} \rightarrow x_2 &= \frac{4 - 4\sqrt{2}}{2} = \frac{4(1 - \sqrt{2})}{2} \\ &= 2(1 - \sqrt{2}) < 0 \quad (\text{απορρίπτεται} \\ &\quad \text{δίοτι } x > 0) \end{aligned}$$

Επομένως $x = 2 + 2\sqrt{2}$, είναι η καθεμία από τις κάθετες πλευρές και $x + 2 = 2 + 2\sqrt{2} + 2 = 4 + 2\sqrt{2}$ είναι η υποτείνουσα.

6

Σε ένα ορθογώνιο τρίγωνο με υποτείνουσα 10 cm, η μία κάθετη πλευρά είναι μεγαλύτερη από την άλλη κατά 2 cm. Να βρεθούν οι κάθετες πλευρές του τριγώνου.

Λύση



Σύμφωνα με το πυθαγόρειο θεώρημα ισχύει:

$$x^2 + (x+2)^2 = 10^2 \text{ ή } 2x^2 + 4x + 4 = 100 \text{ ή } x^2 + 2x - 48 = 0$$

Η διακρίνουσα είναι $\Delta = 2^2 - 4 \cdot (-48) = 196$

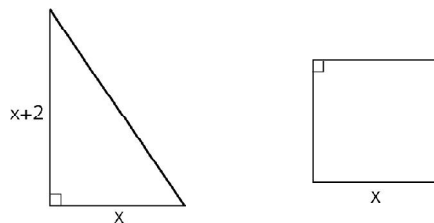
$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{196}}{2} = \frac{-2 \pm 14}{2} \begin{cases} \rightarrow x_1 = \frac{-2 + 14}{2} = 6 \\ \rightarrow x_2 = \frac{-2 - 14}{2} = -8 \text{ (απορρίπτεται)} \end{cases}$$

Άρα η κάθετες πλευρές του τριγώνου έχουν μήκος: 6cm και 8cm.

7

Το ορθογώνιο τρίγωνο και το τετράγωνο του παρακάτω σχήματος, έχουν το ίδιο εμβαδό. Να υπολογίσετε το x .

Λύση



$$\text{Πρέπει } \frac{x(x+2)}{2} = x^2 \quad \text{ή} \quad x(x+2) = 2x^2 \quad \text{ή} \quad x[(x+2) - 2x] = 0 \quad \text{ή} \quad x(2-x) = 0$$

$x = 0$ (απορρίπτεται) ή $x = 2$. Άρα $x = 2$

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

- 1 Να βρείτε δύο αριθμούς, εάν γνωρίζετε ότι έχουν διαφορά 1 ενώ οι αντίστροφοί τους έχουν άθροισμα $\frac{7}{12}$.
- 2 Έστω η εξίσωση $x^2 - 2ax + a^2 = 0$. Εάν γνωρίζετε πως η ρίζα της παραπάνω εξίσωσης και ο αντίστροφός της έχουν άθροισμα $\frac{5}{2}$, να βρείτε την τιμή του a .
- 3 Η χωρητικότητα ενός δοχείου λαδιού είναι 10 λίτρα. Αν το δοχείο έχει σχήμα ορθογωνίου παραλληλεπίπεδου με ύψος 2,5dm και βάση τετράγωνο, να βρείτε το μήκος της πλευράς της βάσης του. (1 λίτρο = 1dm³).
- 4 Ένα οικόπεδο έχει σχήμα ορθογωνίου με εμβαδόν 150m². Αν το μήκος του είναι 5m μεγαλύτερο από το πλάτος του, να βρείτε πόσα μέτρα συρματοπλέγμα χρειάζονται για την περιφράξή του.
- 5 Ένα τρίγωνο έχει πλευρές 4cm, 6cm και 8cm. Αν κάθε πλευρά του ήταν μεγαλύτερη κατά x cm, τότε το τρίγωνο θα ήταν ορθογώνιο. Να βρείτε τον αριθμό x .
- 6 Μια δεξαμενή αδειάζει με τη βοήθεια δύο βρυσών. Να βρεθεί σε πόσο χρόνο αδειάζει η κάθε μία βρύση τη δεξαμενή, αν είναι γνωστό πως αν είναι ανοικτές και οι δύο τότε την αδειάζουν σε 18 ώρες, ενώ μόνη της η μια βρύση χρειάζεται 27 ώρες λιγότερες, από τις ώρες που χρειάζεται μόνη της η άλλη βρύση, για να την αδειάσει.
- 7 Ένα υπεραστικό λεωφορείο εκτελεί το δρομολόγιο Αθήνα - Σπάρτη. Ο οδηγός μαθαίνει πως αν αυξήσει τη ταχύτητά του κατά 14 Km / h, τότε θα διανύσει την απόσταση σε 1/2 ώρες γρηγορότερα. Να βρείτε την ταχύτητα του λεωφορείου, εάν γνωρίζεται ότι η απόσταση Αθήνα - Σπάρτη είναι 210 Km.