2.2 Εξισώσεις 2ου βαθμού

Ερώτηση 1

Ποια εξίσωση λέγεται εξίσωση 2ου βαθμού μ' έναν ά-γνωστο ή αλλιώς δευτεροβάθμια εξίσωση;
Ποιοι είναι οι όροι της;
Τι είναι η επίλυση μιας τέτοιας εξίσωσης;

Απάντηση

Μια εξίσωση μ' έναν άγνωστο, όπου η μεγαλύτερη δύναμη του αγνώστου είναι η 2^{n} δύναμη, λέγεται **εξίσωση $2^{ου}$ βαθμού μ' έναν άγνωστο ή δευτεροβάθμια εξίσωση**. Όταν μεταφέρουμε όλους τους όρους της στο πρώτο μέλος και κάνουμε τις αναγωγές, η εξίσωση παίρνει τη μορφή **$\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$ με $\alpha\neq 0$ και α, β, γ πραγματικούς αριθμούς.**
Μια εξίσωση $2^{ου}$ βαθμού έχει γενική μορφή :

$$\alpha x^2+\beta x+\gamma=0,\ \text{με}\ \ \alpha\neq 0$$

γ είναι ο σταθερός όρος, βx είναι ο πρωτοβάθμιος όρος, αx^2 *είναι ο δευτεροβάθμιος όρος αυτής*.

Η διαδικασία με την οποία βρίσκουμε τις τιμές του αγνώστου που επαληθεύουν την εξίσωση, λέγεται **επίλυση** της εξίσωσης.

Α. Επίλυση εξισώσεων δευτέρου βαθμού με ανάλυση σε γινόμενο παραγόντων

Μια βασική ιδιότητα στην οποία βασίζεται η επίλυση μιας δευτεροβάθμιας εξίσωσης είναι:
$\alpha\cdot\beta=0$ αν και μόνον αν $\alpha=0$ ή $\beta=0$. Δηλαδή ένα γινόμενο είναι ίσο με το μηδέν αν και μόνον αν κάποιος όρος του γινομένου είναι ίσος με μηδέν.

Ερώτηση 2

Πως λύνουμε μια δευτεροβάθμια εξίσωση, όταν έχει την ελλειπή μορφή $\alpha x^2+\beta x=0$ με $\alpha,\beta\neq 0$, δηλαδή όταν $\gamma=0$ και $\beta\neq 0$.

Απάντηση

$\alpha x^2+\beta x=0$ ή $x\cdot(\alpha x+\beta)=0$ (βγάλαμε κοινό παράγοντα τον άγνωστο)

$x=0$ ή $\alpha x+\beta=0$ (λόγω της ιδιότητας $\alpha\cdot\beta=0$ αν και μόνον αν $\alpha=0$ ή $\beta=0$)

$x=0$ ή $\alpha x=-\beta$ (χωρίσαμε γνωστούς από αγνώστους)

$x=0$ ή $x=-\dfrac{\beta}{\alpha}$ (διαιρούμε με το συντελεστή του αγνώστου, $\alpha\neq 0$)

Θα λύσουμε την εξίσωση: $3x^2-4x=0$. Η εξίσωση $3x^2-4x=0$ γράφεται: $x(3x-4)=0$.

Άρα $x=0$ ή $3x-4=0$

$x=0$ ή $3x=4$

$x=0$ ή $x=\dfrac{4}{3}$

Μια δευτεροβάθμια εξίσωση με την ελλειπή μορφή $\alpha x^2+\beta x=0$ με $\alpha,\beta\neq 0$ έχει δύο λύσεις, μία εκ των οποίων είναι το μηδέν.

Ερώτηση 3

Πως λύνουμε μια δευτεροβάθμια εξίσωση, όταν έχει την ελλειπή μορφή $\alpha x^2+\gamma=0$ με $\alpha,\gamma\neq 0$, δηλαδή όταν $\beta=0$ και $\gamma\neq 0$;

Απάντηση

$\alpha x^2+\gamma=0$

$\alpha x^2=-\gamma$ (χωρίζουμε το σταθερό όρο από το δευτεροβάθμιο)

$x^2=-\dfrac{\gamma}{\alpha}$ (διαιρούμε με το συντελεστή του δευτεροβάθμιου όρου, $\alpha\neq 0$)

Σε αυτό το βήμα κοιτάμε τον αριθμό $-\dfrac{\gamma}{\alpha}$ στο δεύτερο μέλος της εξίσωσης.

- **Αν $-\dfrac{\gamma}{\alpha}<0$, η εξίσωση είναι αδύνατη.**
- **Αν $-\dfrac{\gamma}{\alpha}>0$, η εξίσωση έχει δύο λύσεις που είναι:**

$$x_1=\sqrt{-\frac{\gamma}{\alpha}}\ ,\quad x_2=-\sqrt{-\frac{\gamma}{\alpha}}$$

π.χ.

1. Θα λύσουμε την εξίσωση $2x^2+5=0$:

$2x^2+5=0$

$2x^2=-5$

$x^2=-\dfrac{5}{2}$, που είναι αδύνατη αφού $-\dfrac{5}{2}<0$.

2. Θα λύσουμε την εξίσωση $4x^2-1=0$:

$4x^2-1=0$

$4x^2=1$

$x^2=\dfrac{1}{4}$, επειδή $\dfrac{1}{4}>0$ έχουμε δύο λύσεις που είναι:

$x_1=\sqrt{\dfrac{1}{4}}$, $x_2=-\sqrt{\dfrac{1}{4}}$ ή $x_1=\dfrac{1}{2}$, $x_2=-\dfrac{1}{2}$

Μια δευτεροβάθμια εξίσωση με την ελλειπή μορφή $\alpha x^2+\gamma=0$ με $\alpha,\gamma\neq 0$
- είναι αδύνατη, όταν α, γ είναι ομόσημοι (παράδειγμα 1)
- έχει δύο λύσεις, όταν α, γ είναι ετερόσημοι (παράδειγμα 2).

Ερώτηση 4

Πως λύνουμε μια δευτεροβάθμια εξίσωση, όταν έχει την πλήρη μορφή $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$ με $\alpha,\beta,\gamma\neq 0$;

Απάντηση

Η επίλυση της δευτεροβάθμιας $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$ με $\alpha,\beta,\gamma\neq 0$, βασίζεται στην μέθοδο συμπλήρωσης τετραγώνου, που παρουσιάζεται αναλυτικά πιο κάτω:

- Πολλαπλασιάζουμε όλους τους όρους της εξίσωσης με 4α, όπου α ο συντελεστής του x^2.
- Μεταφέρουμε στο β' μέλος το σταθερό όρο και στο α' μέλος δημιουργούμε παράσταση της μορφής $\alpha^2+2\alpha\beta$ ή $\alpha^2-2\alpha\beta$.
- Για να συμπληρωθεί το ανάπτυγμα τετραγώνου προσθέτουμε και στα δύο μέλη το β^2.
- Χρησιμοποιούμε μία από τις ταυτότητες

$$\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2=(\alpha+\beta)^2$$
$$\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2=(\alpha-\beta)^2$$

Θα λύσουμε την εξίσωση $2x^2-6x+4=0$:

$2x^2-6x+4=0$ Εδώ είναι $\begin{cases}\alpha=2\\ \beta=-6\\ \gamma=4\end{cases}$

$16x^2-48x+32=0$ [πολ/ζουμε με $4\cdot 2=8$]

$16x^2-48x=-32$ [μεταφέραμε το 32 στο 2ο μέλος]

$(4x)^2-2\cdot 4x\cdot 6+6^2=6^2-32$ [προσθέτουμε και στα δύο μέλη το 6^2]

$(4x)^2-2\cdot 4x\cdot 6+6^2=36-32$ ή $(4x-6)^2=4$

$4x-6=\sqrt{4}$ ή $4x-6=-\sqrt{4}$

$4x-6=2$ ή $4x-6=-2$

$4x=8$ ή $4x=4$

$x=2$ ή $x=1$

Β. Επίλυση εξισώσεων δευτέρου βαθμού με τη βοήθεια τύπου

Ερώτηση 1

Πώς λύνουμε την εξίσωση:
$\alpha x^2+\beta x+\gamma=0,\ \alpha\neq 0$ με τη βοήθεια τύπου;

Απάντηση

- Πολλαπλασιάζουμε όλους τους όρους με 4α.
- Μεταφέρουμε το σταθερό όρο στο β′ μέλος.
- Στο α′ μέλος έχουμε δύο όρους του αναπτύγματος $(2\alpha x+\beta)^2$. Για να συμπληρώσουμε το τετράγωνο του $2\alpha x+\beta$ προσθέτουμε και στα δύο μέλη το β^2.

$\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$

$4\alpha\cdot\alpha x^2+4\alpha\cdot\beta x+4\alpha\cdot\gamma=0$

$4\alpha^2x^2+4\alpha\beta x=-4\alpha\gamma$

$(2\alpha x)^2+2\cdot 2\alpha x\cdot\beta=-4\alpha\gamma$

$(2\alpha x)^2+2\cdot 2\alpha x\cdot\beta+\beta^2=\beta^2-4\alpha\gamma$

$(2\alpha x+\beta)^2=\beta^2-4\alpha\gamma$

Αν συμβολίσουμε την παράσταση $\beta^2-4\alpha\gamma$ με το γράμμα Δ, τότε η εξίσωση γράφεται $(2\alpha x+\beta)^2=\Delta$ και διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

- Αν $\Delta>0$, τότε έχουμε:

$$2\alpha x+\beta=\pm\sqrt{\Delta}$$
$$2\alpha x=-\beta\pm\sqrt{\Delta}$$
$$x=\frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}$$

Άρα η εξίσωση έχει **δύο άνισες λύσεις**, τις

$$x=\frac{-\beta+\sqrt{\Delta}}{2\alpha}\ \text{ και }\ x=\frac{-\beta-\sqrt{\Delta}}{2\alpha}.$$

- Αν $\Delta=0$, τότε έχουμε:

$$(2\alpha x+\beta)^2=0$$
$$2\alpha x+\beta=0$$
$$2\alpha x=-\beta$$
$$x=-\frac{\beta}{2\alpha}$$

Άρα η εξίσωση έχει **μία διπλή λύση**, την $x=-\dfrac{\beta}{2\alpha}$.

- Αν $\Delta<0$, τότε η εξίσωση **δεν έχει λύση (αδύνατη)**.

Η παράσταση $\beta^2-4\alpha\gamma$, όπως είδαμε, παίζει σημαντικό ρόλο στην επίλυση της εξίσωσης $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$ με $\alpha\neq 0$, γιατί μας επιτρέπει να διακρίνουμε το πλήθος των λύσεών της.

Γι' αυτό λέγεται **διακρίνουσα** και συμβολίζεται με το γράμμα Δ, δηλαδή $\Delta = \beta^2 - 4\alpha \cdot \gamma$

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι:

1. Η εξίσωση $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ είναι εξίσωση 2ου βαθμού όταν $\alpha \neq 0$.
2. Το πλήθος λύσεων μιας δευτεροβάθμιας εξίσωσης $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ με $\alpha \neq 0$, εξαρτάται από τη διακρίνουσα $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma$.
   Ειδικότερα:
   – Αν $\Delta > 0$, έχουμε δύο ρίζες άνισες που δίνονται από τους τύπους:
   $$x_1 = \frac{-\beta + \sqrt{\Delta}}{2\alpha}, \quad x_2 = \frac{-\beta - \sqrt{\Delta}}{2\alpha}$$
   – Αν $\Delta = 0$, έχουμε δύο ρίζες ίσες ή όπως αλλιώς λέμε μία διπλή ρίζα που δίνεται από τον τύπο:
   $$x = \frac{-\beta}{2\alpha}$$
   – Αν $\Delta < 0$, τότε δεν έχουμε ρίζες στο σύνολο των πραγματικών αριθμών, δηλαδή η εξίσωση είναι αδύνατη.
3. Αν κάποιος από τους β,γ είναι 0, τότε μπορούμε πιο εύκολα να τη λύσουμε χωρίς να χρησιμοποιήσουμε τους τύπους λύσεων που αναφέραμε.

Γ. Παραγοντοποίηση τριωνύμου

Ερώτηση 1

Πως παραγοντοποιείται ένα τριώνυμο $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$, $\alpha \neq 0$;

Απάντηση

1) Αν $\Delta > 0$ τότε έχει δύο πραγματικές ρίζες $\rho_1 \neq \rho_2$ και παραγοντοποιείται σύμφωνα με τον τύπο:
$$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = \alpha(x - \rho_1) \cdot (x - \rho_2)$$
2) Αν $\Delta = 0$ τότε έχει μία διπλή πραγματική ρίζα ρ και παραγοντοποιείται σύμφωνα με τον τύπο:
$$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = \alpha(x - \rho)^2$$
3) Αν $\Delta < 0$ τότε δεν έχει πραγματικές ρίζες και συνεπώς το τριώνυμο δεν παραγοντοποιείται.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ – ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1 Να λυθούν οι πιο κάτω εξισώσεις:

α. $x^2=9$ β. $x^2+2=0$ γ. $4x^3-x=0$

δ. $x^4-25=0$ ε. $x^2-4x=0$

Λύση

α. Είναι $x^2=9$

$x=\sqrt{9}$ ή $x=-\sqrt{9}$

$x=3$ ή $x=-3$

β. Είναι $x^2+2=0$

$x^2=-2$, αδύνατη

γ. Είναι $4x^3-x=0$

$x\left(4x^2-1\right)=0$

$x=0$ ή $4x^2-1=0$

$x=0$ ή $4x^2=1$

$x=0$ ή $x^2=\frac{1}{4}$

$x=0$ ή $x=\sqrt{\frac{1}{4}}$ ή $x=-\sqrt{\frac{1}{4}}$

$x=0$ ή $x=\frac{1}{2}$ ή $x=-\frac{1}{2}$

Την εξίσωση $4x^2-1$ μπορούμε να λύσουμε παραγοντοποιώντας το πρώτο μέλος.

Είναι $4x^2-1=0$ [διαφορά τετραγώνων]

$(2x-1)(2x+1)=0$

$2x-1=0$ ή $2x+1=0$

$2x=1$ ή $2x=-1$

$x=\frac{1}{2}$ ή $x=-\frac{1}{2}$

δ. Είναι $x^4-25=0$

$\left(x^2\right)^2-5^2=0$

$\left(x^2-5\right)\left(x^2+5\right)=0$ [διαφορά τετραγώνων]

$x^2-5=0$ ή $x^2+5=0$

$x^2=5$ ή $x^2=-5$ [$x^2=-5$, αδύνατη]

$x=\sqrt{5}$ ή $x=-\sqrt{5}$

ε. Είναι $x^2-4x=0$

$x(x-4)=0$ [κοινός παράγοντας]

$x=0$ ή $x-4=0$

$x=0$ ή $x=4$

2 Να λυθούν οι παρακάτω εξισώσεις:

α. $x^2-4x+3=0$ β. $2x^2-10x+12=0$

Λύση

α. Η $x^2-4x+3=0$, είναι εξίσωση 2ου βαθμού με $\alpha=1$, $\beta=-4$, $\gamma=3$ και βρίσκουμε πρώτα τη διακρίνουσα

$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=(-4)^2-4\cdot1\cdot3=16-12=4$.

Επειδή $\Delta=4>0$ έχουμε δύο ρίζες άνισες:

$$x=\frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\frac{4\pm\sqrt{4}}{2\cdot1}=\frac{4\pm2}{2}=\left|\begin{array}{l}\rightarrow x_1=\dfrac{4+2}{2}=\dfrac{6}{2}=3\\ \rightarrow x_2=\dfrac{4-2}{2}=\dfrac{2}{2}=1\end{array}\right.$$

οπότε οι λύσεις της εξίσωσης είναι οι $x=3$ ή $x=1$.

β. Είναι $2x^2-10x+12=0$

$2(x^2-5x+6)=0$ **[βγαίνει κοινός παράγοντας ο συντελεστής του δευτεροβάθμιου όρου]**

$x^2-5x+6=0$, εξίσωση 2ου βαθμού με $\alpha=1$, $\beta=-5$, $\gamma=6$ και βρίσκουμε τη διακρίνουσα

$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=(-5)^2-4\cdot1\cdot6=25-24=1$.

Επειδή $\Delta=1>0$ έχουμε δύο ρίζες άνισες:

$$x=\frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\frac{5\pm\sqrt{1}}{2\cdot1}=\frac{5\pm1}{2}=\left|\begin{array}{l}\rightarrow x_1=\dfrac{5+1}{2}=3\\ \rightarrow x_2=\dfrac{5-1}{2}=2\end{array}\right.$$

οπότε οι λύσεις της εξίσωσης είναι οι $x=3$ και $x=2$.

3 Να λυθούν οι παρακάτω εξισώσεις:

α. $2x^2-5x=x^2-9+x$

β. $(x-1)^2-4(x-1)+3=0$

γ. $\dfrac{2x^2+1}{2}-\dfrac{2x}{3}=1-\dfrac{2-x}{6}$

Λύση

α. $2x^2-5x=x^2-9+x$

$2x^2-5x-x^2+9-x=0$

$x^2-6x+9=0$, εξίσωση 2ου βαθμού με $\alpha=1$, $\beta=-6$, $\gamma=9$ και βρίσκουμε τη διακρίνουσα:

$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=(-6)^2-4\cdot1\cdot9=36-36=0$

Επειδή $\Delta=0$ η εξίσωση έχει μια διπλή ρίζα:

$x=\dfrac{-\beta}{2\alpha}=\dfrac{6}{2\cdot1}=\dfrac{6}{2}=3$. Άρα $x=3$ είναι η λύση της εξίσωσης.

β. Είναι $(x-1)^2-4(x-1)+3=0$

Εάν θέσουμε $x-1=\omega$ η εξίσωση γίνεται:

$\omega^2-4\omega+3=0$ και είναι εξίσωση 2ου βαθμού με $\alpha=1$, $\beta=-4$, $\gamma=3$.

Βρίσκουμε τη διακρίνουσα:

$$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=(-4)^2-4\cdot1\cdot3=16-12=4.$$

Επειδή $\Delta=4>0$ η εξίσωση έχει δύο ρίζες άνισες:

$$\omega=\frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\frac{4\pm\sqrt{4}}{2\cdot1}=\frac{4\pm2}{2}=\left|\begin{array}{l}\rightarrow \omega_1=\dfrac{4+2}{2}=\dfrac{6}{2}=3\\ \rightarrow \omega_2=\dfrac{4-2}{2}=\dfrac{2}{2}=1\end{array}\right.$$

Επομένως $\omega = 3$ ή $\omega = 1$

$x - 1 = 3$ $\quad$ $x - 1 = 1$

$x = 1 + 3$ $\quad$ $x = 1 + 1$

$x = 4$ $\quad$ $x = 2$

οι λύσεις της εξίσωσης είναι οι x = 4 και x = 2.

γ. Είναι $\frac{2x^2+1}{2} - \frac{2x}{3} = 1 - \frac{2-x}{6}$

$$6 \cdot \frac{2x^2+1}{2} - 6 \cdot \frac{2x}{3} = 6 \cdot 1 - 6 \cdot \frac{2-x}{6}$$

[πολ/με με το $Ε.Κ.Π(2,3,6) = 6$]

$3(2x^2+1) - 2 \cdot 2x = 6 - (2-x)$

$6x^2 + 3 - 4x = 6 - 2 + x$

$6x^2 + 3 - 4x - 6 + 2 - x = 0$

$6x^2 - 5x - 1 = 0$, $\alpha = 6$, $\beta = -5$, $\gamma = -1$

Είναι $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-5)^2 - 4 \cdot 6 \cdot (-1) =$
$25 + 24 = 49$

οπότε $x = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{5 \pm \sqrt{49}}{2 \cdot 6} = \frac{5 \pm 7}{12} =$

$\rightarrow x_1 = \frac{5+7}{12} = \frac{12}{12} = 1$

$\rightarrow x_2 = \frac{5-7}{12} = \frac{-2}{12} = -\frac{1}{6}$

Άρα οι λύσεις της εξίσωσης είναι οι $x = 1$ και $x = -\frac{1}{6}$.

4 Να βρεθεί η τιμή του α, αν η εξίσωση $x^2 - (\alpha+1)x - 15\alpha = 0$ έχει ρίζα το -3. Στη συνέχεια να βρεθεί και η άλλη ρίζα της εξίσωσης.

Λύση

- Εφόσον η εξίσωση $x^2 - (\alpha+1)x - 15\alpha = 0$ έχει ρίζα το **-3**, θα πρέπει το **-3** στη θέση του x να επαληθεύει την εξίσωση.

 Επομένως: $(-3)^2 - (\alpha+1) \cdot (-3) - 15\alpha = 0$

 $9 + 3\alpha + 3 - 15\alpha = 0$

 $3\alpha - 15\alpha = -9 - 3$

 $-12\alpha = -12$

 $\alpha = \frac{-12}{-12} = 1$

 Οπότε άν η εξίσωση έχει ρίζα το **-3** είναι **α = 1**.

- Για $\alpha = 1$ η εξίσωση $x^2 - (\alpha+1)x - 15\alpha = 0$ γίνεται:

 $x^2 - 2x - 15 = 0$ και είναι 2ου βαθμού με $\alpha = 1$, $\beta = -2$, $\gamma = -15$.

 $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-15) = 4 + 60 = 64$ οπότε έχει λύσεις

 $x = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{2 \pm \sqrt{64}}{2 \cdot 1} = \frac{2 \pm 8}{2} =$

 $\rightarrow x_1 = \frac{2+8}{2} = \frac{10}{2} = 5$

 $\rightarrow x_2 = \frac{2-8}{2} = \frac{-6}{2} = -3$

 Άρα η άλλη ρίζα της είναι το 5.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1 *Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με (Σ), αν είναι σωστές ή με (Λ), αν είναι λανθασμένες.*

α) Ο αριθμός 0 είναι λύση της εξίσωσης $2x^2-4x+5=0$. ☐

β) Ο αριθμός 7 είναι λύση της εξίσωσης $x^2-4x-7=0$. ☐

γ) Οι λύσεις τις εξίσωσης $(x-4)(x+8)=0$ είναι $x=-4$ και $x=8$. ☐

δ) Η εξίσωση $x^2=25$ έχει μοναδική λύση τον αριθμό $x=5$. ☐

ε) Η εξίσωση $x^2=-16$ δεν έχει λύση. ☐

στ) Η εξίσωση $(x+4)^2=0$ έχει διπλή λύση τον αριθμό $x=-4$. ☐

2 *Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με (Σ), αν είναι σωστές ή με (Λ), αν είναι λανθασμένες*

α) Η εξίσωση $3x-7=x^2$ είναι 2ου βαθμού. ☐

β) Η εξίσωση $x^2+4x+9=x(x-3)$ είναι 2ου βαθμού. ☐

γ) Η εξίσωση $(\lambda-4)x^2+7x+2=0$ είναι:

i) 1ου βαθμού, όταν $\lambda=4$. ☐

ii) 2ου βαθμού, όταν $\lambda\neq 4$. ☐

3 *Ένας μαθητής λύνοντας την εξίσωση $(x-1)^2=2(x-1)$ απλοποίησε με το x-1 και βρήκε ότι έχει μοναδική λύση τη $x=3$. Παρατηρώντας όμως την εξίσωση διαπίστωσε ότι επαληθεύεται και για $x=1$. Πού έγινε το λάθος και χάθηκε η λύση $x=1$;*

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1 Να λυθούν οι πιο κάτω εξισώσεις:

α. $x^2 = 2$ β. $(2x+1)^2 - (4x+3)^2 = 0$ γ. $4x^2 = 12x$ δ. $2x^2 = 5x(x-3)$

2 Να λυθούν οι παρακάτω εξισώσεις:

α. $-x^2 - x - 1 = 0$ β. $2x^2 - 4x + 2 = 0$

3 Να λυθούν οι παρακάτω εξισώσεις:

α. $(x-2)^2 + x^2 = -2$ β. $\left(x^2+1\right)^2 - 4x^2 = 0$ γ. $\left(x^2-7x+12\right)\cdot\left(x^2+x+1\right)\cdot(x-1) = 0$

4 Να βρεθούν οι τιμές του πραγματικού αριθμού λ ώστε η εξίσωση $x^2 - 2x + 3\lambda = 0$

α. να έχει δύο ρίζες άνισες β. να έχει διπλή ρίζα γ. να είναι αδύνατη

5 Να βρεθούν δύο αριθμοί με διαφορά 13 και γινόμενο 264.

6 Να λυθούν οι παρακάτω εξισώσεις:

α. $x(x-1)\cdot(x-3) = 0$ β. $(2x-1)\cdot\left(x^2-4\right) = 0$

7 Ομοίως να λυθούν οι εξισώσεις:

α. $(x-3)^2 = -5(x-3)$ β. $x - 7\sqrt{x} + 12 = 0$ γ. $\dfrac{x(x+2)}{2} - \dfrac{x+1}{3} = \dfrac{1}{3}$

8 Να λυθούν οι παρακάτω εξισώσεις με τη μέθοδο συμπλήρωσης τετραγώνου:

α. $x^2 - 13x + 36 = 0$ β. $x^2 - 2x + 5 = 0$ γ. $x^2 - 4x + 4 = 0$

9 Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις:

α. $x^2 - \left(\sqrt{2}-1\right)x - \sqrt{2} = 0$ β. $y^2 - \left(3-2\sqrt{2}\right)y + 4 - 3\sqrt{2} = 0$

10 Να βρεθούν οι τιμές του πραγματικού αριθμού λ για τις οποίες η εξίσωση $2x^2+6x+8-2\lambda=0$ είναι αδύνατη.

11 Εάν η εξίσωση $(x-\lambda)^2+5(x-\lambda)+6=0$ έχει ρίζα τον αριθμό 5, να βρεθεί η τιμή του πραγματικού αριθμού λ.

12 Για ποιες τιμές του πραγματικού αριθμού λ η εξίσωση $x^2-4x+\lambda+1=0$ έχει δύο ρίζες άνισες;

ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗΣ

Ερώτηση 1

α. Πότε ένα γινόμενο είναι ίσο με το μηδέν;

β. Η εξίσωση $kx^2-3x+2=0$ είναι 2ου βαθμού;

Ερώτηση 2

α. Μπορεί μια εξίσωση 2ου βαθμού να έχει περισσότερες από 2 λύσεις;

β. Πόσες ρίζες έχει η εξίσωση $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$, $\alpha\neq 0$, όταν $\beta^2=4\alpha\gamma$;

Άσκηση 1

Συμπλήρωσε τα κενά της παρακάτω πρότασης :

Για να λύσουμε μια εξίσωση 2ου βαθμού $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$ με $\alpha\neq 0$ πρώτα υπολογίζουμε τη .... που είναι ....

- Αν αυτή είναι ...., έχει δύο ρίζες .... που είναι $x_1=$.............. και $x_2=$..............
- Αν αυτή είναι ...., έχει μία ρίζα .... που είναι $x=$..............
- Αν αυτή ειναι ...., τότε η εξίσωση είναι ....

Άσκηση 2

α. Η εξίσωση $3x^2=x-5$ είναι 2ου βαθμού με $\alpha=3$, $\beta=1$ και $\gamma=-5$;
β. Να λύσετε την παραπάνω εξίσωση.

Άσκηση 3

Είναι οι αριθμοί 2 και 3 ρίζες της εξίσωσης $x^2=-5x-6$;