

## 1.10 Πράξεις ρητών παραστάσεων

### Ερώτηση 1

Πως πολλαπλασιάζουμε έναν ακέραιο αριθμό με ένα κλάσμα;

### Απάντηση

Για να πολλαπλασιάσουμε έναν ακέραιο αριθμό με ένα κλάσμα ή για να πολλαπλασιάσουμε δύο κλάσματα, χρησιμοποιούμε τους εξής κανόνες:

$$\boxed{a \cdot \frac{\beta}{\gamma} = \frac{a\beta}{\gamma}} \quad \text{και} \quad \boxed{\frac{a}{\beta} \cdot \frac{\gamma}{\delta} = \frac{a\gamma}{\beta\delta}}$$

### Ερώτηση 2

Πως διαιρούμε δύο κλάσματα;

### Απάντηση

Για να διαιρέσουμε δύο κλάσματα χρησιμοποιούμε τον παρακάτω κανόνα

$$\boxed{\frac{a}{\beta} : \frac{\gamma}{\delta} = \frac{a}{\beta} \cdot \frac{\delta}{\gamma} = \frac{a\delta}{\beta\gamma}}$$

τον ίδιο κανόνα χρησιμοποιούμε και στις ρητές παραστάσεις.

### Ερώτηση 3

Πως πολλαπλασιάζουμε - διαιρούμε δυο ρητές αλγεβρικές παραστάσεις;

### Απάντηση

Χρησιμοποιούμε τους ίδιους κανόνες όπως στον πολλαπλασιασμό και στη διαίρεση κλασμάτων.

### Ερώτηση 4

Πως μετατρέπουμε ένα σύνθετο κλάσμα σε απλό;

### Απάντηση

Το σύνθετο κλάσμα  $\frac{\frac{a}{\beta}}{\frac{\gamma}{\delta}}$ , εκφράζει το πηλίκο  $\frac{a}{\beta} : \frac{\gamma}{\delta}$  που είναι ίσο

με  $\frac{a}{\beta} \cdot \frac{\delta}{\gamma}$  και επομένως ισχύει

$$\boxed{\frac{\frac{a}{\beta}}{\frac{\gamma}{\delta}} = \frac{a\delta}{\beta\gamma}}$$

Τον ίδιο κανόνα χρησιμοποιούμε και στις ρητές παραστάσεις.

Για παράδειγμα,  $\frac{\frac{3a^3}{x^2}}{\frac{6a^2}{x^4}} = \frac{2a^3x^4}{6a^2x^2} = \frac{ax^2}{3}$

*Μνημονικός κανόνας*

$$\frac{\frac{a}{\beta}}{\frac{\gamma}{\delta}} = \frac{a\delta}{\beta\gamma}$$

## ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ - ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

Να κάνετε τις πράξεις:

1

$$\alpha. \frac{3x}{5\omega} \cdot \frac{4x\omega}{7a} \quad \beta. \left(\frac{-2x}{3}\right) \cdot \left(\frac{-5x}{3}\right)$$

$$\gamma. \frac{x^2y}{y^2\omega} \cdot \frac{\omega^2y}{x\omega} \cdot \frac{y^2}{\omega x^2} \quad \delta. \frac{\beta-a}{4a} \cdot \frac{4a\beta}{a^2\beta^2}$$

**Λύση**

$$\alpha. \frac{3x}{5\omega} \cdot \frac{4x\omega}{7a} = \frac{3 \cdot 4 \cdot x \cdot x \cdot \omega}{5 \cdot 7 \cdot \omega \cdot a} = \frac{12x^2\omega}{35\omega a} = \frac{12x^2}{35a}$$

$$\beta. \left(\frac{-2 \cdot x}{3}\right) \cdot \left(\frac{-5 \cdot x}{3}\right) = \frac{-2 \cdot (-5) \cdot x \cdot x}{3 \cdot 3} = \frac{10x^2}{9}$$

$$\gamma. \frac{x^2y}{y^2\omega} \cdot \frac{\omega^2y}{x\omega} \cdot \frac{y^2}{\omega x^2} = \frac{x^2 \cdot y \cdot y \cdot y^2 \cdot \omega^2}{y^2 \cdot \omega \cdot \omega \cdot \omega \cdot x \cdot x^2} = \frac{x^2 \cdot y^4 \cdot \omega^2}{y^2 \cdot \omega^3 \cdot x^3} = \frac{y^2}{x\omega}$$

$$\delta. \frac{\beta-a}{4 \cdot a} \cdot \frac{4 \cdot a \cdot \beta}{a^2 \cdot \beta^2} = \frac{4(\beta-a) \cdot a \cdot \beta}{4 \cdot a \cdot a^2 \cdot \beta^2} = \frac{(\beta-a) \cdot a \cdot \beta}{a^3 \cdot \beta^2} = \frac{(\beta-a)}{a^2\beta}$$

Να κάνετε τις πράξεις:

2

$$\alpha. \frac{3x}{y} : \frac{4x}{y} \quad \beta. \frac{2x^2 \cdot y^2}{14\beta^2 \cdot a^2} : \frac{6xy}{7a\beta}$$

$$\gamma. \frac{a}{(a+\beta)^2} : \frac{8}{a+\beta} \quad \delta. \frac{1}{x-y} : \frac{-2}{x^2-y^2}$$

**Λύση**

$$\alpha. \frac{3 \cdot x}{y} : \frac{4 \cdot x}{y} = \frac{3 \cdot x}{y} \cdot \frac{y}{4 \cdot x} = \frac{3 \cdot x \cdot y}{4 \cdot x \cdot y} = \frac{3}{4}$$

$$\beta. \frac{2x^2 \cdot y^2}{14\beta^2 \cdot a^2} : \frac{6xy}{7a\beta} = \frac{2x^2 \cdot y^2}{14\beta^2 \cdot a^2} \cdot \frac{7a\beta}{6xy} = \frac{2 \cdot 7 \cdot x^2 \cdot y^2 \cdot a \cdot \beta}{6 \cdot 14 \cdot x \cdot y \cdot a^2 \cdot \beta^2} = \frac{xy}{6a\beta}$$

$$\gamma. \frac{a}{(a+\beta)^2} : \frac{8}{a+\beta} = \frac{a}{(a+\beta)^2} \cdot \frac{a+\beta}{8} = \frac{a \cdot (a+\beta)}{8 \cdot (a+\beta)^2} = \frac{a}{8 \cdot (a+\beta)}$$

$$\delta. \frac{1}{x-y} : \frac{-2}{x^2-y^2} = \frac{1}{x-y} \cdot \frac{x^2-y^2}{-2} = \frac{(x-y) \cdot (x+y)}{-2(x-y)} = -\frac{x+y}{2}$$

Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

3

$$\alpha. \frac{1+x}{1+\frac{1}{x}} \quad \beta. \frac{1-\frac{1}{x^2}}{1-\frac{1}{x}}$$

$$\gamma. \frac{\frac{2a^2x}{(x-a)^2}}{2x} \quad \delta. \frac{\frac{xy-y^2}{x-y}}{xy-x^2}$$

**Λύση**

$$\alpha. \frac{1+x}{1+\frac{1}{x}} = \frac{1+x}{\frac{x+1}{x}} = \frac{x(1+x)}{x+1} = x$$

$$\beta. \frac{1-\frac{1}{x^2}}{1-\frac{1}{x}} = \frac{\frac{x^2-1}{x^2}}{\frac{x-1}{x}} = \frac{x(x^2-1)}{x^2(x-1)} = \frac{(x-1) \cdot (x+1)}{x(x-1)} = \frac{x+1}{x}$$

$$\gamma. \frac{\frac{2a^2x}{(x-a)^2}}{\frac{2x}{a(x-a)}} = \frac{2a^2 \cdot x \cdot a(x-a)}{(x-a)^2 \cdot 2x} = \frac{a^3}{x-a}$$

$$\delta. \frac{\frac{xy-y^2}{x-y}}{\frac{y-x}{xy-x^2}} = \frac{(xy-y^2) \cdot (xy-x^2)}{(x-y) \cdot (y-x)} = \frac{y(x-y) \cdot x \cdot (y-x)}{(x-y) \cdot (y-x)} = yx$$

4

Να κάνετε τις πράξεις:

$$\alpha. \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$$

$$\beta. \frac{8x}{x^2-16} + \frac{12}{x+4} + \frac{4}{4-x}$$

Λύση

$$\alpha. \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{\frac{y}{x}}{x} + \frac{\frac{x}{y}}{y} = \frac{x+y}{xy}$$

$$\beta. \frac{8x}{x^2-16} + \frac{12}{x+4} + \frac{4}{4-x} = \frac{8x}{(x-4) \cdot (x+4)} + \frac{12}{x+4} - \frac{4}{x-4} =$$

$$\text{Ε.Κ.Π. } (x+4) \cdot (x-4)$$

$$\frac{\frac{1}{8x}}{(x-4) \cdot (x+4)} + \frac{\frac{x-4}{12}}{x+4} - \frac{\frac{x+4}{4}}{x-4}$$

$$= \frac{8x+12(x-4)-4(x+4)}{(x-4) \cdot (x+4)} = \frac{8x+12x-48-4x-16}{(x-4) \cdot (x+4)} =$$

$$\frac{16x-64}{(x-4) \cdot (x+4)} = \frac{16(x-4)}{(x-4) \cdot (x+4)} = \frac{16}{x+4}$$

Να γίνουν οι πράξεις:

$$\alpha. \frac{x}{x^2+\psi^2} - \frac{\psi(x-\psi)^2}{x^4-\psi^4}$$

$$\beta. \frac{\frac{x^3+\psi^3}{x-\frac{\psi}{1+\frac{\psi}{x-\psi}}}}{\frac{x^3-\psi^3}{x+\frac{\psi}{1-\frac{\psi}{x+\psi}}}}$$

5

Λύση

$$\alpha. \frac{x}{x^2+\psi^2} - \frac{\psi(x-\psi)^2}{x^4-\psi^4} = \frac{x}{x^2+\psi^2} - \frac{\psi(x-\psi)^2}{(x^2+\psi^2)^2} =$$

$$\frac{x}{x^2+\psi^2} - \frac{\psi(x-\psi)^2}{(x^2-\psi^2)(x^2+\psi^2)} = \frac{x}{x^2+\psi^2} - \frac{\psi(x-\psi)^2}{(x-\psi)(x+\psi)(x^2+\psi^2)} =$$

$$\frac{x}{x^2+\psi^2} - \frac{\psi(x-\psi)}{(x+\psi)(x^2+\psi^2)} \quad (1)$$

$$\text{Έχουμε: Ε.Κ.Π.} = (x+\psi)(x^2+\psi^2)$$

$$\text{Άρα η (1) γίνεται: } \frac{x(x+\psi) - \psi(x-\psi)}{(x^2+\psi^2)(x+\psi)} = \frac{x^2+x\psi - \psi x + \psi^2}{(x^2+\psi^2)(x+\psi)} =$$

$$\frac{x^2+\psi^2}{(x^2+\psi^2)(x+\psi)} = \frac{1}{x+\psi}$$

$$\beta. \frac{\frac{x^3+\psi^3}{x-\frac{\psi}{1+\frac{\psi}{x-\psi}}}}{\frac{x^3-\psi^3}{x+\frac{\psi}{1-\frac{\psi}{x+\psi}}}} = \frac{\frac{x^3+\psi^3}{x-\frac{\psi}{x-\psi}}}{\frac{x^3-\psi^3}{x+\frac{\psi}{x+\psi}}} =$$

$$\frac{\frac{x^3+\psi^3}{x-\frac{\psi}{x-\psi}}}{\frac{x^3-\psi^3}{x+\frac{\psi}{x+\psi}}} = \frac{\frac{x^3+\psi^3}{x-\frac{\psi(x-\psi)}{x-\psi}}}{\frac{x^3-\psi^3}{x+\frac{\psi(x+\psi)}{x+\psi}}} =$$

$$= \frac{(x^3 + \psi^3)}{x^2 - \psi x + \psi^2} - \frac{(x^3 - \psi^3)}{x^2 + \psi x + \psi^2} = \frac{(x^3 + \psi^3)x}{x^2 - \psi x + \psi^2} - \frac{(x^3 - \psi^3)x}{x^2 + \psi x + \psi^2} = \frac{(x + \psi)(x^2 - \psi x + \psi^2)x}{x^2 - \psi x + \psi^2} - \frac{(x - \psi)(x^2 + \psi x + \psi^2)x}{x^2 + \psi x + \psi^2} =$$

$$(x + \psi)x + (x - \psi)\psi = x^2 + \psi x - x^2 + x\psi = 2x\psi$$

### ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1 Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω ισότητες με (Σ), αν είναι σωστές ή με (Λ), αν είναι λανθασμένες.

α.  $x \cdot \frac{2}{y} = \frac{2x}{xy}$

β.  $x \cdot \frac{10}{y} = \frac{10x}{y}$

γ.  $3x : \frac{4}{x} = \frac{3}{4}$

δ.  $7x : \frac{5}{x} = \frac{7x^2}{2}$

ε.  $\frac{x+2}{y} \cdot \frac{3}{x+2} = \frac{3}{y}$

στ.  $\frac{a}{x} \cdot \frac{x-5}{x} = \frac{ax-5}{x^2}$

ζ.  $\frac{a}{a^2+4} \cdot \frac{a^2+4}{a} = 0$

η.  $\frac{a}{\beta+4} : \frac{a}{\beta+4} = 1$

2 Να συμπληρώσετε τις ισότητες:

α.  $4x \cdot \frac{\dots\dots\dots}{y} = \frac{8x^2}{y}$

β.  $\frac{x}{y} \cdot \frac{10}{\dots\dots\dots} = \frac{10}{y^2}$

γ.  $\frac{x}{3y} : \frac{\dots\dots\dots}{\omega} = \frac{\omega}{y}$

δ.  $\frac{x-2}{x+3} \cdot \frac{\dots\dots\dots}{\dots\dots\dots} = 1$

ε.  $\frac{x-5}{x+3} : \frac{\dots\dots\dots}{\dots\dots\dots} = 1$

στ.  $\frac{x}{y} : \frac{x-5}{\dots\dots\dots} = \frac{x}{x-5}$

3 Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω ισότητες με (Σ), αν είναι σωστές ή με (Λ), αν είναι λανθασμένες.

α.  $\frac{x}{x+1} + \frac{1}{x+1} = 1$

β.  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{2}{x+y}$

γ.  $\frac{a+4}{a} - \frac{4}{a} = 1$

δ.  $\frac{a+\beta}{a-\beta} + \frac{a+\beta}{\beta-a} = 0$

ε.  $1 + \frac{x}{\omega} = \frac{1+x}{\omega}$

στ.  $\frac{a}{x} - \frac{a+2}{x} = \frac{2}{x}$

## 1.10 Πράξεις ρητών παραστάσεων

4

Μπορείτε να εντοπίσετε το λάθος στις παρακάτω ισότητες;

α.  $1 + \frac{\alpha}{\beta} = \frac{1+\alpha}{\beta}$

β.  $\frac{3x+2}{x+1} - \frac{2x-1}{x+1} = \frac{3x+2-2x-1}{x+1} = \frac{x+1}{x+1} = 1$

Να συμπληρώσετε τις ισότητες:

α.  $\frac{x}{x+4} - \dots = 0$

β.  $\frac{x}{x+5} + \dots = 1$

γ.  $\dots + \frac{x}{x+3} = \frac{2x}{x+3}$

δ.  $\dots - \frac{5}{x+1} = \frac{1}{x+1}$

ε.  $\frac{2x-1}{x} + \dots = 2$

στ.  $\frac{3x+7}{x} - \dots = 3$

5

## ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1

Να γίνουν οι πράξεις:

i.  $\frac{4x^2}{4x^2-9y^2} + \frac{x}{3y-2x} + \frac{2y}{3y+2x}, \quad x \neq \pm \frac{3}{2}y$

ii.  $\frac{\frac{x}{y} + \frac{y}{x} + 2}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}}, \quad x, y \neq 0 \text{ και } x \neq -y$

iii.  $\left( \frac{2 \cdot x}{x^2 - y^2} + \frac{3}{x+y} - \frac{1}{x-y} \right) : \left( \frac{x^2 + y^2}{x \cdot y^2} + \frac{2}{y} \right)$

2

Να γίνουν οι πράξεις:

i.  $\frac{x^2 + x}{x^2 + 3x + 2} \cdot \frac{x^2 + 5x + 6}{x^2 + 3x}$

ii.  $\frac{x^2 - 36}{a^2 - ay} : \frac{x^2 + 6x}{a^2 - y^2}$

**3** Να απλοποιηθεί το κλάσμα  $\frac{\alpha(5\alpha - 9\beta) + 2\beta(\alpha - 3\beta)}{2\beta(4\alpha - 5\beta) - 3\alpha(3\beta - \alpha)}$

**4** Να γίνουν οι πράξεις:

i)  $\frac{2\alpha^3 - \alpha^2}{\alpha + \alpha^3} - \frac{\alpha^2 - 2\alpha + 1}{\alpha^2 - \alpha} + \frac{\alpha - 1}{\alpha^2 - 1}$

ii)  $\left(\frac{x}{y^2} - \frac{y^2}{x}\right) : \frac{y^2 - x}{y \cdot x}$

iii)  $\frac{x^4 - y^4}{\alpha^3 + \beta^3} : \frac{x^2 + y^2}{\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2}$

iv)  $\frac{1 - \frac{\alpha}{\beta} - \frac{\beta}{\alpha}}{\alpha^3 + \beta^3} \cdot \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}\right)$

**5** Αν  $\alpha + \beta + \gamma = 0$ , αποδείξτε ότι:  $A = \frac{\alpha^2 - \beta^2 - 2\beta\gamma}{\alpha + \beta} + \frac{\beta^2 - \gamma^2 - 2\alpha\gamma}{\beta + \gamma} + \frac{\gamma^2 - \alpha^2 - 2\alpha\beta}{\alpha + \gamma} = 0$

**6** Αν  $\alpha + \beta + \gamma = 0$ , αποδείξτε ότι:  $A = \frac{\alpha^4}{\beta^3 + \gamma^3 - 3\alpha\beta\gamma} + \frac{\beta^4}{\gamma^3 + \alpha^3 - 3\alpha\beta\gamma} + \frac{\gamma^4}{\alpha^3 + \beta^3 - 3\alpha\beta\gamma} = 0$

## ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗΣ

## Ερώτηση 1

Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω ισότητες με (Σ), αν είναι σωστές ή με (Λ), αν είναι λανθασμένες.

$$\alpha. \frac{x}{x+3} + \frac{3}{x+3} = 3 \quad \square$$

$$\beta. \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{2}{\alpha+\beta} \quad \square$$

$$\gamma. \frac{\alpha-3}{\alpha} + \frac{3}{\alpha} = 1 \quad \square$$

$$\delta. \frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta} + \frac{-\alpha+\beta}{-\beta-\alpha} = 0 \quad \square$$

$$\epsilon. 1 - \frac{x}{\alpha} = \frac{1-x}{\alpha} \quad \square$$

$$\sigma\tau. \frac{\alpha}{x} - \frac{\alpha-2}{x} = \frac{2}{x} \quad \square$$

## Άσκηση 1

Να χαρακτηρίσετε κάθε μια από τις παρακάτω ισότητες με (Σ) αν είναι σωστή ή με (Λ) αν είναι λανθασμένη.

$$\alpha) \frac{x}{5} \cdot \frac{x+8}{y} = \frac{x \cdot x+8}{5y} \quad \beta) \frac{10}{x} \cdot \frac{x}{x+6} = \frac{10}{x+6} \quad \gamma) \frac{1+\frac{5}{y}}{\frac{4}{x}} = \frac{1+5x}{4y}$$

$$\delta) x : \frac{y}{\omega+10} = \frac{x \cdot \omega+10}{y} \quad \epsilon) \frac{\frac{3x}{\omega}}{\frac{y}{x}} = \frac{\omega y}{3x^2} \quad \sigma\tau) \frac{x}{y} : \frac{x^2}{y^2} = \frac{y}{x}$$

## Άσκηση 2

Αν μεταξύ των πλευρών  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  τριγώνου ΑΒΓ ισχύει  $\frac{\beta}{\alpha+\gamma} = \frac{\gamma}{\alpha+\beta}$ , να αποδείξετε ότι το τρίγωνο είναι ισοσκελές.

Να αποδείξετε ότι:  $\frac{x^2+y^2}{x^2} + \frac{2y}{x} = \left(1 + \frac{y}{x}\right)^2$