

## 1.9 Ρητές αλγεβρικές παραστάσεις

### Ερώτηση 1

Τι λέμε ρητή αλγεβρική παράσταση;

### Απάντηση

Μια αλγεβρική παράσταση που είναι κλάσμα και οι όροι του είναι πολυώνυμα, λέγεται **ρητή αλγεβρική παράσταση** ή απλώς **ρητή παράσταση**. π.χ

$$\frac{x^4 - 7}{x + 10}, \frac{xyz}{x - y}, \frac{1960}{x^4 + 2}$$

### Σχόλιο:

Όταν γράφουμε μια ρητή παράσταση, θα εννοείται ότι οι μεταβλητές της δεν παίρνουν τιμές που μηδενίζουν τον παρονομαστή.

Όπως μια αριθμητική παράσταση, έτσι και μια ρητή παράσταση, μπορεί να απλοποιηθεί, αν ο αριθμητής και ο παρονομαστής της είναι γινόμενα και έχουν κοινό παράγοντα.

## ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ - ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

Να βρείτε τις τιμές των μεταβλητών για τις οποίες ορίζονται οι παρακάτω κλασματικές αλγεβρικές παραστάσεις:

1

α.  $\frac{5}{x}$       β.  $\frac{x-1}{x+1}$       γ.  $\frac{25}{x^2}$

δ.  $\frac{2}{(x-2) \cdot (x+1)}$       ε.  $\frac{3}{x^2-9}$       στ.  $\frac{x-3}{x^2-7x+6}$

ζ.  $\frac{3x^4 + x^2 + 2}{3x^3 - 27x}$       η.  $\frac{2}{x^2 + 2}$

### Λύση

- α. Πρέπει  $x \neq 0$ . Άρα η παράσταση ορίζεται για κάθε πραγματικό αριθμό εκτός του μηδενός.
- β. Πρέπει  $x+1 \neq 0$  δηλαδή  $x \neq -1$ . Άρα η παράσταση ορίζεται για κάθε πραγματικό αριθμό εκτός του  $-1$ .
- γ. Πρέπει  $x^2 \neq 0$  δηλαδή  $x \neq 0$ . Άρα η παράσταση ορίζεται για κάθε πραγματικό αριθμό εκτός του 0.
- δ. Πρέπει  $(x-2) \cdot (x+1) \neq 0$  δηλαδή  $x-2 \neq 0$  και  $x+1 \neq 0$  ή  $(x \neq 2$  και  $x \neq -1)$ .

Άρα η παράσταση ορίζεται για όλους τους πραγματικούς αριθμούς εκτός του 2 και του  $-1$ .

- ε. Παρατηρούμε ότι  $\frac{3}{x^2-9} = \frac{3}{(x-3) \cdot (x+3)}$  πρέπει  $(x-3) \cdot (x+3) \neq 0$  δηλαδή  $x \neq 3$  και  $x \neq -3$ .

Άρα η παράσταση ορίζεται για κάθε πραγματικό αριθμό εκτός του 3 και του  $-3$ .

- στ. Παρατηρούμε ότι  $\frac{x-3}{x^2-7x+6} = \frac{x-3}{(x-1) \cdot (x-6)}$

Πρέπει  $(x-1) \cdot (x-6) \neq 0$  δηλαδή  $x-1 \neq 0$  και

$x-6 \neq 0$  ή  $x \neq 1$  και  $x \neq 6$ .

Άρα η παράσταση ορίζεται για κάθε πραγματικό αριθμό εκτός του 1 και του 6.

- ζ. Παρατηρούμε ότι

$$\frac{3x^4 + x^2 + 2}{3x^3 - 27x} = \frac{3x^4 + x^2 + 2}{3x(x^2 - 9)} = \frac{3x^4 + x^2 + 2}{3x(x-3) \cdot (x+3)}$$

Πρέπει  $3x(x-3) \cdot (x+3) \neq 0$  δηλαδή  $x \neq 0$  και  $x \neq 3$  και  $x \neq -3$ .

Άρα η παράσταση ορίζεται για κάθε πραγματικό αριθμό εκτός του 0, του -3 και του 3.

- η. Πρέπει  $x^2 + 2 \neq 0$  δηλαδή  $x^2 \neq -2$  το οποίο ισχύει για κάθε πραγματικό αριθμό αφού το τετράγωνο κάθε πραγματικού αριθμού είναι μεγαλύτερο ή ίσο με το μηδέν.

Να απλοποιηθούν οι παρακάτω κλασματικές παραστάσεις:

$$\begin{array}{ll} \alpha. \frac{x^2 - 16}{x^2 + 8x + 16} & \beta. \frac{a^2 + 2a + 1}{\beta a^2 + \beta a} \\ \gamma. \frac{x^2 y - xy^2}{(x-y)^2 - (x+y)^2} & \delta. \frac{x^2 - 4}{2x^2 - 10x + 12} \\ \epsilon. \frac{(x-2) \cdot (x^2 + 4x + 4)}{x^3 - 4x} & \sigma\tau. \frac{x^3 - 4x^2 + 3x}{x^2 - x} \end{array}$$

**Λύση**

$$\alpha. \frac{x^2 - 16}{x^2 + 8x + 16} = \frac{x^2 - 4^2}{x^2 + 2 \cdot 4 \cdot x + 4^2} = \frac{(x-4) \cdot (x+4)}{(x+4)^2} = \frac{x-4}{x+4}$$

$$\beta. \frac{a^2 + 2a + 1}{\beta a^2 + \beta a} = \frac{(a+1)^2}{\beta a \cdot (a+1)} = \frac{a+1}{\beta a}$$

$$\begin{aligned} \gamma. \frac{x^2 y - xy^2}{(x-y)^2 - (x+y)^2} &= \frac{xy \cdot (x-y)}{(x-y+x+y) \cdot (x-y-x-y)} = \\ \frac{xy \cdot (x-y)}{2x \cdot (-2y)} &= \frac{x-y}{-4} = \frac{y-x}{4} \end{aligned}$$

$$\delta. \frac{x^2 - 4}{2x^2 - 10x + 12} = \frac{(x-2) \cdot (x+2)}{2 \cdot (x^2 - 5x + 6)} = \frac{(x-2) \cdot (x+2)}{2 \cdot (x-2) \cdot (x-3)} = \frac{x+2}{2(x-3)}$$

$$\epsilon. \frac{(x-2) \cdot (x^2 + 4x + 4)}{x^3 - 4x} = \frac{(x-2) \cdot (x+2)^2}{x(x^2 - 4)} = \frac{(x-2) \cdot (x+2)^2}{x(x-2) \cdot (x+2)} = \frac{x+2}{x}$$

$$\sigma\tau. \frac{x^3 - 4x^2 + 3x}{x^2 - x} = \frac{x(x^2 - 4x + 3)}{x(x-1)} = \frac{x(x-1) \cdot (x-3)}{x-1} = x(x-3)$$

**3**

Για ποιες τιμές του  $x$  ορίζεται η παράσταση

$$A = \frac{2x}{x+1} + \frac{x^2+1}{x(x-2)}$$

**Λύση**

Η παράσταση  $A$  έχει νόημα πραγματικού αριθμού όταν  $x+1 \neq 0$  και  $x(x-2) \neq 0 \Leftrightarrow$

$$x+1 \neq 0 \text{ και } x \neq 0 \text{ και } x-2 \neq 0 \Leftrightarrow$$

$$x \neq -1 \text{ και } x \neq 0 \text{ και } x \neq 2.$$

Άρα η παράσταση  $A$  ορίζεται για κάθε  $x \in \mathbb{R} - \{-1, 0, 2\}$ .

**4**

Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις

$$\text{i) } \frac{x^2 + 6x + 9}{x^2 + 3x} \quad \text{ii) } \frac{\omega^2 - 8\omega + 16}{\omega^2 - 16}$$

**Λύση**

$$\text{i) } \frac{x^2 + 6x + 9}{x^2 + 3x} = \frac{(x+3)^2}{x(x+3)} = \frac{x+3}{x}$$

$$\text{ii) } \frac{\omega^2 - 8\omega + 16}{\omega^2 - 16} = \frac{(\omega-4)^2}{(\omega-4)(\omega+4)} = \frac{\omega-4}{\omega+4}$$

## ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

- 1 Να συμπληρώσετε τον πίνακα αντιστοιχίζοντας σε κάθε παράσταση της στήλης A τις τιμές της μεταβλητής της από τη στήλη B, για τις οποίες ορίζεται.

Στήλη A	Στήλη B
α. $\frac{1}{x(x-1)}$	1. $x \neq 1$
β. $\frac{x+1}{x-1}$	2. $x \neq 0$ και $x \neq 1$
γ. $\frac{x}{x^2-4}$	3. $x \neq -1$
δ. $\frac{4(x+1)}{x+1}$	4. $x \neq 2$ και $x \neq -2$
ε. $\frac{5x}{x^2+1}$	5. οποιοσδήποτε αριθμός
	6. $x \neq 0$

α	β	γ	δ	ε

- 2 Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με (Σ), αν είναι σωστές ή με (Λ), αν είναι λανθασμένες.

α.  $\frac{x^2+4}{x} = x+1$      β.  $\frac{x(x+2)}{x} = x+2$      γ.  $\frac{(x+7)\cancel{(x+1)}}{4(x+1)} = \frac{x+7}{4}$

δ.  $\frac{x+2\cancel{(x+3)}}{4(x+3)} = \frac{x+2}{4}$      ε.  $\frac{x^2-y^2}{x+y} = x-y$      στ.  $\frac{(x+y)^2}{\cancel{x-y}} = x-y$

- 3 Να συμπληρώσετε τα κενά στις παρακάτω ισότητες:

α.  $\frac{8x^2}{x^2(\dots)} = \frac{8}{x-4}$     β.  $\frac{(a-b)(\dots)}{(a+b)(\dots)} = 1$     γ.  $\frac{x(x-1)}{\dots} = x$     δ.  $\frac{x^2(x+1)}{\dots} = x+1$

ε.  $\frac{\dots}{2(a+b)^2} = \frac{1}{a+b}$     στ.  $\frac{3(x-2)}{\dots} = \frac{3}{x+2}$

## ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

- 1** Να βρείτε τις τιμές των μεταβλητών για τις οποίες ορίζεται η παράσταση  $\frac{3x+1}{x(x-2)}$ .
- 2** Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:      α.  $\frac{a-2}{(4-a)^2}$       β.  $\frac{(a-\beta)(\beta-\gamma)}{(\beta-a)(\gamma-\beta)}$
- 3** Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:      α.  $\frac{x^2+xy}{y^2+xy}$       β.  $\frac{4a^2-16}{(a-2)^2}$
- 4** Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:      α.  $\frac{x^2-3x+2}{x^2-4x+4}$       β.  $\frac{a^3-2a^2+a}{a-a^3}$
- 5** Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:      α.  $\frac{x(x-2)+4(x-2)}{x^2+2x-8}$       β.  $\frac{a(a-3)+a^2-9}{4a^2-9}$
- 6** Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:      α)  $\frac{x^2-y^2}{x^2-x-y-y^2}$       β)  $\frac{(x^2-9)^2-(x+3)^2}{x^3-3x^2-9x+27}$
- 7** Να απλοποιηθούν τα κλάσματα:      α)  $\frac{(x^4+x^2-2) \cdot (x-1)}{[9x^{22}-(2x+1)^2]^2}$       β)  $\frac{x^4-y^4}{x^3-x^2 \cdot y+x \cdot y^2-y^3}$
- 8** Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:      α)  $\frac{(a^2+a\beta+2a) \cdot (4a^2-4\beta^2)}{(a+\beta+1)^2-1}$       β)  $\frac{a(a-2)^2-(3a+1) \cdot (4-a^2)}{(a^2-4)(4a^2+5a+2)}$

## ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗΣ

## Άσκηση 1

Να απλοποιήσετε τα κλάσματα:

$$\alpha) \frac{3+6+9+\dots+300}{4+8+12+\dots+400}$$

$$\beta) \frac{3x+6x+9x+\dots+300x}{4x+8x+12x+\dots+400x}$$

## Άσκηση 2

Ένα ορθογώνιο έχει εμβαδόν  $x^2 + 7x + 12$  και μήκος  $x + 4$ . Ποιο είναι το πλάτος του;

## Άσκηση 3

Να απλοποιηθεί το κλάσμα:  $\frac{x^3 + 8}{x^2 + 2x + 4}$