

1.6 Παραγοντοποίηση αλγεβρικών παραστάσεων

Ερώτηση 1

Τι λέμε παραγοντοποίηση;

Απάντηση

Παραγοντοποίηση είναι η διαδικασία κατά την οποία μετατρέπουμε μια αλγεβρική παράσταση σε γινόμενο όσο το δυνατόν απλούστερων παραγόντων.

π.χ. $2x - 4 = 2(x - 2)$.

Κάναμε παραγοντοποίηση βγάζοντας κοινό παράγοντα το 2.

π.χ. $x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2)$

Κάνουμε παραγοντοποίηση χρησιμοποιώντας ταυτότητα.

Ερώτηση 2

Πότε λέμε ότι μια παράσταση έχει αναλυθεί σε γινόμενο πρώτων παραγόντων;

Απάντηση

Η παράσταση που δεν επιδέχεται περαιτέρω παραγοντοποίηση λέμε ότι έχει αναλυθεί σε **γινόμενο πρώτων παραγόντων**.

Ερώτηση 3

Ποιές είναι οι πιο χαρακτηριστικές περιπτώσεις παραγοντοποίησης μιας αλγεβρικής παράστασης; Δώστε από ένα παράδειγμα.

Απάντηση

Διάφορες μορφές παραγοντοποίησης:

1η περίπτωση: Κοινός παράγοντας (από όλους τους όρους)

Παράδειγμα 1. Να κάνετε γινόμενα τις παραστάσεις

α. $xy^3 - 3xy + 2x - 6xy^2$ β. $2x^2y - 6xy^2 + 8xy^2$

Λύση

α. Παρατηρούμε ότι εμφανίζεται σε όλους τους όρους το x.

Με εφαρμογή της επιμεριστικής ιδιότητας έχουμε:

$$xy^3 - 3xy + 2x - 6xy^2 = x(y^3 - 3y + 2 - 6y^2)$$

β. Όλοι οι όροι της παράστασης έχουν κοινό παράγοντα το 2xy.

Συνεπώς: $2x^2y - 6xy^2 + 8xy^2 = 2xy(x - 3y + 4y)$

2η περίπτωση: Ομαδοποίηση (Κοινός παράγοντας κατά ομάδες)

Παράδειγμα 2. Να παραγοντοποιηθούν οι αλγεβρικές παραστάσεις

α. $xy - 3x + 2y - 6$ β. $3x^3 - x^2y + 6x - 2y$

Λύση

α. Η παράσταση χωρίζεται σε ομάδες που έχουν κοινό παράγοντα.

$$xy - 3x + 2y - 6 =$$

$$x(y - 3) + 2(y - 3) = (y - 3)(x + 2)$$

β. $3x^3 - x^2y + 6x - 2y =$

$$(3x^3 - x^2y) + (6x - 2y) =$$

$$= x^2(3x - y) + 2(3x - y) = (x^2 + 2)(3x - y)$$

3η περίπτωση: Χρήση ταυτοτήτων

3α. Ανάπτυγμα τετραγώνου

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Παράδειγμα 3α. Να παραγοντοποιήσετε τις αλγεβρικές παραστάσεις

i) $25x^2 - 20xy + 4y^2$

ii) $9x^2 - 24xy + 16y^2$

iii) $16x^2 + 40xy + 25y^2$

Λύση

i) $25x^2 - 20xy + 4y^2 =$

$$(5x)^2 - 2 \cdot 5x \cdot 2y + (2y)^2 = (5x - 2y)^2$$

ii) $9x^2 - 24xy + 16y^2 =$

$$(3x)^2 - 2 \cdot 3x \cdot 4y + (4y)^2 = (3x - 4y)^2$$

iii) $16x^2 + 40xy + 25y^2 =$

$$(4x)^2 + 2 \cdot 4x \cdot 5y + (5y)^2 = (4x + 5y)^2$$

3β. Διαφορά τετραγώνων

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$$

Παράδειγμα 3β. Να παραγοντοποιήσετε τις αλγεβρικές παραστάσεις

i) $25x^2 - 4y^2$

ii) $16x^4 - y^8$

Λύση

i) $25x^2 - 4y^2 = (5x)^2 - (2y)^2 =$

$$(5x - 2y)(5x + 2y)$$

ii) $16x^4 - y^8 = (4x^2)^2 - (y^4)^2 =$

$$(4x^2 + y^4)(4x^2 - y^4) =$$

$$(4x^2 + y^4)[(2x)^2 - (y^2)^2] =$$

$$(4x^2 + y^4)(2x + y^2)(2x - y^2)$$

3γ. Άθροισμα - Διαφορά κύβων

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

Παράδειγμα 3γ. Να παραγοντοποιήσετε τις αλγεβρικές παραστάσεις

i) $x^3 - 64$

ii) $8x^3 + 27$

Λύση

i) $x^3 - 64 = x^3 - 4^3 = (x - 4)(x^2 + 4x + 4^2) =$

$$(x - 4)(x^2 + 4x + 16)$$

ii) $8x^3 + 27 = (2x)^3 + 3^3 =$

$$(2x + 3)[(2x)^2 - 2x \cdot 3 + 3^2] =$$

$$(2x + 3)(4x^2 - 6x + 9)$$

3δ. Τριώνυμο 2^{ου} βαθμού

$$x^2 + (a + b)x + ab = (x + a)(x + b)$$

Θα γνωρίσουμε, αργότερα, ένα τρόπο πιο γενικό όταν θέλουμε να παραγοντοποιήσουμε ένα τριώνυμο 2^{ου} βαθμού, δηλαδή μία παράσταση της μορφής:

$$ax^2 + bx + \gamma, \quad a \neq 0$$

Προς το παρόν περιοριζόμαστε σε τριώνυμα της μορφής:

$x^2 + kx + \eta$, οπότε με χρήση της ταυτότητας:

$x^2 + (a + b)x + ab = (x + a)(x + b)$, αναζητούμε δύο αριθμούς α, β που να έχουν άθροισμα k και γινόμενο η .

Παράδειγμα 3δ. Να παραγοντοποιηθούν τα τριώνυμα

1.6 Παραγοντοποίηση αλγεβρικών παραστάσεων

i) $x^2 - 5x + 6$ ii) $x^2 + 4x + 3$ iii) $x^2 - x - 2$

Λύση

i) Οι ζητούμενοι αριθμοί είναι οι $-2, -3$, αφού

$$(-2) + (-3) = -5 \text{ και } (-2) \cdot (-3) = 6.$$

$$\text{Άρα } x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3)$$

ii) Οι ζητούμενοι αριθμοί είναι οι $1, 3$ αφού $1 + 3 = 4$ και

$$1 \cdot 3 = 3.$$

$$\text{Άρα: } x^2 + 4x + 3 = (x + 1)(x + 3)$$

iii) Οι ζητούμενοι αριθμοί είναι οι $-2, 1$ αφού $(-2) + 1 = -1$

$$\text{και } (-2) \cdot 1 = -2.$$

$$\text{Άρα: } x^2 - x - 2 = (x - 2)(x + 1)$$

4η περίπτωση: Συνδυασμός των παραπάνω περιπτώσεων

Παράδειγμα 4α.

Να παραγοντοποιηθούν οι παραστάσεις

i) $2x^2 - 18$ ii) $-x^2 + 2xy - y^2 + 9$

iii) $x - y + x^2 - 2xy + y^2$ iv) $x^9 - x^7 - x^5 + x^3$

Λύση

i) $2x^2 - 18 = 2(x^2 - 9) =$

$$2(x^2 - 3^2) = 2(x - 3)(x + 3)$$

ii) $-x^2 + 2yx - y^2 + 9 = 9 - (x^2 - 2xy + y^2) =$

$$9 - (x - y)^2 = 3^2 - (x - y)^2 =$$

$$[3 - (x - y)][3 + (x - y)] =$$

$$(3 + x - y) \cdot (3 - x + y)$$

iii) $x - y + x^2 - 2xy + y^2 = (x - y) + (x - y)^2 =$
 $(x - y)[1 + (x - y)] = (x - y)(1 + x - y)$

iv) $x^9 - x^7 - x^5 + x^3 = x^3(x^6 - x^4 - x^2 + 1) =$

$$x^3[x^4(x^2 - 1) - (x^2 - 1)] =$$

$$x^3(x^2 - 1)(x^4 - 1) =$$

$$x^3(x^2 - 1)[(x^2)^2 - 1^2] =$$

$$x^3(x^2 - 1)(x^2 - 1)(x^2 + 1) =$$

$$x^3(x + 1)(x - 1)(x + 1)(x - 1)(x^2 + 1) =$$

$$x^3(x + 1)^2(x - 1)^2(x^2 + 1)$$

Παράδειγμα 4β

(Σπάσιμο ή Προσθαφαίρεση όρου)

Να γίνουν γινόμενα οι παραστάσεις

i) $x^2 + 2xy - 3y^2$ ii) $x^4 + 5x^2 + 9$

Λύση

i) Σπάμε το $-3y^2$ σε $y^2 - 4y^2$

$$x^2 + 2xy - 3y^2 = x^2 + 2xy + y^2 - 4y^2 =$$

$$(x + y)^2 - (2y)^2 = (x + y + 2y)(x + y - 2y) =$$

$$(x + 3y)(x - y)$$

ii) Προσθαφαιρούμε το x^2

$$x^4 + 5x^2 + 9 = x^4 + 5x^2 + 9 + x^2 - x^2 =$$

$$x^4 + 6x^2 + 9 - x^2 = (x^2 + 3)^2 - x^2 =$$

$$(x^2 + 3 + x)(x^2 + 3 - x) =$$

$$(x^2 + x + 3)(x^2 - x + 3)$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ - ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:

1

- α. $5x + 5y$ β. $4x + 4$
 γ. $16 - 8x$ δ. $x^3 - x^2y$
 ε. $6x^2 - 4x$ στ. $3a^2xy - 12a^3x^2y$ ζ. $xy^2 - x^2y$
 η. $a\beta^2\gamma^3 - a^2\beta\gamma^2$ θ. $-κ\eta - 3κ$ ι. $\sqrt{2}x - \sqrt{6}y$

Λύση

- α. $5x + 5y = 5(x + y)$ β. $4x + 4 = 4(x + 1)$
 γ. $16 - 8x = 8(2 - x)$ δ. $x^3 - x^2y = x^2(x - y)$
 ε. $6x^2 - 4x = 2x(3x - 2)$
 στ. $3a^2xy - 12a^3x^2y = 3a^2xy(1 - 4ax)$
 ζ. $xy^2 - x^2y = xy(y - x)$ η. $a\beta^2\gamma^3 - a^2\beta\gamma^2 = a\beta\gamma^2(\beta\gamma - a)$
 θ. $-κ\eta - 3κ = -κ(\eta + 3)$ ι. $\sqrt{2}x - \sqrt{6}y = \sqrt{2}x - \sqrt{3} \cdot \sqrt{2}y = \sqrt{2}(x - \sqrt{3}y)$

Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:

2

- α. $2x(x - y) + 5y(x - y)$ β. $10(x + y) + 2a(x + y)$
 γ. $\mu(x - y) - x + y$ δ. $\rho(a - \beta) - 2(\beta - a)$
 ε. $4\omega(a + \beta) - a - \beta$ στ. $2x(x - 1) - x + 1$
 ζ. $5x(a - 1)^3 + (a - 1)^2$ η. $\gamma(a - 1)^2 - (1 - a)$
 θ. $(2x + 3) \cdot (3x - 5) + (4x + 5) \cdot (5 - 3x)$

Λύση

- α. $2x(x - y) + 5y(x - y) = (x - y) \cdot (2x + 5y)$
 β. $10(x + y) + 2a(x + y) = 2(x + y) \cdot (5 + a)$
 γ. $\mu(x - y) - x + y = \mu(x - y) - (x - y) = (x - y) \cdot (\mu - 1)$
 δ. $\rho(a - \beta) - 2(\beta - a) = \rho(a - \beta) + 2(a - \beta) = (a - \beta) \cdot (\rho + 2)$
 ε. $4\omega(a + \beta) - a - \beta = 4\omega(a + \beta) - (a + \beta) = (a + \beta) \cdot (4\omega - 1)$
 στ. $2x(x - 1) - x + 1 = 2x(x - 1) - (x - 1) = (x - 1) \cdot (2x - 1)$
 ζ. $5x(a - 1)^3 + (a - 1)^2 = (a - 1)^2 [5x(a - 1) + 1] = (a - 1)^2 \cdot (5ax - 5x + 1)$
 η. $\gamma(a - 1)^2 - (1 - a) = \gamma(a - 1)^2 + (a - 1) = (a - 1)[\gamma(a - 1) + 1] = (a - 1)(a\gamma - \gamma + 1)$
 θ. $(2x + 3) \cdot (3x - 5) + (4x + 5) \cdot (5 - 3x) = (2x + 3) \cdot (3x - 5) - (4x + 5) \cdot (3x - 5) = (3x - 5)(2x + 3 - 4x - 5) = (3x - 5) \cdot (-2x + 8)$

Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:

3

- α. $\beta x - a\beta + x^2 - ax$ β. $x + y - ax - ay$
 γ. $3ax - ay - 3\beta x + \beta y$ δ. $xy^2 + x\omega - y^2z - \omega z$
 ε. $6x^2 - 4ax - 9\beta x + 6a\beta$
 στ. $5\gamma x - 8\gamma y + 5\beta x - 8\beta y$ ζ. $x^3 + x^2y + xy^2 + y^3$
 η. $a^3 + 15 + 5a^2 + 3a$ θ. $x^3 - 5x^2 + 2x - 10$
 ι. $ax^3 + ay^2x + \beta x^3 + \beta y^2x$

Λύση

$$\alpha. \beta x - \alpha\beta + x^2 - \alpha x = \beta(x - \alpha) + x(x - \alpha) = (x - \alpha) \cdot (\beta + x)$$

$$\beta. x + y - \alpha x - \alpha y = x - \alpha x + y - \alpha y = \\ x(1 - \alpha) + y(1 - \alpha) = (1 - \alpha) \cdot (x + y)$$

$$\gamma. 3\alpha x - \alpha y - 3\beta x + \beta y = 3\alpha x - 3\beta x + \beta y - \alpha y = \\ 3x(\alpha - \beta) - y(\alpha - \beta) = (\alpha - \beta) \cdot (3x - y)$$

$$\delta. xy^2 + x\omega - y^2z - \omega z = x(y^2 + \omega) - z(y^2 + \omega) = (y^2 + \omega) \cdot (x - z)$$

$$\epsilon. 6x^2 - 4\alpha x - 9\beta x + 6\alpha\beta = 2x(3x - 2\alpha) - 3\beta(3x - 2\alpha) = \\ (3x - 2\alpha) \cdot (2x - 3\beta)$$

$$\sigma\tau. 5\gamma x - 8\gamma y + 5\beta x - 8\beta y = 5\gamma x + 5\beta x - 8\gamma y - 8\beta y = \\ 5x(\gamma + \beta) - 8y(\gamma + \beta) = (\gamma + \beta) \cdot (5x - 8y)$$

$$\zeta. x^3 + x^2y + xy^2 + y^3 = x^2(x + y) + y^2(x + y) = (x + y) \cdot (x^2 + y^2)$$

$$\eta. a^3 + 15 + 5a^2 + 3a = a^3 + 3a + 15 + 5a^2 = \\ a(a^2 + 3) + 5(a^2 + 3) = (a^2 + 3) \cdot (a + 5)$$

$$\theta. x^3 - 5x^2 + 2x - 10 = x^2(x - 5) + 2(x - 5) = (x - 5) \cdot (x^2 + 2)$$

$$\iota. \alpha x^3 + \alpha y^2 x + \beta x^3 + \beta y^2 x = \alpha x(x^2 + y^2) + \beta x(x^2 + y^2) = \\ x(x^2 + y^2) \cdot (\alpha + \beta)$$

4

Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:

α. $y^2 - a^2$

β. $25a^2 - 1$

γ. $a^2 - 16\beta^2$

δ. $1 - 4x^2$

ε. $16a^2 - 9\beta^2$

στ. $4x^2 - 25$

ζ. $25a^2x^2 - 36\beta^2\gamma^4$

η. $36 - (x + 4)^2$

θ. $x^{2\mu} - x^{2\nu}$

ι. $a^2 - 36\beta^2\gamma^4$

Λύση

α. $y^2 - a^2 = (y - a) \cdot (y + a)$

β. $25a^2 - 1 = (5a)^2 - 1^2 = (5a - 1) \cdot (5a + 1)$

γ. $a^2 - 16\beta^2 = a^2 - (4\beta)^2 = (a - 4\beta) \cdot (a + 4\beta)$

δ. $1 - 4x^2 = 1^2 - (2x)^2 = (1 - 2x) \cdot (1 + 2x)$

ε. $16a^2 - 9\beta^2 = (4a)^2 - (3\beta)^2 = (4a - 3\beta) \cdot (4a + 3\beta)$

στ. $4x^2 - 25 = (2x)^2 - 5^2 = (2x - 5) \cdot (2x + 5)$

ζ. $25a^2x^2 - 36\beta^2\gamma^4 = (5ax)^2 - (6\beta\gamma^2)^2 = \\ (5ax - 6\beta\gamma^2) \cdot (5ax + 6\beta\gamma^2)$

η. $36 - (x + 4)^2 = 6^2 - (x + 4)^2 = (6 + x + 4) \cdot (6 - x - 4)$

θ. $x^{2\mu} - x^{2\nu} = (x^\mu)^2 - (x^\nu)^2 = (x^\mu - x^\nu) \cdot (x^\mu + x^\nu)$

ι. $a^2 - 36\beta^2\gamma^4 = a^2 - (6\beta\gamma^2)^2 = (a - 6\beta\gamma^2) \cdot (a + 6\beta\gamma^2)$

5

Να γραφούν ως γινόμενο οι παραστάσεις:

α. $a^2 - 10a + 25$

β. $x^2 + 8x + 16$

γ. $9x^2y^2 - 12xy + 4$

δ. $9a^4 - 6a^2\beta^2 + \beta^4$

ε. $(x + y)^2 - 2(x + y) + 1$

στ. $\frac{a^2}{4} - \frac{a\beta}{3} + \frac{\beta^2}{9}$

ζ. $(x - y)^2 + 8(x - y) + 16$

η. $16x^2 - 24xy + 9y^2$

θ. $x^2 + 2\sqrt{2}x + 2$

ι. $x^4 - 2x^2y^2 + y^4$

Λύση

- α. $a^2 - 10a + 25 = a^2 - 2 \cdot 5 \cdot a + 5^2 = (a - 5)^2$
- β. $x^2 + 8 \cdot x + 16 = x^2 + 2 \cdot 4 \cdot x + 4^2 = (x + 4)^2$
- γ. $9 \cdot x^2 \cdot y^2 - 12xy + 4 = (3xy)^2 - 2 \cdot 3xy \cdot 2 + 2^2 = (3xy - 2)^2$
- δ. $9a^4 - 6a^2\beta^2 + \beta^4 = (3a^2)^2 - 2 \cdot 3a^2 \cdot \beta^2 + (\beta^2)^2 = (3a^2 - \beta^2)^2$
- ε. $(x + y)^2 - 2(x + y) + 1 = (x + y)^2 - 2(x + y) + 1^2 = (x + y - 1)^2$
- στ. $\frac{a^2}{4} - \frac{a\beta}{3} + \frac{\beta^2}{9} = \left(\frac{a}{2}\right)^2 - 2 \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{\beta}{3} + \left(\frac{\beta}{3}\right)^2 = \left(\frac{a}{2} - \frac{\beta}{3}\right)^2$
- ζ. $(x - y)^2 + 8(x - y) + 16 = (x - y)^2 + 2 \cdot 4(x - y) + 4^2 = (x - y + 4)^2$
- η. $16x^2 - 24xy + 9y^2 = (4x)^2 - 2 \cdot 4x \cdot 3y + (3y)^2 = (4x - 3y)^2$
- θ. $x^2 + 2\sqrt{2}x + 2 = x^2 + 2\sqrt{2}x + (\sqrt{2})^2 = (x + \sqrt{2})^2$
- ι. $x^4 - 2x^2y^2 + y^4 = (x^2)^2 - 2x^2y^2 + (y^2)^2 = (x^2 - y^2)^2$

6 Να παραγοντοποιήσετε τα πολυώνυμα:

- α. $x^2 - 8x + 15$ β. $x^2 - 2x - 15$
 γ. $14 - 5x - x^2$ δ. $x^2 + 9x + 20$
 ε. $x^2 + x - 30$

Λύση

- α. $x^2 - 8x + 15 = (x - 3) \cdot (x - 5)$
 διότι $(-3) \cdot (-5) = 15$ και $-3 + (-5) = -8$
- β. $x^2 - 2x - 15 = (x + 3) \cdot (x - 5)$
 διότι $3 \cdot (-5) = -15$ και $3 + (-5) = -2$

γ. $14 - 5x - x^2 = -(x^2 + 5x - 14) = -(x - 2) \cdot (x + 7)$

διότι $-2 \cdot 7 = -14$ και $-2 + 7 = 5$

δ. $x^2 + 9x + 20 = (x + 5) \cdot (x + 4)$

διότι $4 \cdot 5 = 20$ και $5 + 4 = 9$

ε. $x^2 + x - 30 = (x + 6) \cdot (x - 5)$

διότι $6 \cdot (-5) = -30$ και $6 + (-5) = 1$

7 Να γραφούν σε μορφή γινομένου οι παραστάσεις:

α. $x^2 - 2x - y^2 + 1$

β. $x^2 - 6x + 9 - y^2$

γ. $y^2 - x^2 - 10y + 25$

δ. $9x^2 - 36y^2 - 30x + 25$

ε. $\omega^2 - x^2 - 6x - 9$

στ. $x^2 - y^2 - 4x + 4$

ζ. $x^2 - y^2 - 4yz - 4z^2$

η. $x^2 + 6ax - 9y^2 + 9a^2$

Λύση

α. $x^2 - 2x - y^2 + 1 = x^2 - 2x + 1 - y^2 = (x - 1)^2 - y^2 = (x - 1 + y) \cdot (x - 1 - y)$

β. $x^2 - 6x + 9 - y^2 = (x^2 - 6x + 9) - y^2 = (x - 3)^2 - y^2 = (x - 3 + y) \cdot (x - 3 - y)$

γ. $y^2 - x^2 - 10y + 25 = y^2 - 10y + 25 - x^2 = (y - 5)^2 - x^2 = (y - 5 + x) \cdot (y - 5 - x)$

δ. $9x^2 - 36y^2 - 30x + 25 = 9x^2 - 30x + 25 - 36y^2 = (3x - 5)^2 - (6y)^2 = (3x - 5 + 6y) \cdot (3x - 5 - 6y)$

ε. $\omega^2 - x^2 - 6x - 9 = \omega^2 - (x^2 + 6x + 9) = \omega^2 - (x + 3)^2 = (\omega + x + 3) \cdot (\omega - x - 3)$

$$\sigma\tau. x^2 - y^2 - 4x + 4 = x^2 - 4x + 4 - y^2 = (x-2)^2 - y^2 = (x-2+y) \cdot (x-2-y)$$

$$\zeta. x^2 - y^2 - 4yz - 4z^2 = x^2 - (y^2 + 4yz + 4z^2) = x^2 - (y+2z)^2 = (x+y+2z) \cdot (x-y-2z)$$

$$\eta. x^2 + 6ax - 9y^2 + 9a^2 = x^2 + 6ax + 9a^2 - 9y^2 = (x+3a)^2 - (3y)^2 = (x+3a+3y) \cdot (x+3a-3y)$$

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1 Ποιες από τις παρακάτω παραστάσεις είναι γινόμενο παραγόντων;

α. $3(a-\beta)(a+\beta)$

β. $2+(x-y)(x+y)$

γ. $4(a-\beta)^2$

δ. $4+(a-\beta)^2$

ε. $(2a+\beta)\beta-a$

στ. $(x+2y)(x-y)$

ζ. $(a+\beta)(a+3\beta)$

η. $(a+\beta)(a+3\beta)+1$

2 Να συμπληρώσετε τα κενά στις παρακάτω ισότητες.

α. $8x+16=8(\dots\dots)$

β. $3ay-y^2=y(\dots\dots)$

γ. $6x^2+12x=\dots\dots(x+2)$

δ. $-4x^2+8x=-4x(\dots\dots)$

ε. $\sqrt{2}x+\sqrt{2}=\sqrt{2}(\dots\dots)$

στ. $(x-1)^2-(x-1)=(x-1)(\dots\dots)$

3 Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση.

Η παράσταση $3x^3+3x^2+x+1$ παραγοντοποιείται ως εξής:

α. $3x^2(x+1)$

β. $(x+3)(3x^2-1)$

γ. $(x+1)(3x^2+1)$

δ. $x(3x^2+x+1)$

4 Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω ισότητες με (Σ), αν είναι σωστές ή με (Λ), αν είναι λανθασμένες.

α. $x^2-2^2=(x-2)(x+2)$

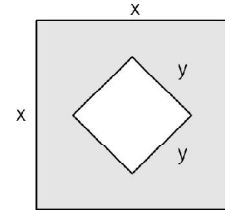
β. $x^2-9=(x-9)(x+9)$

γ. $112^2-12^2=100 \cdot 124$

δ. $4y^2-1=(4y-1)(4y+1)$

ε. $4x^2-a^2=(2x-a)(2x+a)$

στ. $a^2-(\beta-1)^2=(a+\beta-1)(a-\beta-1)$



5 Αν ισχυριστούμε ότι το εμβαδόν του πράσινου μέρους είναι $(x-y)(x+y)$, αυτό είναι σωστό ή λάθος; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

6 Να συμπληρώσετε τα κενά στις παρακάτω ισότητες.

α. $a^3 - 2^3 = (a-2)(\dots\dots\dots)$ β. $a^3 + 3^3 = (a+3)(\dots\dots\dots)$

γ. $(2x)^3 - 1 = (2x-1)(\dots\dots\dots)$ δ. $1 + (5y)^3 = (1+5y)(\dots\dots\dots)$

7 Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω ισότητες με (Σ)μ αν είναι σωστές ή με (Λ), αν είναι λανθασμένες.

α. $x^3 - 5^3 = (x-5)(x^2 - 5x + 25)$

β. $8 + a^3 = (2+a)(2^2 - 2a + a^2)$

γ. $(3y)^3 + 1 = (3y^2 - 3y + 1)$

δ. $1 - (2\beta)^3 = (1-2\beta)(\alpha + 2\beta + 4\beta^2)$

8 Να συμπληρώσετε τα κενά στις παρακάτω ισότητες.

α. $x^2 + 6x + 9 = (\dots\dots\dots)^2$

β. $4a^2 - 4a + 1 = (\dots\dots\dots)^2$

γ. $y^4 - 2y^2 + 1 = (\dots\dots\dots)^2$

δ. $25 + 10x^3 + x^6 = (\dots\dots\dots)^2$

9 Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση

Ο κύκλος εμβαδού $\pi a^2 + 2\pi a + \pi$, με $a > 0$ έχει ακτίνα

α. $a+2$

β. a^2+1

γ. $a+1$

δ. $\pi(a+1)$

10 Να συμπληρώσετε τον πίνακα.

$x^2+(a+\beta)x+a\beta$	$a\beta$	$a + \beta$	a	β	$(x+a)(x+\beta)$
x^2+3x+2					
x^2-3x+2					
x^2+5x-6					
x^2+5x+6					
x^2-x-2					
x^2+x-2					

11 Να συμπληρώσετε τα κενά στις παρακάτω ισότητες.

α. $x^2 + (a+2)x + 2a = (x + \dots) \cdot (x + \dots)$

β. $x^2 + (\sqrt{2} + \sqrt{3})x + \sqrt{6} = (x + \dots) \cdot (x + \dots)$

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1 Να παραγοντοποιηθούν οι παραστάσεις:

i) $4x(x-2y) - x + 2y$

ii) $5a^2\beta x + \gamma y^2 - \gamma x - 5a^2\beta y^2$

iii) $36x^2 - 49y^2$

iv) $16x^4 - y^4$

v) $25x^2 - 20x + 4$

vi) $a^3\beta^3 - 27$

vii) $\omega^2 - \omega - 2$

viii) $y^2 + 6y - 40$

ix) $x^4 + x^2y^2 + y^4$

x) $x^2 + 6xy + 8y^2$

2 Να γίνουν γινόμενα οι παραστάσεις:

i) $y^2 + 2x - x^2 - 1$

ii) $5x^2 + 10x - 15$

iii) $(x+5)^2(x-2) + (4-x^2)(x+5)$

iv) $x^5 + x^2$

v) $(2x+1)(x-1)^2 - 9(2x+1)$

vi) $(a^3-1) - 2(a^2-1) - (a-1)^2$

3 Να παραγοντοποιηθούν οι παραστάσεις:

i) $\eta^2 - \eta + \frac{1}{4}$

ii) $(13x^2 - 5y^2)^2 - (12x^2 + 4y^2)^2$

iii) $\gamma^4 - (1 + a^2\beta^2)\gamma^2 + a^2\beta^2$

iv) $x^3 - 10x^2 + 9x$

v) $x^7 + 8x^4 - x^3 - 8$

vi) $(x+5)^6 + (x-6)^4 - 2(x-6)^2(x+5)^3$

4 Να παραγοντοποιηθούν οι παρακάτω παραστάσεις:

i) $a(a-3y) + \beta(x-a) - x(a-3y)$

ii) $a\beta^2 - 2a^2 + 2\beta^3 - 4a\beta$

iii) $375x^3 - 3$

iv) $(x+2y)^3 - (2x-y)^3$

v) $x^3 - x^2 + xy + x - y - 1$

vi) $(x-y)^3 + (y-z)^3 + (z-x)^3$

5 Να γίνουν γινόμενα οι παραστάσεις:

i) $(x-y)^2(z+\omega) - (x-y)^2(z-\omega) + z^2(z-\omega)^2 - z^2(z+\omega)^2$

ii) $a^2\beta + a\beta^2 + \beta^2\gamma + \beta\gamma^2 + \gamma^2a + \gamma a^2 + 2a\beta\gamma$

iii) $a^2\beta - a\beta^2 + \beta^2\gamma - \beta\gamma^2 + \gamma^2a - \gamma a^2$

iv) $x^2y^2 + (x^2 + y^2)(x+y)^2$

6 α) Να παραγοντοποιήσετε την παράσταση $a^2\beta - a + \beta - a\beta^2$.

β) Αν για τους άνισους αριθμούς a, β ισχύει: $a^2\beta - a = a\beta^2 - \beta$, να αποδείξετε ότι οι αριθμοί a, β είναι αντίστροφοι.

7 Αν δύο ακέραιοι διαιρούμενοι με το 6 δίνουν το ίδιο υπόλοιπο, τότε να αποδείξετε ότι, η διαφορά τετραγώνων τους είναι πολλαπλάσιο του 12.

8 Να αποδείξετε ότι: (Απ.: $a = 6κ + u, β = 6η + u, a^2 - β^2 = \dots = 12(κ - η)(3κ + 3η + u)$)

α) Ο αριθμός $κ^2 + κ$ είναι άρτιος, όπου $κ$ ακέραιος αριθμός.

β) Ο αριθμός $κ^2 + 7κ$ είναι άρτιος, όπου $κ$ ακέραιος αριθμός.

γ) Το τετράγωνο ενός περιττού ακεραίου διαιρούμενο διά 8 δίνει υπόλοιπο 1.

ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗΣ

Άσκηση 1

A. Να συμπληρώσετε τα κενά στις παρακάτω ισότητες.

α) $3x^2 + 27xy - 9xw - 15x = 3x(\dots\dots\dots)$ β) $a(x^3 - 7) - β(x^3 - 7)x^3 + 2 + (x^3 - 7) = (\dots\dots\dots)(\dots\dots\dots)$

γ) $16x^2 - 4 = (\dots\dots\dots - 2)(\dots\dots\dots + 2)$ δ) $9x^2 - 24x + 16 = (\dots\dots\dots)^2$ ε) $x^2 + (5 + 6)x + 5 \cdot 6 = (\dots\dots\dots)(\dots\dots\dots)$

B. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω ισότητες με (Σ), αν είναι σωστές ή με (Λ) αν είναι λανθασμένες.

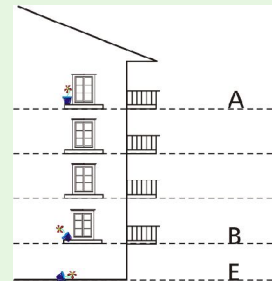
α) $x^2(a - β) - (a - β) = (a - β)x^2$ β) $16 - 8a + a^2 = (a - 4)^2$ γ) $x^3 - 1 = (x + 1)(x^2 + x + 1)$

Άσκηση 2

Αν αφήσουμε ένα σώμα να πέσει από το σημείο A, τότε μέχρι να φτάσει στο έδαφος θα μεσοληβήσει χρόνος t_1 sec. Αν το αφήσουμε να πέσει από το σημείο B, θα μεσοληβήσει χρόνος t_2 που είναι 2 sec μικρότερος. Αν το άθροισμα των χρόνων t_1, t_2 είναι 6 sec, να υπολογίσετε την απόσταση AB.

($g = 10 \text{ m/sec}$).

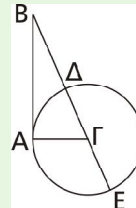
(3 Μονάδες)



Άσκηση 3

Αν στο ορθογώνιο τρίγωνο ABΓ ($A = 90^\circ$) είναι:

$BD = 2\text{cm}, BE = 8\text{cm}$, να εξηγήσετε γιατί $AB = 4\text{cm}$.



Άσκηση 4

Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις: $A = x^4 - x^2, B = x^3 + 2x^2 - x - 2$ και $A - B$.