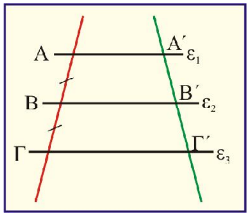
1.2-1.3 Λόγος ευθυγράμμων τμημάτων - θεώρημα Θαλή

Ερώτηση 1

Διατυπώστε το θεώρημα που ισχύει για τα τμήματα που ορίζουν τρείς παράλληλες ευθείες πάνω σε δύο μη παράλληλες.

Απάντηση

Όταν τρεις τουλάχιστον παράλληλες ευθείες ορίζουν ίσα τμήματα σε μια ευθεία τότε θα ορίζουν ίσα τμήματα και σε κάθε άλλη ευθεία που τις τέμνει.



Δηλαδή στο διπλανό σχήμα:

Αν ΑΒ = ΒΓ τότε Α΄Β΄ = Β΄Γ΄

Ερώτηση 2

Πως διαιρούμε ευθύγραμμο τμήμα σε ν ίσα ευθύγραμμα τμήματα; (εφαρμογή για ν = 5).

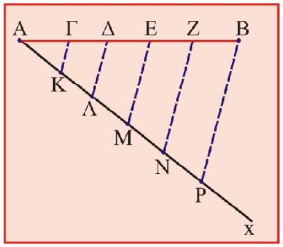
Απάντηση

Αν ισχύουν $\left.\begin{matrix} \varepsilon_1 // \varepsilon_2 // \varepsilon_3 \\ AB = B\Gamma \end{matrix}\right\}$ τότε $A'B' = B'\Gamma'$

Μια εφαρμογή της παραπάνω θεωρίας είναι η διαίρεση ευθ.τμήματος σε ν ίσα ευθ. τμήματα.

π.χ. για να χωρίσουμε το ΑΒ σε 5 ίσα ευθ. τμήματα φέρνουμε μια ημιευθεία Αx και πάνω σ' αυτήν παίρνουμε 5 ίσα τμήματα, έστω τα ΑΚ = ΚΛ = ΛΜ = ΜΝ = ΝΡ

Ενώνουμε το Ρ με το Β και απο τα σημεία Κ, Λ, Μ, Ν φέρνουμε παράλληλες προς την ΒΡ. Τότε τα τμήματα που ορίζονται πάνω στο ΑΒ είναι ίσα δηλ. ΑΓ = ΓΔ = ΔΕ = ΕΖ = ΖΒ



Ερώτηση 3

Τι ονομάζουμε λόγο δύο ευθύγραμμων τμημάτων και πως συμβολίζεται;

Απάντηση

Ο λόγος ενός ευθύγραμμου τμήματος ΓΔ προς το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ συμβολίζεται $\frac{\Gamma\Delta}{AB}$ και είναι ο αριθμός λ, για τον οποίο ισχύει $\Gamma\Delta = \lambda \cdot AB$.

Ερώτηση 4

Πότε λέμε ότι δυο ευθύγραμμα τμήματα α,γ είναι ανάλογα προς δυο άλλα β,δ;

Απάντηση

Τα ευθύγραμμα τμήματα α,γ είναι ανάλογα προς τα ευθύγραμμα τμήματα β,δ όταν ισχύει $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$.

Η ισότητα $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$ ονομάζεται **αναλογία** με όρους τα ευθύγραμμα τμήματα α,β,γ,δ.

Τα ευθύγραμματ τμήματα **α,δ** ονομάζονται **άκροι όροι**, ενώ τα ευθύγραμμα τμήματα **β,γ** ονομάζονται **μέσοι όροι** της αναλογίας.

Ερώτηση 5

Ποιες είναι οι σημαντικότερες ιδιότητες αναλογιών;

Απάντηση

- Σε κάθε αναλογία το γινόμενο των άκρων όρων είναι ίσο με το γινόμενο των μέσων όρων.

$$\boxed{\text{Αν } \frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta} \text{ τότε } \alpha\delta=\beta\gamma}$$

- Σε κάθε αναλογία μπορούμε να εναλλάξουμε τους μέσους ή τους άκρους όρους και να προκύψει και πάλι αναλογία.

$$\boxed{\text{Αν } \frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta} \text{ τότε } \frac{\alpha}{\gamma}=\frac{\beta}{\delta} \text{ ή } \frac{\delta}{\beta}=\frac{\gamma}{\alpha}}$$

- Λόγοι ίσοι μεταξύ τους είναι και ίσοι με το λόγο που έχει αριθμητή το άθροισμα των αριθμητών και παρονομαστή το άθροισμα των παρονομαστών.

$$\boxed{\text{Αν } \frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta} \text{ τότε } \frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}=\frac{\alpha+\gamma}{\beta+\delta}}$$

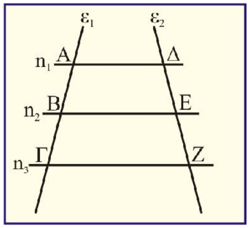
Ερώτηση 6

Διατυπώστε το θεώρημα του Θαλή.

Απάντηση

Όταν τρεις ή περισσότερες παράλληλες ευθείες τέμνουν δύο άλλες ευθείες, τότε τα τμήματα που ορίζονται στη μια είναι ανάλογα προς τα αντίστοιχα τμήματα που ορίζονται στην άλλη ευθεία.

Δείτε στο επόμενο σχήμα:

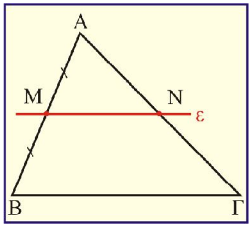


Αν $n_1 // n_2 // n_3$, τότε $\frac{AB}{B\Gamma}=\frac{\Delta E}{EZ}=\frac{A\Gamma}{\Delta Z}$

(ισχύει και το αντίστροφο του θεωρήματος).

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ – ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1 Η ευθεία που περνάει από το μέσο μιας πλευράς ενός τριγώνου και είναι παράλληλη προς μια άλλη πλευρά του, περνάει από το μέσο της τρίτης πλευράς.



Λύση

Θα αποδείξουμε τη συνεπαγωγή:

$$\text{Αν ισχύουν } \left.\begin{array}{l} M \text{ μέσο } AB \\ MN // B\Gamma \end{array}\right\} \text{ τότε } N \text{ μέσο της } A\Gamma$$

Πράγματι είναι $\frac{AN}{N\Gamma}=\frac{AM}{MB}=1$, άρα $AN=N\Gamma$.

2 Το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα μέσα δύο πλευρών ενός τριγώνου ισούται με το μισό της τρίτης πλευράς και είναι παράλληλο προς αυτήν.

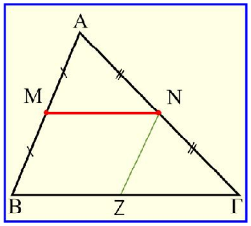
Λύση

Θα αποδείξουμε τη συνεπαγωγή:

Αν ισχύουν $\left.\begin{matrix} \text{M μέσο AB} \\ \text{N μέσο AΓ} \end{matrix}\right\}$ τότε $MN // = \dfrac{B\Gamma}{2}$

Πράγματι είναι $\dfrac{AM}{MB} = \dfrac{AN}{N\Gamma}$, άρα $AN // N\Gamma$.

Επίσης αν $NZ // AB$ τότε Z μέσο της ΒΓ λόγω (ασκ. 1) και ΜΝΖΒ παραλληλόγραμμο, οπότε $MN = BZ = \dfrac{B\Gamma}{2}$.

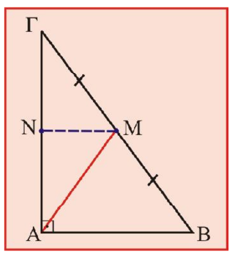


3

Η διάμεσος ορθογωνίου τριγώνου που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα είναι ίση με το μισό της υποτείνουσας.

Λύση

Δηλαδή στο διπλανό σχήμα ισχύει η συνεπαγωγή:



Αν $\left.\begin{matrix} \hat{AB\Gamma}\ (A = 90^\circ) \\ AM: \text{διάμεσος} \end{matrix}\right\}$ τότε $AM = \dfrac{B\Gamma}{2}$

Διότι αν Ν το μέσο της ΑΓ τότε

$\left.\begin{matrix} \text{M μέσο BΓ} \\ \text{N μέσο AΓ} \end{matrix}\right\}$ επομένως $MN // AB$

άρα $MN \perp A\Gamma$ (αφού $AB \perp A\Gamma$).
Δηλαδή το ΜΝ είναι μεσοκάθετος της ΑΓ.

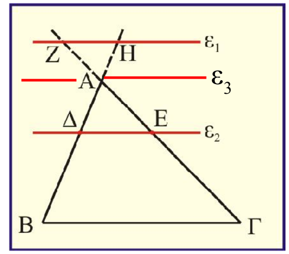
Άρα το Μ ισαπέχει από τα άκρα Α, Γ οπότε $AM = M\Gamma$, δηλ. $AM = \dfrac{B\Gamma}{2}$.

4

Κάθε ευθεία παράλληλη προς μια πλευρά ενός τριγώνου τέμνει τις δύο άλλες πλευρές (ή τις προεκτάσεις των) σε ίσους λόγους.

Λύση

Δηλαδή στο παρακάτω σχήμα ισχύει η συνεπαγωγή:



Αν $\varepsilon_2 // B\Gamma$ τότε $\dfrac{A\Delta}{\Delta B} = \dfrac{AE}{E\Gamma} = \dfrac{AB}{A\Gamma}$ ή

αν $\varepsilon_1 // B\Gamma$ τότε $\dfrac{AZ}{A\Gamma} = \dfrac{AH}{AB} = \dfrac{Z\Gamma}{HB}$

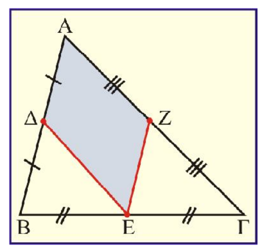
Διότι αν φέρουμε τη ΔΕ//ΒΓ και την (ε_3) παράλληλη στην ΒΓ τότε με εφαρμογή του Θ. Θαλή στίς ΒΓ, (ε_2) και (ε_3) και τέμνουσες τις ΑΒ και ΑΓ παίρνουμε: $\dfrac{A\Delta}{AB} = \dfrac{AE}{A\Gamma} = \dfrac{\Delta E}{B\Gamma}$

Όμοια με εφαρμογή του Θ. Θαλή στίς ΒΓ, (ε_1) και (ε_3) και τέμνουσες πάλι τις ΑΒ και ΑΓ παίρνουμε: $\dfrac{AZ}{A\Gamma} = \dfrac{AH}{AB} = \dfrac{Z\Gamma}{HB}$

5

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και Δ, Ε, Ζ μέσα των πλευρών ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ αντίστοιχα να δείξετε ότι ΑΔΕΖ είναι παραλ/μο.

Λύση



Στο $\hat{AB\Gamma}$

$\left.\begin{matrix} \text{Δ μέσο AB} \\ \text{E μέσο BΓ} \end{matrix}\right\}$ άρα $\Delta E // A\Gamma$ (1)

Στο $\hat{AB\Gamma}$

$\left.\begin{matrix} \text{E μέσο BΓ} \\ \text{Z μέσο AΓ} \end{matrix}\right\}$ άρα $EZ // AB$ (2)

Από (1) και (2) προκύπτει ότι το ΑΔΕΖ είναι παραλληλόγραμμο γιατί έχεις τις απέναντι πλευρές παράλληλες.

6 Δίνεται τετράπλευρο ΑΒΓΔ. Να δείξετε ότι τα μέσα των πλευρών του είναι κορυφές παραλληλογράμμου.

Λύση

Φέρνουμε τις διαγώνιες ΑΓ, ΒΔ.

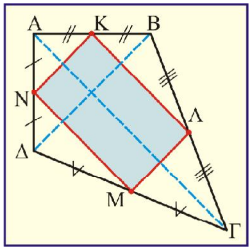
Τότε Στο $A\hat{B}\Gamma$
$\left.\begin{array}{l}K \text{ μέσο } AB\\ \Lambda \text{ μέσο } B\Gamma\end{array}\right\}$ τότε και $K\Lambda // A\Gamma$ (1)

Στο $A\hat{\Delta}\Gamma$
$\left.\begin{array}{l}M \text{ μέσο } \Gamma\Delta\\ N \text{ μέσο } A\Delta\end{array}\right\}$ τότε και $MN // A\Gamma$ (2)

Από (1) και (2) προκύπτει: $K\Lambda // MN$ (3)

Στο $A\hat{B}\Delta$
$\left.\begin{array}{l}K \text{ μέσο } AB\\ N \text{ μέσο } A\Delta\end{array}\right\}$ τότε $KN // B\Delta$ (4)

Στο $B\hat{\Gamma}\Delta$
$\left.\begin{array}{l}\Lambda \text{ μέσο } B\Gamma\\ M \text{ μέσο } \Gamma\Delta\end{array}\right\}$ τότε $M\Lambda // B\Delta$ (5)

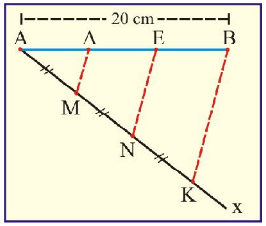


Από (4) και (5) προκύπτει: ΚΝ//ΜΛ (6)
Από τις σχέσεις (3) και (6) έχουμε ότι το ΚΛΜΝ είναι παραλληλόγραμο.

7 Να χωρίσετε το ευθ. τμήμα $AB = 20cm$ σε τρία ίσα ευθ. τμήματα.

Λύση

Φέρνουμε μια ημιευθεία Αx και πάνω σ' αυτήν τα διαδοχικά ίσα τμήματα ΑΜ, ΜΝ, ΝΚ. Φέρνουμε την ΒΚ και από τα Μ, Ν παραλλήλους προς την ΒΚ που τέμνουν την ΑΒ στα Δ, Ε αντίστοιχα, τότε $A\Delta = \Delta E = EB$.



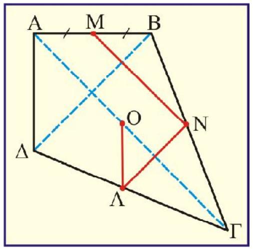
8 Δίνεται τετράπλευρο ΑΒΓΔ. Από το μέσο Μ της ΑΒ φέρνουμε παράλληλη στην ΑΓ η οποία τέμνει την ΒΓ στο Ν, από το Ν φέρνουμε παράλληλη στην ΒΔ η οποία τέμνει την ΓΔ στο Λ και από το Λ φέρνουμε παράλληλη στην ΑΔ που τέμνει την ΑΓ στο Ο. Να δείξετε ότι το Ο είναι μέσο της ΑΓ.

Λύση

$\left.\begin{array}{l}\text{Στο } A\hat{B}\Gamma\\ M \text{ μέσο } AB\\ MN // A\Gamma\end{array}\right\}$ τότε N μέσο $B\Gamma$

$\left.\begin{array}{l}\text{Στο } B\hat{\Gamma}\Delta\\ N \text{ μέσο } B\Gamma\\ N\Lambda // B\Delta\end{array}\right\}$ τότε Λ μέσο $\Gamma\Delta$

Στο $A\hat{\Gamma}\Delta$
$\left.\begin{array}{l}\Lambda \text{ μέσο } \Gamma\Delta\\ \Lambda O // A\Delta\end{array}\right\}$ τότε Ο μέσο ΑΓ



9 Να σχεδιάσετε ένα τμήμα ΑΒ = 12cm και στη συνέχεια να βρείτε τμήματα ίσα με: $\frac{1}{5}AB$, $\frac{4}{5}AB$, $\frac{7}{5}AB$.

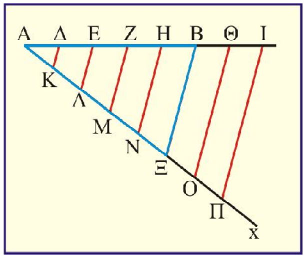
Λύση

Γράφουμε μια βοηθητική ευθεία Αx. Πάνω στην Αx παίρνουμε τα διαδοχικά και ίσα τμήματα ΑΚ = ΚΛ - ΛΜ = ΜΝ = ΝΞ = ΞΟ = ΟΠ. Ενώνουμε το Ξ με το Β και από τα υπόλοιπα σημεία φέρνουμε παράλληλες προς την ΒΞ.

άρα $\frac{1}{5}AB = A\Delta$,

$\frac{4}{5}AB = AH$,

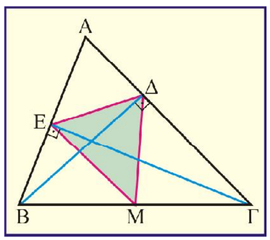
$\frac{7}{5}AB = AI$



10 Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και ΒΔ, ΓΕ τα ύψη του. Αν Μ μέσο της ΒΓ να δείξετε ότι το τρίγωνο ΜΔΕ είναι ισοσκελές.

Λύση

Αφού ΒΔ, ΓΕ είναι ύψη του ΑΒΓ τα τρίγωνα ΒΔΓ, ΒΕΓ είναι ορθογώνια τότε:



Στο $B\overset{\triangle}{\Delta}\Gamma$ ορθογώνιο η ΔΜ είναι διάμεσος, οπότε

$$\Delta M = \frac{B\Gamma}{2} \quad (1)$$

Στο $B\overset{\triangle}{E}\Gamma$ ορθογώνιο η ΕΜ είναι διάμεσος, οπότε $EM = \frac{B\Gamma}{2}$ (2)

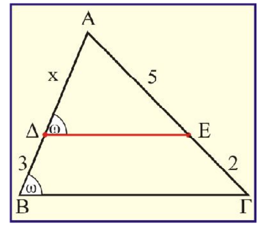
Από τις σχέσεις (1) και (2) συμπεραίνουμε ότι $\Delta M = EM$ άρα το τρίγωνο ΜΔΕ είναι ισοσκελές.

11 Να βρείτε το x εφαρμόζοντας θ.Θαλή στα τρίγωνα.

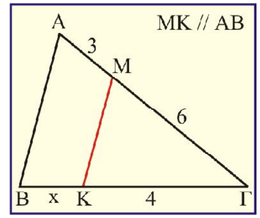
Λύση

α. ΔΕ//ΒΓ (αφού οι εντός εκτός και επί ταυτά γωνίες $\hat{B}$, $\hat{\Delta}$ είναι ίσες) άρα

$\frac{A\Delta}{\Delta B} = \frac{AE}{E\Gamma}$ ή $\frac{x}{3} = \frac{5}{2}$ ή $2x = 15$ ή $x = 7{,}5$

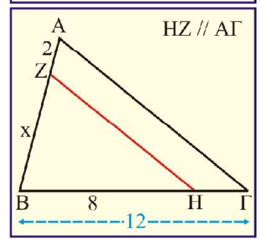


β. Επειδή ΚΜ// ΑΒ από θ. Θαλή έχουμε: $\frac{AM}{M\Gamma} = \frac{BK}{K\Gamma}$ ή $\frac{3}{6} = \frac{x}{4}$ ή $6x = 12$ ή $x = 2$.



γ. Αφού $B\Gamma = 12$ και $BH = 8$ τότε $H\Gamma = 4$ Επειδή ΖΗ // ΑΓ από θ. Θαλή έχουμε:

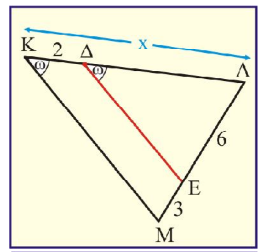
$\frac{BZ}{AZ} = \frac{BH}{H\Gamma}$ ή $\frac{x}{2} = \frac{8}{4}$ ή $4x = 16$ ή $x = 4$



δ. ΔΕ // ΚΜ (αφού οι εντός εκτός και επί ταυτά γωνίες $\hat{K}$, $\hat{\Delta}$ είναι ίσες).

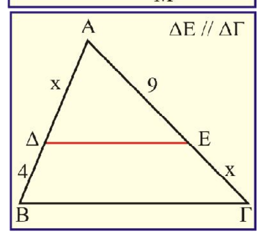
Άρα από θ. Θαλή έχουμε: $\frac{K\Lambda}{K\Delta} = \frac{\Lambda M}{ME}$

ή $\frac{x}{2} = \frac{9}{3}$ ή $3x = 18$ ή $x = 6$



ε. Επειδή ΔΕ // ΒΓ από θ. Θαλή έχουμε:

$\frac{A\Delta}{\Delta B} = \frac{AE}{E\Gamma}$ ή $\frac{x}{4} = \frac{9}{x}$ ή $x^2 = 36$ ή $x = 6$



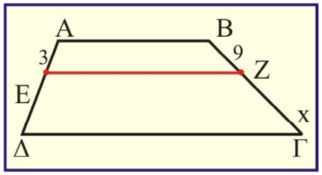
12 Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ και ΕΖ//ΑΒ//ΔΓ. Αν ΑΔ=9cm και ΑΕ = 3cm, ΒΖ = 9cm. Να βρείτε το x.

Λύση

$Ε\Delta = Α\Delta - \Delta Ε = 9 - 3 = 6$

$ΕΖ//ΑΒ//\Delta\Gamma$ τότε από θ. Θαλή έχουμε:

$$\frac{ΑΕ}{Ε\Delta} = \frac{ΒΖ}{Ζ\Gamma} \text{ ή } \frac{3}{6} = \frac{9}{x} \text{ ή } 3x = 54 \text{ ή } x = 18\,cm$$



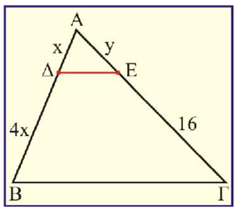
13 Στα παρακάτω σχήματα να υπολογίσετε τα x, y αν ΔΕ // ΒΓ.

Λύση

α. Από το θεώρημα του Θαλή έχουμε:

$$\frac{Α\Delta}{\Delta Β} = \frac{ΑΕ}{Ε\Gamma} \text{ ή } \frac{x}{4x} = \frac{y}{16} \text{ ή }$$

$$\frac{1}{4} = \frac{y}{16} \text{ ή } 4y = 16 \text{ ή } y = 4$$

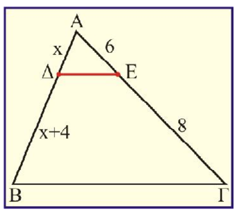


β. Όμοια έχουμε: $\frac{Α\Delta}{\Delta Β} = \frac{ΑΕ}{Ε\Gamma}$ ή

$$\frac{x}{x+4} = \frac{6}{8} \text{ ή } 8x = 6(x+4) \text{ ή }$$

$$8x = 6x + 24 \text{ ή } 8x - 6x = 24 \text{ ή }$$

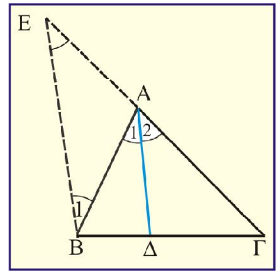
$$2x = 24 \text{ ή } x = 12$$



14 Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και ΑΔ η διχοτόμος της γωνίας $\hat{Α}$. Να δείξετε ότι $\frac{Β\Delta}{\Delta\Gamma} = \frac{ΑΒ}{Α\Gamma}$ (θεώρημα διχοτόμων)

Λύση

ΑΔ διχοτόμος άρα $\hat{Α}_1 = \hat{Α}_2$. Από το Β φέρνουμε παράλληλη προς την ΑΔ που τέμνει την ΑΓ στο Ε.



Αφού $Α\Delta // ΒΕ$ από θ. Θαλή έχουμε

$$\frac{Β\Delta}{\Delta\Gamma} = \frac{ΑΕ}{Α\Gamma} \quad (1)$$

Επίσης λόγω των παραλλήλων είναι

$$\left.\begin{array}{l} \hat{Α}_1 = \hat{Α}_2 \\ \hat{Α}_1 = \hat{Β}_1 \text{ (εντός εναλλάξ)} \\ \hat{Α}_2 = \hat{Ε} \text{ (εντός εκτός και επι τα αυτά)} \end{array}\right\} \text{τότε } \hat{Β}_1 = \hat{Ε}$$

Οπότε το τρίγωνο ΑΒΕ είναι ισοσκελές, άρα $ΑΕ = ΑΒ$ (2).

Από τις ισότητες (1) και (2) προκύπτει η ζητούμενη σχέση.

15 Στο παρακάτω σχήμα ισχύει:

$$\frac{ΑΒ}{Β\Gamma} = \frac{1}{4}, \quad ΑΚ//Β\Lambda//\Gamma Μ.$$

Να υπολογίσετε τους λόγους:

α. $\frac{Κ\Lambda}{\Lambda Μ}$ β. $\frac{Α\Gamma}{Β\Gamma}$

γ. $\frac{ΑΒ}{Α\Gamma}$ δ. $\frac{ΚΜ}{Κ\Lambda}$

Λύση

Αφού ΑΚ//ΒΛ//ΓΜ έχουμε:

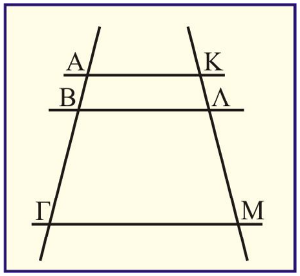
α. $\frac{ΑΒ}{Β\Gamma} = \frac{Κ\Lambda}{\Lambda Μ}$ άρα $\frac{1}{4} = \frac{Κ\Lambda}{\Lambda Μ}$

β. $\frac{AB}{B\Gamma}=\frac{1}{4}$ ή $\frac{A\Gamma-B\Gamma}{B\Gamma}=\frac{1}{4}$ ή $\frac{A\Gamma}{B\Gamma}-1=\frac{1}{4}$

$\frac{A\Gamma}{B\Gamma}=1+\frac{1}{4}$ ή $\frac{A\Gamma}{B\Gamma}=\frac{5}{4}$

γ. $\frac{AB}{A\Gamma}=\frac{A\Gamma-B\Gamma}{A\Gamma}=\frac{A\Gamma}{A\Gamma}-\frac{B\Gamma}{A\Gamma}=1-\frac{4}{5}=\frac{1}{5}$

δ. $\frac{KM}{K\Lambda}=\frac{A\Gamma}{AB}=\frac{5}{1}=5$



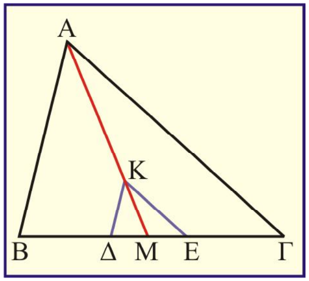
16 Σε τρίγωνο ΑΒΓ φέρνουμε τη διάμεσο ΑΜ και Κ ένα σημείο της διαμέσου. Από το Κ φέρνουμε παράλληλες προς τις ΑΒ, ΑΓ που τέμνουν την ΒΓ στα Δ, Ε. Να δείξετε ότι το Μ είναι μέσο του ευθύγραμμου τμήματος ΔΕ.

Λύση

$$\left.\begin{array}{l} K\Delta /\!/ AB \text{ τότε από θ.Θαλή } \frac{KM}{AM}=\frac{\Delta M}{BM} \\ KE /\!/ A\Gamma \text{ τότε από θ.Θαλή } \frac{KM}{AM}=\frac{ME}{M\Gamma} \end{array}\right\} (1) \text{ τότε } \frac{\Delta M}{BM}=\frac{ME}{M\Gamma}$$

Αφού Μ μέσο της ΒΓ τότε ΒΜ = ΜΓ οπότε στη σχέση (1) οι παρονομαστές είναι ίσοι άρα και οι αριθμητές.

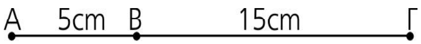
Δηλ. $\Delta M = ME$ άρα Μ μέσο του ΔΕ.



ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1 *Να συμπληρώσετε τις ισότητες:*

α. $\frac{AB}{A\Gamma}=$ ___ β. $\frac{B\Gamma}{AB}=$ ___ γ. $\frac{AB}{B\Gamma}=$ ___ δ. $\frac{B\Gamma}{A\Gamma}=$ ___



2 *Αν $AB=B\Gamma=\Gamma\Delta=\Delta E$ να συμπληρώσετε τις ισότητες:* α. $\frac{AB}{A\Gamma}=$ ___ β. $\frac{B\Delta}{AE}=$ ___ γ. $\frac{A\Gamma}{A\Delta}=$ ___

δ. $\frac{ΑΕ}{ΓΔ} = \_\_\_$ ε. $\frac{ΓΔ}{ΓΕ} = \_\_\_$

3 *Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με (Σ), αν είναι σωστές ή με (Λ), αν είναι λανθασμένες.*

α. Αν $\frac{ΑΒ}{ΓΔ} = \frac{4}{3}$, τότε ΑΒ = 4 και ΓΔ = 3. ☐

β. Ο λόγος δύο πλευρών τετραγώνου είναι ίσος με 1. ☐

γ. Αν $\frac{ΑΒ}{ΓΔ} = \frac{3}{4}$, τότε το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ είναι μικρότερο από το ΓΔ. ☐

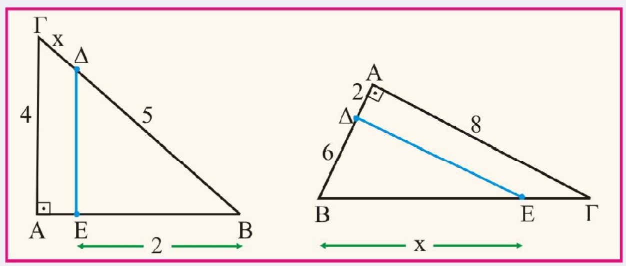
δ. Ο λόγος της ακτίνας ενός κύκλου προς τη διάμετρό του είναι $\frac{1}{2}$. ☐

ε. Αν Μ είναι το μέσο του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ, τότε $\frac{ΑΒ}{ΑΜ} = 2$. ☐

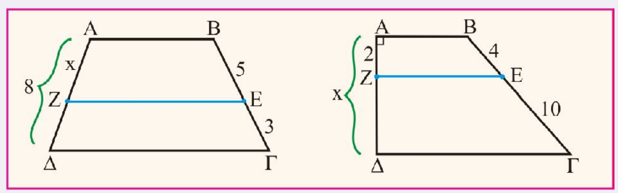
στ. Ο λόγος μιας πλευράς τετραγώνου προς την περίμετρό του είναι $\frac{1}{4}$. ☐

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1 Στα διπλανά τρίγωνα να υπολογίσετε το x αν ΔΕ // ΑΓ.



2 Στα διπλανό σχήματα να υπολογίσετε το x αν ΖΕ // ΔΓ.



3 Έστω ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ $\left(\hat{A}=90^\circ\right)$ με $AB=6cm$ και $A\Gamma=8cm$. Μ, Ν μέσα των ΑΒ, ΑΓ αντίστοιχα. Να βρείτε:

α. την ΒΓ **β.** την ΜΝ

4 Σε τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΑΒ//ΓΔ) Ε, Ζ σημεία των ΑΔ, ΒΓ ώστε ΕΖ//ΑΓ//ΓΔ. Αν $AE=x$, $A\Delta=2x-1$, $BZ=1$, $\Gamma Z=x$ να βρείτε το x.

5 Θεωρούμε τρεις ημιευθείες Οx, Οy, Οz και Α, Β δύο σημεία της Οx. Απο αυτά φέρνουμε δύο ευθείες παράλληλες μεταξύ τους που τέμνουν την Οy, στα Α′, Β′. Και από τα Α′, Β′ δύο άλλες ευθείες παράλληλες μεταξύ τους που τέμνουν την Οz στα Α′′, Β′′. Να δείξετε ότι ΑΑ′′ // ΒΒ′′.

6 Σε τρίγωνο ΑΒΓ έστω ΑΜ η διάμεσος του. Από σημείο Δ της ΒΓ φέρνουμε παράλληλη προς την ΑΜ η οποία τέμνει την ΑΓ στο Ζ και την ΑΒ στο Η. Να δείξετε ότι $AB\cdot AZ=A\Gamma\cdot AH$.

7 Έστω τραπέζιο ΑΒΓΔ και Ο το σημείο τομής των διαγώνιων του ΑΓ, ΒΔ. Από το Ο φέρνουμε παράλληλες προς τις μη παράλληλες πλευρές ΑΔ, ΒΓ οι οποίες τέμνουν την ΓΔ στα Ζ, Η αντίστοιχα. Να δείξετε ότι $\Delta Z=H\Gamma$.

8 Έστω παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ. Από το Α φέρνουμε ευθεία που τέμνει τις ΒΔ, ΒΓ, ΓΔ στα Κ, Λ, Μ αντίστοιχα.

α. Να γίνει σύγκριση των λόγων: $\frac{KA}{KM},\frac{K\Lambda}{KA},\frac{KB}{K\Delta}$ **β.** Να δείξετε ότι: $KA^2=KM\cdot K\Lambda$

9 Έστω τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΑΒ//ΓΔ) και Μ, Ν μέσα των βάσεων του ΑΒ, ΓΔ αντίστοιχα. Από το Μ φέρνουμε παράλληλες προς τις ΑΔ, ΒΓ οι οποίες τέμνουν την ΓΔ στα Ε, Ζ. Να δείξετε ότι το Ν είναι μέσο του ΕΖ.

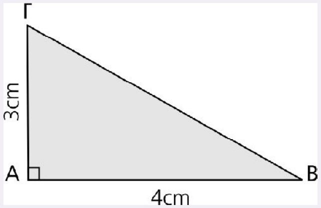
10 **α.** Με κανόνα και διαβήτη να διαιρέσετε ένα ευθύγραμμο τμήμα $AB=10cm$ σε τρία ίσα ευθύγραμμα τμήματα και πάνω σε μια ευθεία ε να σχεδιάσετε τα διαδοχικά ευθύγραμμα τμήματα $\Gamma\Delta=\frac{2}{3}AB$, $\Delta Z=\frac{5}{3}AB$ και $ZH=\frac{1}{3}AB$.

β. Να υπολογίσετε τους λόγους:

i) $\frac{\Gamma\Delta}{AB}$ ii) $\frac{\Delta Z}{\Gamma\Delta}$ iii) $\frac{AB}{ZH}$ iv) $\frac{ZH}{\Delta Z}$ v) $\frac{\Gamma\Delta}{ZH}$

11 Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ του διπλανού σχήματος να βρείτε τους λόγους:

α. $\frac{ΑΒ}{ΑΓ}$ β. $\frac{ΒΓ}{ΑΒ}$ γ. $\frac{ΑΓ}{ΒΓ}$

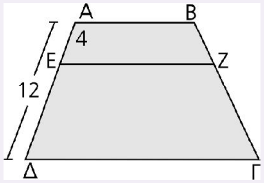


12 Σε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ $(\hat{Α} = 90°)$ είναι $ΑΒ = 4cm$ και $ΒΓ = 5cm$. Να υπολογίσετε τους λόγους:

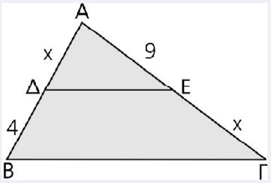
α. $\frac{ΑΒ}{ΒΓ}$ β. $\frac{ΑΓ}{ΒΓ}$ γ. $\frac{ΑΒ}{ΑΓ}$

13 Να σχεδιάσετε ένα ισόπλευρο τρίγωνο με πλευρά 3cm. Να υπολογίσετε το λόγο του ύψους του προς την πλευρά του.

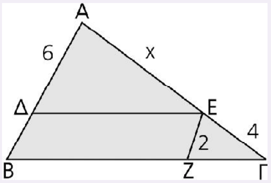
14 Στο τραπέζιο ΑΒΓΔ η ΕΖ είναι παράλληλη στις βάσεις του. Να υπολογίσετε το ευθύγραμμο τμήμα ΒΖ.



15 Στο τρίγωνο ΑΒΓ είναι ΔΕ//ΒΓ. Να υπολογίσετε το x.



16 Στο τρίγωνο ΑΒΓ είναι $ΔΕ // ΒΓ$, $ΕΖ // ΑΒ$. Να υπολογίσετε το x.



ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗΣ

Ερώτηση 1

Με τι ισούται το τμήμα που ενώνει τα μέσα των δύο πλευρών ενός τριγώνου;

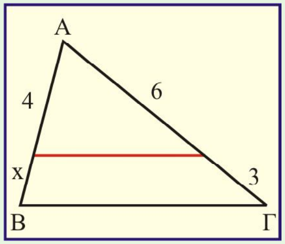
Ερώτηση 2

Ποια είναι η εφαρμογή του θεωρήματος του Θαλή σε τρίγωνο;

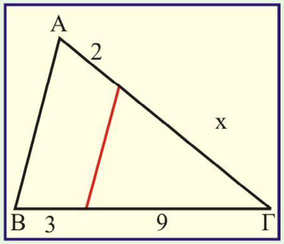
Άσκηση 1

Να υπολογίσετε το x στα παρακάτω σχήματα:

α.



β.



Άσκηση 2

Δίνεται τετράπλευρο ΑΒΓΔ με $\hat{B} = \hat{\Delta} = 90°$. Αν Ο μέσο της ΑΓ να δείξετε ότι το τρίγωνο ΟΒΔ είναι ισοσκελές.

Άσκηση 3

Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΑΒ//ΓΔ). Αν Κ, Λ μέσα των μη παράλληλων πλευρών ΑΔ, ΒΓ αντίστοιχα να δείξετε ότι ΚΛ // ΑΒ // ΓΔ.