

1.1 Ισότητα τριγώνων

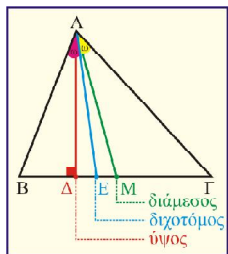
Ερώτηση 1

Ποια είναι τα κύρια και ποια τα δευτερεύοντα στοιχεία ενός τριγώνου;

Απάντηση

Κύρια στοιχεία ενός τριγώνου ονομάζουμε τις **πλευρές** και τις **γωνίες** του.

Δευτερεύοντα στοιχεία ενός τριγώνου ονομάζουμε τα **ύψη** του, τις **διαμέσους** του και τις **διχοτόμους** των γωνιών του.



- **ύψος** ενός τριγώνου ονομάζεται η απόσταση μιας κορυφής του από την απέναντι πλευρά του.
- **διάμεσος** ονομάζεται το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει την κορυφή με το μέσο της απέναντι πλευράς.
- **διχοτόμος** ονομάζεται το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει μια κορυφή με την απέναντι πλευρά και χωρίζει τη γωνία σε δύο ίσα μέρη.



Παρατήρηση

Για τα κύρια στοιχεία του τριγώνου γνωρίζουμε ότι:

α. Κάθε πλευρά του είναι μικρότερη από το άθροισμα των δύο άλλων δηλ.

$$a < b + \gamma, \quad b < a + \gamma, \quad \gamma < a + b$$

β. Το άθροισμα των γωνιών του είναι

$$180^\circ \text{ δηλ. } \hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^\circ.$$

- Το **σημείο τομής** των τριών **υψών** ενός τριγώνου ονομάζεται **ορθόκεντρο**.
- Το **σημείο τομής** των **διαμέσων** ενός τριγώνου ονομάζεται **βαρύκεντρο**.
- Το **σημείο τομής** των **διχοτόμων** ενός τριγώνου ονομάζεται **έγκεντρο**.

Ερώτηση 2

Ποια είναι τα είδη τριγώνων με βάση

i) τις γωνίες τους ii) τις πλευρές τους

Απάντηση

- i) Ένα τρίγωνο ανάλογο με το είδος των γωνιών του ονομάζεται:
- α) Οξυγώνιο, όταν έχει όλες τις γωνίες του οξείες.
 - β) Αμβυγώνιο, όταν έχει μία γωνία αμβλή.
 - γ) Ορθογώνιο, όταν έχει μια γωνία ορθή.
- ii) Ένα τρίγωνο ανάλογο με το είδος των πλευρών του ονομάζεται:
- α) Σκαληνό, όταν έχει και τις τρεις πλευρές του άνισες.
 - β) Ισοσκελές, όταν έχει δύο πλευρές ίσες.
 - γ) Ισόπλευρο, όταν έχει και τις τρεις πλευρές του ίσες.

Ερώτηση 3

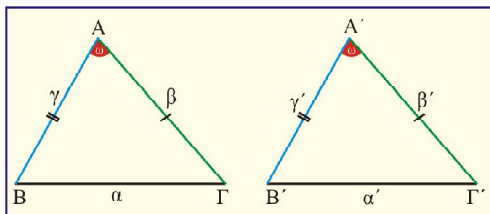
Ποια είναι τα κριτήρια ισότητας τριγώνων;

Απάντηση

Τα κριτήρια ισότητας τριγώνων είναι:

1ο Κριτήριο:

Δύο τρίγωνα είναι ίσα όταν έχουν δύο πλευρές τους ίσες μία προς μία και τις περιεχόμενες γωνίες στις πλευρές αυτές αντίστοιχα ίσες.

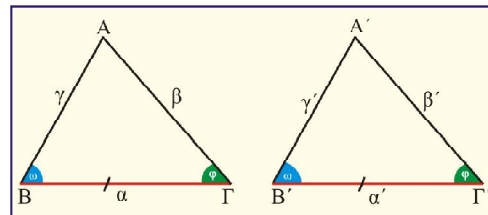


Δηλαδή για τα τρίγωνα του σχήματος.

$$\text{Αν } \left. \begin{array}{l} \beta = \beta' \\ \gamma = \gamma' \\ \hat{A} = \hat{A}' \end{array} \right\} \text{ τότε } \hat{A}\hat{B}\hat{\Gamma} = \hat{A}'\hat{B}'\hat{\Gamma}'$$

2ο Κριτήριο:

Δύο τρίγωνα είναι ίσα όταν έχουν μια πλευρά ίση και τις προσκείμενες γωνίες στην πλευρά αυτή αντίστοιχα ίσες.

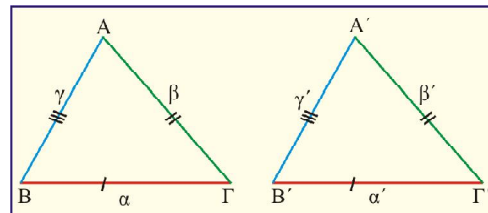


Δηλαδή για τα τρίγωνα του σχήματος.

$$\text{Αν } \left. \begin{array}{l} \alpha = \alpha' \\ \hat{B} = \hat{B}' \\ \hat{\Gamma} = \hat{\Gamma}' \end{array} \right\} \text{ τότε } \hat{A}\hat{B}\hat{\Gamma} = \hat{A}'\hat{B}'\hat{\Gamma}'$$

3ο Κριτήριο:

Δύο τρίγωνα είναι ίσα όταν έχουν τις πλευρές τους ίσες μία προς μία.



Δηλαδή για τα τρίγωνα του σχήματος.

$$\text{Αν } \left. \begin{array}{l} \alpha = \alpha' \\ \beta = \beta' \\ \gamma = \gamma' \end{array} \right\} \text{ τότε } \hat{A}\hat{B}\hat{\Gamma} = \hat{A}'\hat{B}'\hat{\Gamma}'$$

- Για τη σύγκριση δύο τριγώνων πρέπει οπωσδήποτε να χρησιμοποιήσουμε τρία κύρια στοιχεία από τα οποία ένα τουλάχιστον είναι πλευρά.
- Αν δύο τρίγωνα είναι ίσα τότε όλες τις πλευρές τους μία προς μία και τις αντίστοιχες γωνίες τους ίσες.

Ερώτηση 4

Πότε λέμε ότι δύο ορθογώνια τρίγωνα είναι ίσα;

Απάντηση

Δύο ορθογώνια τρίγωνα είναι ίσα όταν έχουν:

- α. τις δύο κάθετες πλευρές τους ίσες
- β. μια κάθετη πλευρά και την υποτείνουσα ίσες
- γ. μια κάθετη πλευρά και μια οξεία γωνία ίσες
- δ. την υποτείνουσα και μια οξεία γωνία ίσες

Γενικά δύο ορθογώνια τρίγωνα είναι ίσα αν έχουν εκτός από τις ορθές γωνίες τους δύο ακόμα κύρια στοιχεία τους ίσα εκ' των οποίων το ένα τουλάχιστον είναι πλευρά.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ - ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ και AD το ύψος του. Να δείξετε ότι το Δ είναι μέσο της $B\Gamma$, και η AD διχοτόμος της γωνίας A .

Λύση

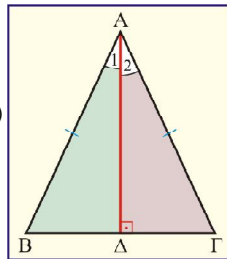
$\hat{A}\hat{B}\Delta = \hat{A}\hat{\Delta}\Gamma$ διότι:

- Είναι ορθογώνια
- $AB = A\Gamma$ (πλευρές ισοσκελούς τριγώνου)
- $AD = AD$ (κοινή πλευρά)

Αφού $\hat{A}\hat{B}\Delta = \hat{A}\hat{\Delta}\Gamma$ τότε και:

$B\Delta = \Delta\Gamma$ άρα Δ μέσο της $B\Gamma$ και

$A_1 = A_2$ άρα AD διχοτόμος της γωνίας A .



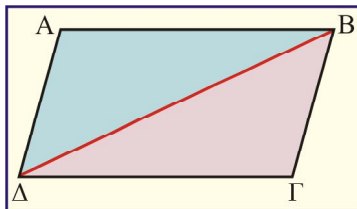
2

Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$. Να δείξετε ότι η διαγώνιος $B\Delta$ χωρίζει το παραλληλόγραμμο σε δύο ίσα τρίγωνα.

Λύση

$\hat{A}\hat{B}\Delta = \hat{B}\hat{\Gamma}\Delta$ διότι:

- $AB = \Gamma\Delta$ (απέναντιπλευρές παραλλ/μου)
- $A\Delta = B\Gamma$ (απέναντιπλευρές παραλλ/μου)
- $B\Delta = B\Delta$ (κοινή πλευρά)



3

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και AM διάμεσος. Προεκτείνουμε την AM κατά $M\Delta = AM$. Να δείξετε ότι:

α. $M\hat{A}B = M\hat{\Gamma}\Delta$ β. $AB = \Gamma\Delta$ γ. $AM < \frac{AB + A\Gamma}{2}$

Λύση

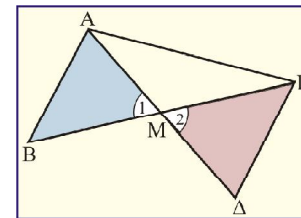
α. $M\hat{A}B = M\hat{\Gamma}\Delta$ διότι:

- $MA = M\Delta$ (υπόθεση)
- $MB = M\Gamma$ (M μέσο $A\Delta$)
- $M_1 = M_2$ (κατακορυφήν γωνίες)

β. Αφού $M\hat{A}B = M\hat{\Gamma}\Delta$ τότε και $AB = \Gamma\Delta$ (1)

γ. Στο τρίγωνο $A\Delta\Gamma$ ισχύει: $A\Delta < A\Gamma + \Gamma\Delta$ και επειδή ισχύει η σχέση $A\Delta = 2AM$ καθώς και η (1) έχουμε:

$$\frac{2AM}{2} < \frac{A\Gamma + AB}{2} \text{ τότε } AM < \frac{AB + A\Gamma}{2}$$



4

Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ ($AB \parallel \Gamma\Delta$) όπου AE , BZ τα ύψη του. Να δείξετε ότι:

α. Τα τρίγωνα $A\Delta E$ και $B\Gamma Z$ είναι ίσα.

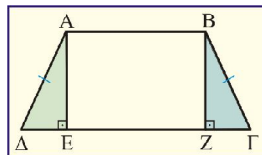
β. $\Delta E = Z\Gamma$ γ. $\Delta E = \frac{\Gamma\Delta - AB}{2}$

1.1 Ισότητα τριγώνων

Λύση

$AE \parallel BZ$ γιατί είναι κάθετες στην $\Gamma\Delta$,
 $AB \parallel \Gamma\Delta$ άρα το $ABZE$ είναι παραλλη-
 λομόριο οπότε

$$AE = BZ \quad (1) \quad \text{και} \quad EZ = AB \quad (2)$$



- α. $\hat{A}\hat{\Delta}E = \hat{B}\hat{Z}\Gamma$ διότι:
- Είναι ορθογώνια
 - $AE = BZ$ (ηώγω (1))
 - $\Delta\Delta = \Gamma\Gamma$ (σκέλη ισοσκ. τραπεζίου)

β. Αφού $\hat{A}\hat{\Delta}E = \hat{B}\hat{Z}\Gamma$ (από α. ερώτημα) τότε και $\Delta E = \Delta\Gamma$ (3).

γ. Παρατηρούμε ότι: $\Delta E + EZ + Z\Gamma = \Gamma\Delta \Leftrightarrow \Delta E + AB + \Delta E = \Gamma\Delta$
 Λόγω των (2) και (3) έχουμε:

$$2\Delta E = \Gamma\Delta - AB \quad \text{ή} \quad \Delta E = \frac{\Gamma\Delta - AB}{2}$$

5

Σε ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) προεκ-
 τείνουμε την $B\Gamma$ κατά τμήματα $B\Delta = \Gamma E$. Να δεί-
 ξετε ότι $A\Delta = AE$.

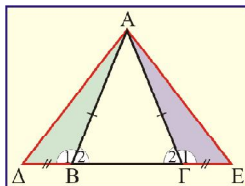
Λύση

Αφού το $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές τότε
 $B_2 = \Gamma_2$ οπότε και $B_1 = \Gamma_1$ ως παραπλη-
 ρωματικών των ίσων γωνιών Γ_2, B_2 .

$\hat{A}\hat{B}\Delta = \hat{A}\hat{\Gamma}E$ διότι:

- $AB = A\Gamma$ (πλευρές ισοσκελούς τριγώνου)
- $B\Delta = \Gamma E$ (υπόθεση)
- $B_1 = \Gamma_1$

Αφού $\hat{A}\hat{B}\Delta = \hat{A}\hat{\Gamma}E$ είναι και $A\Delta = AE$.



6

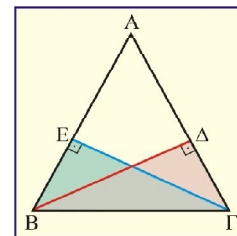
Να δείξετε ότι τα ύψη $B\Delta, \Gamma E$ ισοσκελούς τρι-
 γώνου $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) είναι ίσα.

Λύση

Αφού το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές τότε $B = \Gamma$
 $\hat{B}\hat{\Gamma}E = \hat{B}\hat{\Gamma}\Delta$ διότι:

- Είναι ορθογώνια
- $B\Gamma = B\Gamma$ (κοινή)
- $B = \Gamma$

Αφού $\hat{B}\hat{\Gamma}E = \hat{B}\hat{\Gamma}\Delta$ είναι και $B\Delta = \Gamma E$.



7

Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο $AB\Gamma$ και τα σημεί-
 α Δ, E, Z στις πλευρές $AB, B\Gamma, \Gamma A$ αντίστοιχα
 ώστε $A\Delta = BE = \Gamma Z$. Να δείξετε ότι το τρίγωνο
 ΔEZ είναι ισόπλευρο.

Λύση

$\hat{A}\hat{\Delta}Z = \hat{B}\hat{E}\Delta$ διότι:

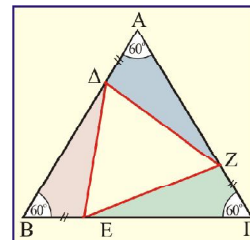
- $AZ = \Delta B$ (Διαφορά ίσων τμημάτων)
- $A\Delta = BE$ (υπόθεση)
- $B = A = 60^\circ$

Αφού $\hat{A}\hat{\Delta}Z = \hat{B}\hat{E}\Delta$ είναι και $\Delta Z = \Delta E$ (1)

$\hat{A}\hat{\Delta}Z = \hat{A}\hat{E}Z$ διότι:

- $AZ = E\Gamma$ (Διαφορά ίσων τμημάτων)
- $A\Delta = \Gamma Z$ (υπόθεση)
- $\Gamma = A = 60^\circ$

Αφού $\hat{A}\hat{\Delta}Z = \hat{A}\hat{E}Z$ είναι και $\Delta Z = \Delta E$ (2)
 Από (1) και (2) έχουμε: $\Delta E = \Delta Z = \Delta A$ άρα το τρίγωνο ΔEZ είναι ισό-
 πλευρο.



ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με (Σ), αν είναι σωστές ή με (Λ), αν είναι λανθασμένες:

α. Αν δύο τρίγωνα έχουν τις γωνίες τους ίσες μία προς μία, τότε είναι ίσα.

β. Αν δύο τρίγωνα έχουν τις πλευρές τους ίσες μία προς μία, τότε είναι ίσα.

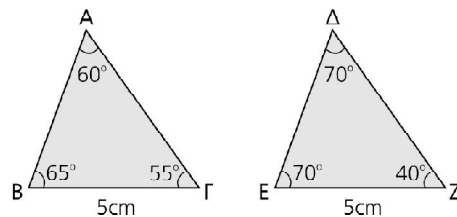
γ. Σε δύο τρίγωνα απέναντι από ίσες πλευρές βρίσκονται ίσες γωνίες.

δ. Σε δύο ίσα τρίγωνα απέναντι από ίσες γωνίες βρίσκονται ίσες πλευρές.

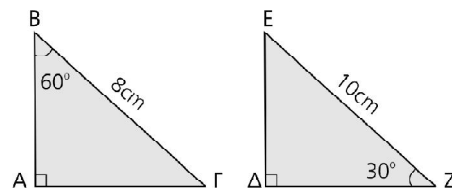
ε. Αν δύο τρίγωνα έχουν δύο γωνίες ίσες μία προς μία, τότε θα έχουν και την τρίτη τους γωνία ίση.

στ. Αν δύο τρίγωνα έχουν δύο πλευρές ίσες μία προς μία, τότε θα έχουν και την τρίτη τους πλευρά ίση.

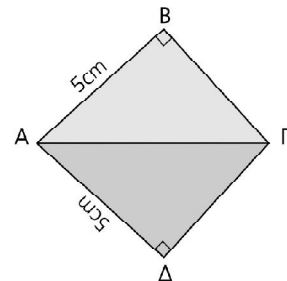
2. Είναι ίσα τα τρίγωνα του διπλανού σχήματος; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.



3. Είναι ίσα τα ορθογώνια τρίγωνα του διπλανού σχήματος; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.



4. Να αιτιολογήσετε γιατί είναι ίσα τα ορθογώνια τρίγωνα ABΓ και AΓΔ.



ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

- 1 Να αποδείξετε ότι οι διάμεσοι ΒΜ και ΓΝ ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ ($AB = AG$) είναι ίσες.
- 2 Στις ίσες πλευρές ΑΒ, ΑΓ ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ παίρνουμε ίσα τμήματα ΑΔ, ΑΕ. Αν Μ είναι το μέσο της ΒΓ, να δείξετε ότι $MD = ME$.
- 3 Στις ίσες πλευρές ΑΒ, ΑΓ ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ παίρνουμε τα ίσα τμήματα ΑΔ, ΑΕ αντίστοιχα. Να δείξετε ότι οι αποστάσεις των σημείων Δ, Ε από την ΒΓ είναι ίσες.
- 4 Σε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ ($AB = AG$), αν Κ, Λ, Μ μέσα των πλευρών του ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ αντίστοιχα να δείξετε ότι το $\hat{K}\hat{\Lambda}\hat{M}$ είναι ισοσκελές.
- 5 Έστω τρίγωνο ΑΒΓ και ΑΜ η διάμεσος του. Να δείξετε ότι οι κορυφές Β, Γ ισαπέχουν από τη διάμεσο ΑΜ.
- 6 Έστω ΑΒΓ ισοσκελές τρίγωνο. Προεκτείνουμε τις ίσες πλευρές ΑΒ, ΑΓ κατά τμήματα $BD = GE$. Να δείξετε ότι $BE = GD$.
- 7 Έστω $\hat{A}\hat{B}\hat{G}$ ισοσκελές τρίγωνο και Μ, Ν τα μέσα των ίσων πλευρών ΑΒ, ΑΓ. Προεκτείνουμε την ΒΓ κατά $BD = GE$. Να δείξετε ότι $MD = NE$.
- 8 Έστω ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ ($AB = AG$). Να δείξετε ότι οι διχοτόμοι ΒΔ, ΓΕ είναι ίσες.
- 9 Έστω ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ ($AB = AG$). Με πλευρά την ΒΓ και εξωτερικά του τριγώνου κατασκευάζουμε το τετράγωνο ΒΓΔΕ. Να δείξετε ότι το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ισοσκελές.
- 10 Έστω ΑΒΓ ισόπλευρο τρίγωνο. Στην προέκταση της ΒΓ παίρνουμε τμήμα $GD = BG$. Να δείξετε ότι:
 - α. $\hat{\Delta} = 30^\circ$
 - β. το $\hat{A}\hat{B}\hat{\Delta}$ είναι ορθογώνιο
 - γ. $AG = \frac{BD}{2}$
- 11 Δίνεται γωνία $\hat{x}\hat{O}\hat{y}$. Πάνω στις Οx, Οy παίρνω τα σημεία Α, Β και Γ, Δ αντίστοιχα ώστε $OA = OG$ και $OB = OD$. Να δείξετε ότι $AD = AG$.
- 12 Έστω ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ ($AB = AG$) και Μ μέσο της ΒΓ. Να δείξετε ότι το σημείο Μ ισαπέχει από τις πλευρές ΑΒ, ΑΓ.

- 13** Έστω τετράγωνο ΑΒΓΔ. Προεκτείνουμε τις πλευρές ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ και στις προεκτάσεις παίρνουμε τα τμήματα $BK = ΓΛ = ΔΜ = ΑΝ$. Να δείξετε ότι το ΚΛΜΝ είναι τετράγωνο.
- 14** Έστω ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ ($ΑΒ = ΑΓ$). Στις προεκτάσεις της ΒΓ παίρνουμε τμήματα $ΒΔ = ΓΕ$. Να δείξετε ότι οι αποστάσεις των Δ, Ε από τις πλευρές ΑΒ, ΑΓ αντίστοιχα είναι ίσες.
- 15** Έστω δύο ισοσκελή τρίγωνα ΑΒΓ, ΑΔΕ με $Β\hat{Α}Γ = Δ\hat{Α}Ε$. Να δείξετε ότι $ΒΔ = ΓΕ$.
- 16** Έστω τρίγωνο ΑΒΓ. Στις προεκτάσεις των πλευρών του ΑΒ, ΑΓ παίρνουμε τμήματα $ΒΔ = ΑΒ$, $ΓΕ = ΑΓ$. Να δείξετε ότι οι αποστάσεις των σημείων Δ, Ε από την ΒΓ είναι ίσες.

ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗΣ

Ερώτηση 1

Α. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με (Σ), αν είναι σωστές ή με (Λ), αν είναι λανθασμένες:

- α) Δύο τρίγωνα που έχουν δύο πλευρές ίσες και μία γωνία ίση είναι ίσα.
 β) Δύο ορθογώνια τρίγωνα που έχουν τις οξείες γωνίες τους ίσες είναι ίσα.
 γ) Δύο τρίγωνα που έχουν μια πλευρά ίση και δύο αντίστοιχες γωνίες ίσες μία προς μία είναι ίσα.
 Β. Αν δύο ισοσκελή τρίγωνα έχουν τις βάσεις τους ίσες και τις γωνίες της κορυφής ίσες, τότε να αποδείξετε ότι είναι ίσα.

Ερώτηση 2

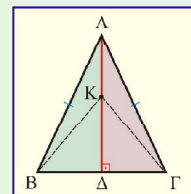
- α. Διατυπώστε τα τρία κριτήρια ισότητας τριγώνων.
 β. Διατυπώστε δύο από τα κριτήρια ισότητας ορθογωνίων τριγώνων.

Άσκηση 1

Στο διπλανό σχήμα να δείξετε ότι:

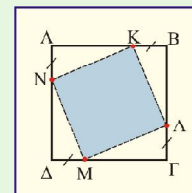
α. $KB = KΓ$

β. $\widehat{ΑΒΚ} = \widehat{ΑΓΚ}$



Άσκηση 2

Στο διπλανό σχήμα να δείξετε ότι: α. $ΚΛ = ΛΜ = ΜΝ = ΝΚ$ β. Το ΚΛΜΝ είναι τετράγωνο.



Άσκηση 3

Στο διπλανό σχήμα να δείξετε ότι: $ΔΚ = ΕΛ$

