1.5 Αξιοσημείωτες ταυτότητες

Ερώτηση 1

Τι ονομάζουμε ταυτότητα;

Απάντηση

Ταυτότητα λέγεται κάθε ισότητα που περιέχει μεταβλητές και αληθεύει για όλες τις τιμές των μεταβλητών της.

Ερώτηση 2

Ποιές είναι οι αξιοσημείωτες ταυτότητες;

Απάντηση

Οι αξιοσημείωτες ταυτότητες είναι:

α) Τετράγωνο αθροίσματος: $(\alpha+\beta)^2=\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2$

β) Τετράγωνο διαφοράς: $(\alpha-\beta)^2=\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2$

γ) Κύβος αθροίσματος - διαφοράς:

$$(\alpha+\beta)^3=\alpha^3+3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+\beta^3$$
$$(\alpha-\beta)^3=\alpha^3-3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2-\beta^3$$

δ) Γινόμενο αθροίσματος επί διαφορά:

$$(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)=\alpha^2-\beta^2$$

ε) Διαφορά κύβων - Άθροισμα κύβων:

$$\alpha^3-\beta^3=(\alpha-\beta)(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)$$
$$\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2)$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ – ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1 Να βρείτε τα αναπτύγματα:

α. $(x^2+2y)^2$ β. $\left(\frac{x}{3}+\frac{y}{2}\right)^2$ γ. $(x^2+2y^2)^2$

δ. $(-x^3-y^3)^2$ ε. $\left(2x-\frac{1}{x}\right)^2$ στ. $\left(-3\alpha+\frac{\beta}{3}\right)^2$

Λύση

α. $(x^2+2y)^2=(x^2)^2+2x^2\cdot 2y+(2y)^2=x^4+4x^2y+4y^2$

β. $\left(\frac{x}{3}+\frac{y}{2}\right)^2=\left(\frac{x}{3}\right)^2+2\cdot\frac{x}{3}\cdot\frac{y}{2}+\left(\frac{y}{2}\right)^2=\frac{x^2}{9}+\frac{x\cdot y}{3}+\frac{y^2}{4}$

γ. $(x^2+2y^2)^2=(x^2)^2+2x^2\cdot 2y^2+(2y^2)^2=x^4+4x^2y^2+4y^4$

δ. $(-x^3-y^3)^2=[-(x^3+y^3)]^2=(x^3+y^3)^2=$
$(x^3)^2+2x^3\cdot y^3+(y^3)^2=x^6+2x^3y^3+y^6$

ε. $\left(2x-\frac{1}{x}\right)^2=(2x)^2-2\cdot 2x\cdot\frac{1}{x}+\left(\frac{1}{x}\right)^2=4x^2-4+\frac{1}{x^2}$

στ. $\left(-3\alpha+\frac{\beta}{3}\right)^2=\left(\frac{\beta}{3}-3\alpha\right)^2=$
$\left(\frac{\beta}{3}\right)^2-2\cdot\frac{\beta}{3}\cdot 3\alpha+(3\alpha)^2=\frac{\beta^2}{9}-2\beta\alpha+9\alpha^2$

2 Να βρείτε τα αναπτύγματα:

α. $(xy+1)\cdot(xy-1)$ β. $(2-x^2)\cdot(2+x^2)$

γ. $(x^3+y^3)\cdot(x^3-y^3)$ δ. $(x+y+\omega)\cdot(x+y-\omega)$

ε. $(x+y+\omega-3)\cdot(x+y-\omega+3)$

στ. $(x^4-2y^2+1)\cdot(x^4+2y^2+1)$

Λύση

α. $(xy+1)(xy-1)=(xy)^2-1^2=x^2y^2-1$

β. $(2-x^2)(2+x^2)=2^2-(x^2)^2=4-x^4$

γ. $(x^3+y^3)(x^3-y^3)=(x^3)^2-(y^3)^2=x^6-y^6$

δ. $(x+y+\omega)(x+y-\omega)=(x+y)^2-\omega^2=x^2+2xy+y^2-\omega^2$

ε. $(x+y+\omega-3)(x+y-\omega+3)=$

$[(x+y)+(\omega-3)][(x+y)-(\omega-3)]=(x+y)^2-(\omega-3)^2=$

$x^2+2xy+y^2-(\omega^2-6\omega+9)=x^2+2xy+y^2-\omega^2+6\omega-9$

στ. $(x^4-2y^2+1)(x^4+2y^2+1)=(x^4+1-2y^2)(x^4+1+2y^2)=$

$(x^4+1)^2-(2y^2)^2=(x^4)^2+2x^4+1-4y^4=x^8+2x^4+1-4y^4$

3 Να βρείτε τα αναπτύγματα:

α. $(\alpha+3)^3$ β. $\left(\frac{\alpha}{2}+1\right)^3$

γ. $\left(x^2-\frac{1}{3}\right)^3$ δ. $(-x-2y)^3$

ε. $(-x+2y^2)^3$ στ. $(-x^2-y^2)^3$

Λύση

α. $(\alpha+3)^3=\alpha^3+3\cdot\alpha^2 3+3\cdot\alpha\cdot 3^2+3^3=\alpha^3+9\cdot\alpha^2+27\cdot\alpha+27$

β. $\left(\frac{\alpha}{2}+1\right)^3=\left(\frac{\alpha}{2}\right)^3+3\cdot\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2+3\cdot\frac{\alpha}{2}+1^3=\frac{\alpha^3}{8}+3\cdot\frac{\alpha^2}{4}+\frac{3\alpha}{2}+1$

γ. $\left(x^2-\frac{1}{3}\right)^3=(x^2)^3-3(x^2)^2\frac{1}{3}+3x^2\left(\frac{1}{3}\right)^2-\left(\frac{1}{3}\right)^3=$

$x^6-x^4+\frac{x^2}{3}-\frac{1}{27}$

δ. $(-x-2y)^3=-(x+2y)^3=$

$-[x^3+3x^2\cdot 2y+3x(2y)^2+(2y)^3]=-x^3-6x^2y-12xy^2-8y^3$

ε. $(-x+2y^2)^3=(2y^2-x)^3=$

$(2y^2)^3-3\cdot(2y)^2\cdot x+3\cdot 2y^2\cdot x^2-x^3=8y^6-12y^4x+6y^2x^2-x^3$

στ. $(-x^2-y^2)^3=-(x^2+y^2)^3=$

$-\left[(x^2)^3+3(x^2)^2y^2+3x^2(y^2)^2+(y^2)^3\right]=$

$-(x^6+3x^4y^2+3x^9y^4+y^6)=-x^6-3x^4y^2-3x^2y^4-y^6$

4 Να εκτελέσετε τις πράξεις στις παρακάτω περιπτώσεις:

α. $(2\alpha+\beta)^2-3(\alpha+\beta)^2-(2\beta-5\alpha)^2$

β. $2(\alpha+\beta)(\beta-\alpha)-(2\beta-\alpha)^2-3\alpha(\alpha-\beta)$

γ. $(2x+3y)(-3y+2x)-(2x+y)(y-2x)$

Λύση

α. $(2\alpha+\beta)^2-3(\alpha+\beta)^2-(2\beta-5\alpha)^2=$

$(2\alpha)^2+2\cdot 2\alpha\cdot\beta+\beta^2-3(\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2)-\left[(2\beta)^2-2\cdot 2\beta\cdot 5\alpha+(5\alpha)^2\right]=$

$4\alpha^2+4\alpha\beta+\beta^2-3\alpha^2-6\alpha\beta-3\beta^2-4\beta^2+20\alpha\beta-25\alpha^2=$

$-24\alpha^2+18\alpha\beta-6\beta^2$

β. $2(\alpha+\beta)(\beta-\alpha)-(2\beta-\alpha)^2-3\alpha(\alpha-\beta)=$

$$2\left(\beta^2-\alpha^2\right)-\left[(2\beta)^2-2\cdot 2\beta\alpha+\alpha^2\right]-3\alpha^2+3\alpha\beta=$$

$$2\beta^2-2\alpha^2-4\beta^2+4\alpha\beta-\alpha^2-3\alpha^2+3\alpha\beta=-6\alpha^2-2\beta^2+7\alpha\beta$$

γ. $(2x+3y)(-3y+2x)-(2x+y)(y-2x)=$

$$(2x)^2-(3y)^2-[y^2-(2x)^2]=4x^2-9y^2-y^2+4x^2=8x^2-10y^2$$

5 Να αποδείξετε τις παρακάτω ταυτότητες:

α. $\left(\alpha^2+2\right)\left(\beta^2+2\right)-(\alpha\beta+2)^2=2(\alpha+\beta)^2$

β. $\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$

γ. $\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)$

Λύση

α. $\left(\alpha^2+2\right)\left(\beta^2+2\right)-(\alpha\beta+2)^2=$

$$\alpha^2\beta^2+2\alpha^2+2\beta^2+4-\left(\alpha^2\beta^2-4\alpha\beta+4\right)=$$

$$\alpha^2\beta^2+2\alpha^2+2\beta^2+4-\alpha^2\beta^2+4\alpha\beta-4=$$

$$2\alpha^2+2\beta^2+4\alpha\beta=\left(\alpha^2+\beta^2+2\alpha\beta\right)+\left(\alpha^2+\beta^2+2\alpha\beta\right)=$$

$$(\alpha+\beta)^2+(\alpha+\beta)^2=2(\alpha+\beta)^2$$

β. $(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2-2\alpha\beta=\alpha^2+\beta^2$

γ. $(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)=$

$$\alpha^3+3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+\beta^3-3\alpha^2\beta-3\alpha\beta^2=\alpha^3+\beta^3$$

6 Αν $A=\sqrt{7}+\sqrt{3}$ και $B=\sqrt{7}-\sqrt{3}$ τότε να υπολογιστούν οι παραστάσεις:

α. $A\cdot B$ β. A^2-B^2

Λύση

α. $A\cdot B=\left(\sqrt{7}+\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{7}-\sqrt{3}\right)$ ή

$$A\cdot B=\left(\sqrt{7}\right)^2-\left(\sqrt{3}\right)^2 \quad ή \quad A\cdot B=7-3=4$$

β. $A^2-B^2=\left(\sqrt{7}+\sqrt{3}\right)^2-\left(\sqrt{7}-\sqrt{3}\right)^2$ ή

$$A^2-B^2=\left(\sqrt{7}\right)^2+2\sqrt{7}\sqrt{3}+\left(\sqrt{3}\right)^2-[\left(\sqrt{7}\right)^2-2\sqrt{7}\sqrt{3}+\left(\sqrt{3}\right)^2]$$

$$A^2-B^2=7+2\sqrt{21}+3-7+2\sqrt{21}-3 \quad ή \quad A^2-B^2=4\sqrt{21}$$

7 Αν $x+y=5$ και $x\cdot y=4$ τότε να υπολογιστεί η τιμή της παράστασης $A=x^2+y^2$.

Λύση

Ισχύει ότι: $(x+y)^2=x^2+2xy+y^2$ ή

$$(x+y)^2-2xy=x^2+y^2 \quad ή$$

$$x^2+y^2=5^2-2\cdot 4 \quad ή \quad x^2+y^2=17.$$

8 Αν $x+\frac{1}{x}=2$ τότε να υπολογιστεί η τιμή της παράστασης $A=x^2+\frac{1}{x^2}$.

Λύση

Ισχύει: $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2=x^2+2x\frac{1}{x}+\left(\frac{1}{x}\right)^2$ ή $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2=x^2+2+\frac{1}{x^2}$

Οπότε $x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2$ ή $A=2^2-2$ ή $A=2$.

9 Αν είναι $x = 2^{2004} + 2^{-2004}$ και $y = 2^{2004} - 2^{-2004}$ τότε να υπολογιστεί η τιμή της παράστασης $A = x^2 - y^2$.

Λύση

$A = x^2 - y^2$ ή $A = (x-y)(x+y)$ ή

$A = \left(2^{2004} + 2^{-2004} - 2^{2004} + 2^{-2004}\right)\cdot\left(2^{2004} + 2^{-2004} + 2^{2004} - 2^{-2004}\right)$ ή

$A = 2\cdot 2^{-2004}\cdot 2\cdot 2^{2004}$ ή $A = 2^{1-2004+1+2004}$ ή $A = 2^2 = 4$.

10 Να αποδείξετε ότι ισχύει η σχέση: $(\alpha+\beta)^2 \geq 4\alpha\beta$

Λύση

$(\alpha+\beta)^2 \geq 4\alpha\beta$ ή $\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 \geq 4\alpha\beta$ ή

$\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 - 4\alpha\beta \geq 0$ ή $\alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2 \geq 0$, $(\alpha-\beta)^2 \geq 0$ αληθές.

11 Αν $2(x^2+y^2) = (x+y)^2$ να αποδείξετε ότι $x = y$.

Λύση

$2(x^2+y^2) = (x+y)^2$ ή $2x^2 + 2y^2 = x^2 + 2xy + y^2$ ή

$2x^2 + 2y^2 - x^2 - y^2 - 2xy = 0$ ή $x^2 + y^2 - 2xy = 0$ ή

$(x-y)^2 = 0$ ή $x - y = 0$ ή $x = y$.

12 Να υπολογιστούν με τη βοήθεια ταυτοτήτων οι αριθμοί:

α) $4567^2 - 4564^2$ β) $95\cdot 105$

γ) 2004^2 δ) 1998^2

Λύση

α) Χρησιμοποιούμε την ταυτότητα $\alpha^2 - \beta^2 = (\alpha+\beta)(\alpha-\beta)$ δηλαδή:

$4567^2 - 4564^2 = (4567+4564)\cdot(4567-4564) =$

$9131\cdot 3 = 27.393$

β) Όμοια χρησιμοποιούμε την παραπάνω ταυτότητα και έχουμε:

$95\cdot 105 = (100-5)\cdot(100+5) = 100^2 - 5^2 =$

$10.000 - 25 = 9.975$

γ) Είναι $2004 = 2000 + 4$, οπότε: $2004^2 = (2000+4)^2$ (1)

Ξέρουμε ότι: $(\alpha+\beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$, άρα η (1) γράφεται:

$2004^2 = 2000^2 + 2\cdot 2000\cdot 4 + 4^2 =$

$4.000.000 + 16.000 + 16 = 4.016.016$

δ) Επίσης: $1.998 = 2.000 - 2$, άρα: $1.998^2 = (2.000-2)^2$ (2)

Με τη βοήθεια της ταυτότητας

$(\alpha-\beta)^2 = \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2$, η (2) γράφεται:

$1.998^2 = 2.000^2 - 2\cdot 2.000\cdot 2 + 2^2 =$

$4.000.000 - 8.000 + 4 = 3.992.004$

13 Να αποδειχθούν οι παρακάτω ταυτότητες:

α) $(\alpha+\beta+\gamma)^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 2\alpha\beta + 2\beta\gamma + 2\alpha\gamma$

β) $(\alpha-\beta)^2 + 2\alpha\beta = (\alpha+\beta)^2 - 2\alpha\beta$

γ) $(\alpha^2-\beta^2)^2 + (2\alpha\beta)^2 = (\alpha^2+\beta^2)^2$

δ) $x^\nu - y^\nu = (x-y)\cdot(x^{\nu-1} + x^{\nu-2}y + \ldots + xy^{\nu-2} + y^{\nu-1})$

Λύση

α) Κάνοντας πράξεις στο 1ο μέλος έχουμε:

$(\alpha+\beta+\gamma)^2 = [(\alpha+\beta)+\gamma]^2 = (\alpha+\beta)^2 + 2(\alpha+\beta)\gamma + \gamma^2 =$

$\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 + 2\alpha\gamma + 2\beta\gamma + \gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 2\alpha\beta + 2\beta\gamma + 2\alpha\gamma$

β) Κάνοντας πράξεις στο 1ο μέλος έχουμε:

$$(\alpha-\beta)^2+2\alpha\beta=\alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta+2\alpha\beta=\alpha^2+\beta^2$$

έχουμε:

$$(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=\alpha^2+\beta^2+2\alpha\beta-2\alpha\beta=\alpha^2+\beta^2$$

Άρα $(\alpha-\beta)^2+2\alpha\beta=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$

γ) Κάνοντας πράξεις στο 1ο μέλος έχουμε:

$$(\alpha^2-\beta^2)^2+(2\alpha\beta)^2=$$

$$\alpha^4-2\alpha^2\beta^2+\beta^4+4\alpha^2\beta^2=$$

$$\alpha^4+2\alpha^2\beta^2+\beta^4=(\alpha^2+\beta^2)^2$$

δ) Κάνοντας πράξεις στο 2ο μέλος, έχουμε:

$$(x-y)\cdot(x^{\nu-1}+x^{\nu-2}\cdot y+\ldots+xy^{\nu-2}+y^{\nu-1})=$$

$$x^{\nu}+x^{\nu-1}y+\ldots+x^2y^{\nu-2}+x\cdot y^{\nu-1}-$$

$$x^{\nu-1}y-x^{\nu-2}y^2-\ldots-xy^{\nu-1}-y^{\nu}=x^{\nu}-y^{\nu}$$

Μέθοδος:

Για να αποδείξουμε μια ταυτότητα $A = B$, ακολουθούμε ένα από τα παρακάτω:

- *Κάνουμε πράξεις στο 1ο μέλος της ταυτότητας μέχρις ότου καταλήξουμε στο 2ο μέλος.*
- *Κάνουμε πράξεις στο 2ο μέλος μέχρις ότου οδηγηθούμε στο 1ο μέλος.*
- *Κάνουμε πράξεις στο 1ο μέλος και καταλήγουμε σε μια ισότητα $A = \Gamma$, κάνουμε πράξεις στο 2ο μέλος και καταλήγουμε σε μια ισότητα $B = \Gamma$, οπότε $A = B$.*

14 Αν $x+\dfrac{1}{x}=2$, αποδείξτε ότι:

$$x^2+\frac{1}{x^2}=x^3+\frac{1}{x^3}=x^4+\frac{1}{x^4}$$

Λύση

Έχουμε ότι:

- $$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2=x^2+2\cdot x\cdot\frac{1}{x}+\left(\frac{1}{x}\right)^2 \text{ ή}$$

$$x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2 \text{ ή}$$

$$x^2+\frac{1}{x^2}=2^2-2 \text{ ή } x^2+\frac{1}{x^2}=2 \quad (1)$$

- $$\left(x+\frac{1}{x}\right)^3=x^3+3\cdot x^2\frac{1}{x}+3\cdot x\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3} \text{ ή}$$

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^3=x^3+3\cdot x\frac{1}{x}\left(x+\frac{1}{x}\right)+\frac{1}{x^3} \text{ ή}$$

$$x^3+\frac{1}{x^3}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^3-3\left(x+\frac{1}{x}\right) \text{ ή}$$

$$x^3+\frac{1}{x^3}=2^3-3\cdot 2 \text{ ή } x^3+\frac{1}{x^3}=2 \quad (2)$$

- $$\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)^2=(x^2)^2+2\cdot x^2\frac{1}{x^2}+\left(\frac{1}{x^2}\right)^2 \text{ ή}$$

$$x^4+\frac{1}{x^4}=\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)^2-2 \text{ ή}$$

$$x^4+\frac{1}{x^4}=2^2-2 \text{ ή } x^4+\frac{1}{x^4}=2 \quad (3)$$

Από τις (1), (2) και (3) προκύπτει:

$$x^2+\frac{1}{x^2}=x^3+\frac{1}{x^3}=x^4+\frac{1}{x^4}$$

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1 *Να χαρακτηρίσετε με την ένδειξη σωστό (Σ) ή λάθος (Λ) καθεμιά από τις παρακάτω ισότητες.*

α. $(x-2)^2 = x^2+4x+4$

β. $(x+2)^2 = x^2+2x+4$

γ. $(x-2)^2 = (-2+x)^2$

δ. $(-\kappa-\lambda)^2 = (\kappa+\lambda)^2$

ε. $(-\kappa+\lambda)^2 = (\lambda-\kappa)^2$

στ. $(-\kappa+\lambda)^2 = (\kappa-\lambda)^2$

ζ. $(x+y)^2 = x^2+y^2$

η. $(x+4)^2 = x^2+16$

θ. $x^2-9 = (x-9)(x+9)$

ι. $\alpha^2-\beta^2 = (\alpha-\beta)^2$

2 *Να αντιστοιχίσετε τις παραστάσεις της στήλης Α με τα αναπτύγματα στην στήλη Β.*

Στήλη Α	Στήλη Β
α. $(4x-1)^2$	1. $4x^2+4xy+y^2$
β. $(2x+y)^2$	2. $4x^2-9y^2$
γ. $(2x+3y)(2x-3y)$	3. x^3-3x^2+3x-1
δ. $(x-1)^3$	4. $x^2-2x-15$
ε. $(2x+1)^3$	5. $16x^2-8x+1$
στ. $(x+3)(x-5)$	6. $8x^3+12x+6x^2+1$

3 *Να συμπληρώσετε τις παρακάτω ισότητες:*

α. $(\ldots+\ldots)^2 = y^2+2y+\ldots$

β. $(\ldots-\ldots)^2 = 9\alpha^2-\ldots+16\beta^2$

γ. $\left(\frac{1}{2}x-\ldots\right)^2 = \ldots-xy+\ldots$

δ. $(\ldots+2x^2)^2 = 9+\ldots+\ldots$

ε. $(\kappa+\ldots)(\kappa-\ldots) = \ldots-25$

στ. $(\ldots+3x)(\ldots-3x) = 16\beta^2-\ldots$

ζ. $(\ldots+\ldots)^3 = 8\alpha^3+12\alpha^2+\ldots+\ldots$

η. $(\ldots-2)^3 = 27x^3-\ldots+..-\ldots$

θ. $(x+2)(x+\ldots) = \ldots+\ldots+6$

ι. $(x+4)(x+3) = \ldots+\ldots+\ldots$

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1 Να βρείτε τα αναπτύγματα:

α. $\left(xy+\frac{1}{2}\right)^2$ β. $\left(2x-\frac{y}{2}\right)^2$ γ. $\left(-xy+\frac{4}{x}\right)^2$ δ. $\left(-\frac{x}{2}+\frac{y}{3}\right)^2$ ε. $\left(2x+y^2+3\omega\right)^2$ ζ. $\left(x^2-2x+1\right)^2$

2 Να βρείτε τα αναπτύγματα:

α. $\left(-\frac{1}{3}\alpha^2+\frac{1}{2}\beta^3\right)\cdot\left(\frac{1}{3}\alpha^2+\frac{1}{2}\beta^3\right)$ β. $(4xy-3\alpha\beta)\cdot(4xy+3\alpha\beta)$

γ. $(-2x-\kappa)\cdot(2x-\kappa)$ δ. $(\kappa+2\lambda+1)\cdot(\kappa+2\lambda-1)$

3 Να βρείτε τα αναπτύγματα:

α. $\left(x^2+y^2\right)^3$ β. $\left(x+\frac{1}{x}\right)^3$

γ. $\left(x^2-\frac{1}{x^2}\right)^3$ δ. $\left(\frac{x-1}{3}\right)^3$

4 Να εκτελέσετε τις πράξεις στις παρακάτω περιπτώσεις:

α. $(1+x)(1-x)-(1-2x)^2$ β. $(5\kappa+\lambda)^2-\left(4\kappa^2-3\lambda\right)\left(4\kappa^2+3\lambda\right)-(\kappa+2\lambda)^2$

5 Να αποδείξετε τις παρακάτω ταυτότητες:

α. $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-\left(x-\frac{1}{x}\right)^2=4$ β. $\left(\alpha^2+\beta^2\right)\left(x^2+y^2\right)=(\alpha x+\beta y)^2+(\alpha y-\beta x)^2$

6 α. Να αποδείξετε την ταυτότητα: $\left(\frac{\nu+1}{2}\right)^2-\left(\frac{\nu-1}{2}\right)^2=\nu$ για $\nu\geq 2$.

β. Να αποδείξετε ότι κάθε περιττός αριθμός γράφεται ως διαφορά τετραγώνων δύο αριθμών.

7 Να αποδείξετε την ταυτότητα του Lagrance:

$$\left(\alpha^2+\beta^2\right)\left(x^2+y^2\right)-\left(\alpha x+\beta y\right)^2=\left(\alpha y-\beta x\right)^2$$

8 Αν $\alpha+\beta+\gamma=0$, να αποδείξετε ότι:

$$\alpha^3+\beta^3+\gamma^3=3\alpha\cdot\beta\cdot\gamma$$

9 Να αποδειχθεί η ταυτότητα:

$$\alpha^3+\beta^3+\gamma^3-3\alpha\cdot\beta\cdot\gamma=\frac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma)\cdot\left[(\alpha-\beta)^2+(\beta-\gamma)^2+(\gamma-\alpha)^2\right]$$

10 Να δείξετε πως αν $\alpha^2+\beta^2=1$ τότε ισχύει:

$$\left(3\alpha-4\alpha^3\right)^2+\left(3\beta-4\beta^3\right)^2=1$$

11 Να αποδειχθεί η ταυτότητα:

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\alpha\beta-\beta\gamma-\gamma\alpha=\frac{1}{2}\left[(\alpha-\beta)^2+(\beta-\gamma)^2+(\gamma-\alpha)^2\right]$$

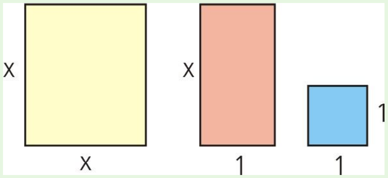
12 Αν $\alpha+\beta+\gamma=8$ και $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=19$, να υπολογίσετε την παράσταση: $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$.

ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗΣ

Άσκηση 1

Σκεφτείτε ένα διψήφιο αριθμό και βρείτε το τετράγωνό του. Βρείτε στη συνέχεια το τετράγωνο του αθροίσματος των ψηφίων του αριθμού που σκεφτήκατε και αφαιρέστε τα δύο αποτελέσματα. Ο αριθμός που βρήκατε διαιρείται ακριβώς με το 9. Μπορείτε να το εξηγήσετε;

Άσκηση 2



Πόσα από το κάθε είδος των διπλανών σχημάτων πρέπει να χρησιμοποιήσετε για να σχηματίσετε ένα τετράγωνο με πλευρά.

α) x+3 β) 2x+1

Άσκηση 3

Να υπολογίσετε από μνήμης τις παραστάσεις:

α) $25^2-5^2 = \ldots\ldots$

$103^2-97^2 = \ldots\ldots$

$1006^2-994^2 = \ldots\ldots$

β) $13^2-7^2 = \ldots\ldots$

$101^2-99^2 = \ldots\ldots$

$1003^2-997^2 = \ldots\ldots$

Άσκηση 4

α) Να αποδείξετε ότι:

$6^2-5^2=6+5$

$13^2-12^2=13+12$

$47^2-46^2=47+46$

$144^2-143^2=144+143$

β) Με βάση τις προηγούμενες ισότητες να συμπληρώσετε τη φράση:
"Η διαφορά των τετραγώνων δύο .... φυσικών αριθμών ισούται με το .... των αριθμών αυτών."

γ) Να συμπληρώσετε την ισότητα: $1960^2 - \ldots\ldots = \ldots\ldots + \ldots\ldots$