

1.4 Πολλαπλασιασμός πολυωνύμων

Ερώτηση 1

Πως γίνεται ο πολλαπλασιασμός μονωνύμου με πολυώνυμο και πως γίνεται ο πολλαπλασιασμός πολυωνύμων;

Απάντηση

- Ο πολλαπλασιασμός μονωνύμου με πολυώνυμο στηρίζεται στην επιμεριστική ιδιότητα:

$$α(β + γ) = αβ + αγ$$

Για να πολλαπλασιάσουμε μονώνυμο με πολυώνυμο, πολλαπλασιάζουμε το μονώνυμο με κάθε όρο του πολυωνύμου και προσθέτουμε τα γινόμενα που προκύπτουν.

Για παράδειγμα

$$\begin{aligned} 2x^2(3a - x^3 + 4) &= 2x^2 \cdot 3a - 2x^2 \cdot x^3 + 2x^2 \cdot 4 = \\ &6x^2a - 2x^5 + 8x^2 \end{aligned}$$

- Για τον υπολογισμό του γινομένου πολυωνύμων εφαρμόζουμε την επιμεριστική ιδιότητα:

$$(α + β)(γ + δ) = αγ + αδ + βγ + βδ$$

Για να πολλαπλασιάσουμε πολυώνυμο με πολυώνυμο, πολλαπλασιάζουμε κάθε όρο του ενός πολυωνύμου με κάθε όρο του άλλου πολυωνύμου και προσθέτουμε τα γινόμενα που προκύπτουν.

Για παράδειγμα

$$(9x^2 + 3xy + y^2)(2x - y) =$$

$$9x^2 \cdot 2x - 9x^2y + 3xy \cdot 2x - 3xy \cdot y + y^2 \cdot 2x - y^2 \cdot y =$$

$$18x^3 - 9x^2y + 6x^2y - 3xy^2 + 2xy^2 - y^3 =$$

$$18x^3 - 3x^2y - xy^2 - y^3$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ - ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1

Να κάνετε τις πράξεις:

α. $-3x^2y(-5x + 2y)$ β. $4x(2x^2 - x + 2) - 8x$

Λύση

α. $-3x^2y(-5x + 2y) = 15x^3y - 6x^2y^2$

β. $4x(2x^2 - x + 2) - 8x = 8x^3 - 4x^2 + 8x - 8x = 8x^3 - 4x^2$

2

Να κάνετε τις πράξεις:

α. $3x^2(-2x + 3)(5 - x)$ β. $(4 - 3x)(5 - 2x) - 6x(x - 4)$
 γ. $(3x^2 - 2xy - 5y^2)(4y - x)$

Λύση

α. $3x^2(-2x + 3)(5 - x) = 3x^2(-10x + 2x^2 + 15 - 3x) =$
 $3x^2(2x^2 - 13x + 15) = 6x^4 - 39x^3 + 45x^2$

$$\beta. (4 - 3x)(5 - 2x) - 6x(x - 4) = \\ 20 - 8x - 15x + 6x^2 - 6x^2 + 24x = x + 20$$

$$\gamma. (3x^2 - 2xy - 5y^2)(4y - x) = \\ 12x^2y - 3x^3 - 8xy^2 + 2x^2y - 20y^3 + 5y^2x = \\ -3x^3 + 14x^2y - 3xy^2 - 20y^3$$

Να κάνετε τις πράξεις:

3

$$\alpha. (3x - 2)(x^2 - x)(4x - 3)$$

$$\beta. -2x(x^2 - x + 1)(x - 2) - (x - 1)(2x - 3)(x + 2)$$

Λύση

$$\alpha. (3x - 2)(x^2 - x)(4x - 3) = \\ (3x - 2)(4x^3 - 3x^2 - 4x^2 + 3x) =$$

$$(3x - 2)(4x^3 - 7x^2 + 3x) =$$

$$12x^4 - 21x^3 + 9x^2 - 8x^3 + 14x^2 - 6x =$$

$$12x^4 - 29x^3 + 23x^2 - 6x$$

$$\beta. -2x(x^2 - x + 1)(x - 2) - (x - 1)(2x - 3)(x + 2) = \\ -2x(x^3 - 2x^2 - x^2 + 2x + x - 2) - (x - 1)(2x^2 + 4x - 3x - 6) =$$

$$-2x(x^3 - 3x^2 + 3x - 2) - (x - 1)(2x^2 + x - 6) =$$

$$-2x^4 + 6x^3 - 6x^2 + 4x - (2x^3 + x^2 - 6x - 2x^2 - x + 6) =$$

$$-2x^4 + 6x^3 - 6x^2 + 4x - (2x^3 - x^2 - 7x + 6) =$$

$$-2x^4 + 6x^3 - 6x^2 + 4x - 2x^3 + x^2 + 7x - 6 =$$

$$-2x^4 + 4x^3 - 5x^2 + 11x - 6$$

4

Αν $P(x) = -2x^2 + 5x - 3$ και $Q(x) = 4x - 5$, να βρείτε τα πολυώνυμα:

$$\alpha. P(x) \cdot Q(x)$$

$$\beta. P(x) \cdot [-3Q(x) + 11x - 12]$$

Λύση

$$\alpha. P(x) \cdot Q(x) = (-2x^2 + 5x - 3)(4x - 5) = \\ -8x^3 + 10x^2 + 20x^2 - 25x - 12x + 15 = \\ -8x^3 + 30x^2 - 37x + 15$$

$$\beta. P(x)[-3Q(x) + 11x - 2] = \\ (-2x^2 + 5x - 3)[-3(4x - 5) + 11x - 2] = \\ (-2x + 5x - 3) \cdot (-12x + 15 + 11x - 2) = \\ (-2x + 5x - 3)(-x + 13) = \\ 2x^3 - 26x^2 - 5x^2 + 65x + 3x - 39 = \\ 2x^3 - 31x^2 + 68x - 39 =$$

5

$$\text{Αν } P(x) = 3x(-2x + 4)(x - 1)$$

και $Q(x) = ax^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta$, να βρείτε τις τιμές των α , β , γ , δ , ώστε τα πολυώνυμα $P(x)$ και $Q(x)$ να είναι ίσα.

Λύση

$$P(x) = 3x(-2x + 4)(x - 1) \\ = 3x(-2x^2 + 2x + 4x - 4) \\ = 3x(-2x^2 + 6x - 4) \\ = -6x^3 + 18x^2 - 12x$$

$$Q(x) = ax^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta$$

Πρέπει: $\alpha = -6$, $\beta = 18$, $\gamma = -12$, $\delta = 0$.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1 Να αντικαταστήσετε κατάλληλα τους παρακάτω αστερίσκους ώστε να ισχύει κάθε μια από τις παρακάτω ισότητες:

α. $\dots(4\beta^2 - 7\beta + 8) = 28\beta^3 - 49\beta^2 + 56\beta$

β. $\dots(3x^2 + 8x - 7) = 36x^5 + \dots - \dots$

γ. $5\alpha^2\beta^3(\dots - 9\beta^2 + \dots) = 20\alpha^5\beta^7 - \dots + \alpha^4\beta^9$

2 Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με (Σ), αν είναι σωστές ή με (Λ) αν είναι λανθασμένες.

α. Αν το πολυώνυμο $P(x)$ έχει βαθμό 4 και το πολυώνυμο $Q(x)$ έχει βαθμό 3, τότε το πολυώνυμο $P(x) \cdot Q(x)$ έχει βαθμό 7.

β. Αν το πολυώνυμο $P(x) \cdot Q(x)$ έχει βαθμό 9 και το πολυώνυμο $P(x)$ έχει βαθμό 5, τότε το πολυώνυμο $Q(x)$ έχει βαθμό 3.

3 Να συμπληρώσετε τα παρακάτω κενά:

α. $3x(2x + \dots) = \dots + 6x$

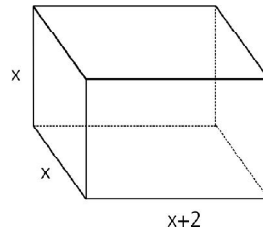
β. $4x^2(\dots - 2) = 4x^3y - \dots$

γ. $(x+1)(\dots + 4) = 2x^2 + \dots + 5x + \dots$

δ. $(x^2 + y)(x - \dots) = \dots - x^2y^2 + \dots - y^3$

4 Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση.

Ο όγκος του ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου είναι: α. $2x+1$ β. x^3+2 γ. x^3+2x^2 δ. x^3+2x



5 Τα πολυώνυμα $P(x) = (x-2)(x-3)$ και $Q(x) = ax^2 + \beta x + 6$ είναι ίσα, όταν

α) $a = 1$ και $\beta = 5$, β) $a = 2$ και $\beta = 3$, γ) $a = 1$ και $\beta = -5$, δ) $a = -5$ και $\beta = 1$

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1

Να κάνετε τις πράξεις:

α. $(-3x^2y + 5y^2x + 4xy)(-2x^3y^2\omega^3)$

β. $(-xy + \omega)(-2x^2y + 4xy - 2xy^2)$

γ. $(a + \beta)(3a - \beta) - (4\beta - a)(2a - \beta) - 2\beta(2a + \beta)$

δ. $(2x + 3y)(x - 4y) - (x + 5y)(-y - x) - 3xy(x - y)$

2

Να κάνετε τις πράξεις:

α. $(x + 1)(y - 2) - (3y + 4)(x - 6) + 2(x - 6y)$

β. $(2x + 3y)(3x - 2y) - 3(x^2 - y^2) + 4(x^2 - xy + y^2)$

γ. $(x + y)(3x - y) - [xy - x(2x - y)]$

δ. $(3a^2 + 2a\beta + \beta^2)(-2a^2 + 3a\beta - \beta^2)$

3

Να κάνετε τις πράξεις:

α. $(12x^5 - 6x^4 - 3x^3) : (-3x^3)$

β. $(1 - 2x^2 + 4x^3)(2 - 5x^2 + 4x)$

γ. $(12a^{m+1}\beta^v - 3a^m\beta^{v+1} - 6a^{m+1}\beta^{v+1}) : (2a^m\beta^{v-1})$

δ. $(a + \beta - \gamma)(a + \beta) + (a - \beta + \gamma) \cdot (a + \gamma) + (\beta + \gamma - a)(\beta + \gamma)$

2	2x	6
x	x ²	3x
	x	3

4

Να υπολογίσετε το γινόμενο $(x + 3)(x + 4)$ και να το ερμηνεύσετε γεωμετρικά.

5

Να εκτελέσετε τις παρακάτω πράξεις και μετά να βρείτε την αριθμητική τιμή του αποτελέσματος για τις τιμές των γραμμάτων που αναφέρονται:

α. $(x^2y - 2xy^2)(2x - y) - 2x^3(x + y) - (x - y)(-2y^3)$ για $x = -1, y = 2$

β. $a^2 + a\beta^2 - [a^3 - (a + \beta)(a^2 + \beta^2)]$ για $a = -2, \beta = \frac{1}{2}$

6

Αν $P(x) = 3x(-2x + 4)(x - 1)$ και $Q(x) = ax^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta$, να βρείτε τις τιμές των a, β, γ, δ , ώστε τα πολυώνυμα $P(x)$ και $Q(x)$ να είναι ίσα.

ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗΣ

Ερώτηση 1

Τι ονομάζουμε μονώνυμο;

Ερώτηση 2

Πως γίνεται ο πολλαπλασιασμός μονωνύμου με πολυώνυμο και πως γίνεται ο πολλαπλασιασμός πολυωνύμων;

Άσκηση 1

α. Για να είναι το πηλίκο $a^ν : a^μ$ μονώνυμο πρέπει ν μ.

Να σημειώσετε το κατάλληλο σύμβολο ανισότητας.

β. Δίνονται τα μονώνυμα $(a+1)x^2y^{n+1}$ και $-3x^{m+5}y^2$.

Να βρείτε τους α, n και μ ώστε τα μονώνυμα να είναι ίσα.

Άσκηση 2

Να υπολογισθεί η αριθμητική τιμή της παράστασης Α για $a = 13^{2004}$, $\beta = 3$, $\gamma = -1$ όπου:

$$A = (a - \beta)(a + \beta + \gamma) - (a + \beta)(a - \beta + \gamma)$$

Άσκηση 3

α. Να κάνετε την πράξη: $(x^μy^{κ-2} + x^{μ-1}y^{κ-1} + x^{μ-2}y^κ)(x^2 - y^2)$

β. Αν $P(x) = x(2x - 1)(x + 2)$ και $Q(x) = ax^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta$, να βρείτε τις τιμές των α, β, γ, δ, ώστε τα πολυώνυμα P(x) και Q(x) να είναι ίσα.