# 1.3 Πολυώνυμα - Πρόσθεση και αφαίρεση πολυωνύμων

## Ερώτηση 1

α. Τι είναι πολυώνυμο;

β. Τι ονομάζουμε όρο ενός πολυωνύμου και τι βαθμό αυτού;

γ. Πότε ένα πολυώνυμο λέγεται διώνυμο και πότε τριώνυμο;

## Απάντηση

α. **Πολυώνυμο** είναι το αλγεβρικό άθροισμα ανόμοιων ακέραιων μονωνύμων.

β. **Όρος** του πολυωνύμου λέγεται κάθε μονώνυμο που περιέχεται σε αυτό.

**Βαθμός** ενός πολυωνύμου ως προς μία ή περισσότερες μεταβλητές του είναι ο μεγαλύτερος από τους βαθμούς των όρων του.

γ. Ένα πολυώνυμο λέγεται **διώνυμο** αν έχει δύο όρους και **τριώνυμο** αν έχει τρείς όρους.

*Κάθε αριθμός θεωρείται ως πολυώνυμο μηδενικού βαθμού. Ειδικά ο αριθμός μηδέν (0) λέγεται μηδενικό πολυώνυμο και δεν έχει βαθμό.*


*Ένα πολυώνυμο ως προς μία μεταβλητή συνηθίζεται να το γράφουμε διατεταγμένο κατά τις φθίνουσες δυνάμεις της μεταβλητής.*

*Για παράδειγμα το πολυώνυμο:*

$$-5x-2x^2+6$$

*το γράφουμε* $P(x)=-2x^2-5x+6$

*Η αριθμητική του τιμή για x =2 είναι*

$$P(2)=-2\cdot 2^2-5\cdot 2+6=-12$$

## Ερώτηση 2

α. Πότε δυο πολυώνυμα είναι ίσα;

β. Τι λέμε αναγωγή ομοίων όρων;

γ. Πως προσθέτουμε και αφαιρούμε πολυώνυμα;

## Απάντηση

α. Δυο πολυώνυμα είναι ίσα, όταν έχουν όρους ίσα μονώνυμα.

β. Αναγωγή ομοίων όρων λέμε την εργασία κατά την οποία αντικαθιστούμε τα όμοια μονώνυμα με το αλγεβρικό άθροισμά τους.

π.χ. $$\underline{\underline{3\alpha^3}}-\underline{5\beta^2}+\underline{\underline{4\alpha^3}}+\underline{\beta^2}-2=3\alpha^3+4\alpha^3-5\beta^2+\beta^2-2=$$
$$(3+4)\alpha^3+(-5+1)\beta^2-2=7\alpha^3-4\beta^2-2$$

γ. Η πρόσθεση και η αφαίρεση πολυωνύμων γίνεται χρησιμοποιώντας τις γνωστές ιδιότητες των πραγματικών αριθμών.

π.χ αν $P(x)=4x^3+2x^2+1$ και $Q(x)=-5x^2+4x+2$ τότε:

$$P(x)+Q(x)=\left(4x^3+2x^2+1\right)+\left(-5x^2+4x+2\right)=$$
$$4x^3+\underline{2x^2}+1-\underline{5x^2}+4x+2=$$
$$4x^3-3x^2+4x+3$$

Δείτε το και σχηματικά:

(με κατακόρυφη πρόσθεση)
$$\begin{array}{rrrrr} & 4x^3 & +2x^2 & & +1 \\ + & & -5x^2 & +4x & +2 \\ \hline & 4x^3 & -3x^2 & +4x & +3 \end{array}$$

Όμοια έχουμε για την αφαίρεση:

$$P(x)-Q(x)=\left(4x^3+2x^2+1\right)-\left(-5x^2+4x+2\right)=$$
$$=4x^3+\underline{2x^2}+1+\underline{5x^2}-4x-2$$
$$=9x^3+7x^2-4x-1$$

## ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ – ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

**1** Αν $P(x)=x^2-3x+4$, να προσδιοριστεί το πολυώνυμο

$$Q(x)=P(2x)-P(-x)$$

**Λύση**

Το πολυώνυμο $P(2x)$ προκύπτει, αν στο $P(x)$ θέσουμε, όπου x το 2x, οπότε έχουμε:

$$P(2x)=(2x)^2-3(2x)+4=4x^2-6x+4$$

Το πολυώνυμο $P(-x)$ προκύπτει, αν στο $P(x)$ θέσουμε, όπου x το -x, οπότε έχουμε:

$$P(-x)=(-x)^2-3(-x)+4=x^2+3x+4\,.$$

Άρα: $Q(x)=P(2x)-P(-x)=$

$$\left(4x^2-6x+4\right)-\left(x^2+3x+4\right)=$$

$$4x^2-6x+4-x^2-3x-4=3x^2-9x$$

**2** Να γράψετε τα πολυώνυμα κατά τις φθίνουσες δυνάμεις του x.

α. $P(x)=3x-5x^2+x^4+10+2x^3$

β. $Q(x)=-6x+2x^3+1$

γ. $A(x)=-3x^2+7+2x^3+7x$

δ. $B(x)=x-x^4-5$

**Λύση**

α. $P(x)=x^4+2x^3-5x^2+3x+10$ β. $Q(x)=2x^3-6x+1$

γ. $A(x)=2x^3-3x^2+7x+7$ δ. $B(x)=-x^4+x-5$

**3** Δίνεται το πολυώνυμο $A=-2xy^2+y^3+2x^3-xy^2$.

α. Να βρείτε την αριθμητική του τιμή για $x=2$ και $y=-1$.

β. Να γράψετε το πολυώνυμο κατά τις φθίνουσες δυνάμεις του y. Ποιος είναι ο βαθμός του ως προς x και y;

**Λύση**

α. $A=-2\cdot 2\cdot(-1)^2+(-1)^3+2\cdot 2^3-2(-1)^2$

$\quad =-4-1+16-2=9$

β. $A=y^3-2xy^2-xy^2+2x^3=y^3-3xy^2+2x^3$

Ο βαθμός του ως προς x είναι 3 και ως προς x και y είναι πάλι 3.

**4** Αν $P(x)=2x^2+2x-9$, να αποδείξετε ότι:

α. $P(-3)=P(2)$ β. $3P(1)+P(3)=0$

**Λύση**

α. $P(-3)=2(-3)^2+2(-3)-9=2\cdot 9-6-9=3$

$P(2)=2\cdot 2^2+2\cdot 2-9=8+4-9=3$

β. $3P(1)+P(3)=3\left(2\cdot 1^2+2\cdot 1-9\right)+(2\cdot 3^2+2\cdot 3-9)=$

$=3(2+2-9)+(18+6-9)=3(-5)+15=-15+15=0$

**5** Να κάνετε τις πράξεις:

α. $\left(2x^2-x\right)-\left(x^3-5x^2+x-1\right)$

β. $-3x^2y-\left(2xy-yx^2\right)+\left(3xy-y^3\right)$

γ. $\left(2\alpha^2-3\alpha\beta\right)-\left(\beta^2+4\alpha\beta\right)-\left(\alpha^2+\beta^2\right)$

δ. $2\omega^2-\left[4\omega-3-\left(\omega^2+5\omega\right)\right]$

ε. $\left(\frac{1}{2}x^2-\frac{3}{4}x+1\right)-\left(\frac{1}{6}x+x^2-\frac{1}{3}\right)$

**Λύση**

α. $\left(2x^2-x\right)-\left(x^3-5x^2+x-1\right)=2x^2-x-x^3+5x^2-x+1=$
$-x^3+7x^2-2x+1$

β. $-3x^2y-\left(2xy-yx^2\right)+\left(3xy-y^3\right)=$
$-3x^2y-2xy+yx^2+3xy-y^3=-3x^2y+xy+yx^2-y^3$

γ. $\left(2\alpha^2-3\alpha\beta\right)-\left(\beta^2+4\alpha\beta\right)-\left(\alpha^2+\beta^2\right)=$
$2\alpha^2-3\alpha\beta-\beta^2-4\alpha\beta-\alpha^2-\beta^2=\alpha^2-7\alpha\beta-2\beta^2$

δ. $2\omega^2-\left[4\omega-3-\left(\omega^2+5\omega\right)\right]=$
$2\omega^2-\left(4\omega-3-\omega^2-5\omega\right)=$
$2\omega^2-4\omega+3+\omega^2+5\omega=$
$3\omega^2+\omega+3$

ε. $\left(\frac{1}{2}x^2-\frac{3}{4}x+1\right)-\left(\frac{1}{6}x+x^2-\frac{1}{3}\right)=$
$\frac{1}{2}x^2-\frac{3}{4}x+1-\frac{1}{6}x-x^2+\frac{1}{3}=$
$\left(\frac{1}{2}-1\right)x^2-\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{6}\right)x+1+\frac{1}{3}=-\frac{1}{2}x^2-\frac{11}{3}x+\frac{4}{3}$

**6** Αν $A(x)=2x^3-x^2+x-4$,
$B(x)=-3x^3+5x-2$ και $\Gamma(x)=4x^2-3x+8$,
να βρείτε τα πολυώνυμα:

α. $A(x)-B(x)$

β. $A(x)+\Gamma(x)$

γ. $\Gamma(x)-\left[A(x)+B(x)\right]$

**Λύση**

α. $A(x)-B(x)=2x^3-x^2+x-4-$
$\left(-3x^3+5x-2\right)=$
$2x^3-x^2+x-4+3x^3-5x+2=$
$5x^3-4x-2$

β. $A(x)+\Gamma(x)=$
$2x^3-x^2+x-4+4x^2-3x+8=$
$2x^3+3x^2+x+4$

γ. $\Gamma(x)-\left[A(x)+B(x)\right]=\Gamma(x)-A(x)-B(x)=$
$=4x^2-3x+8-2x^3+x^2-x+4+$
$3x^3-5x+2=x^3+5x^2-9x+14$

**7** Αν $P(x)=\left(-5x^2+4x-3\right)-\left(x^2-2x+1\right)+\left(3x^2+x\right)$ και $Q(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$, να βρείτε τις τιμές των α,β,γ, ώστε τα πολυώνυμα $P(x)$ και $Q(x)$ να είναι ίσα.

**Λύση**

$P(x)=-5x^2+4x-3-x^2+2x-1+3x^2+x=-3x^2+7x-4$

$Q(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$

Πρέπει: $\alpha=-3,\ \beta=7,\ \gamma=-4$

## ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

**1** *Ποιες από τις παρακάτω αλγεβρικές παραστάσεις είναι πολυώνυμα:*

α. $2x^3-5x^2+2x-\frac{3}{x}$ β. $4x^4-5x^3-10$

γ. $\sqrt{2}x^3y-5xy+y^4+\frac{4}{3}$ δ. $x^3+2x^2y^3-\sqrt{x}y^4-2y^3$

**2** *Ποια από τα παρακάτω πολυώνυμα είναι 2ου βαθμού ως προς x;*

α. $5x^3+x^2-3x^3+2x-2x^3+6$ β. $4xy-2y+10$

**3** *Ένας μαθητής θέλοντας να υπολογίσει το άθροισμα και τη διαφορά των πολυωνύμων $7x^3-4x^2+2x+7$ και $2x^3-6x+3$ έγραψε:*

Άθροισμα

$$\begin{array}{r} 7x^3-4x^2+2x\ +\ 7 \\ +\ 2x^3 \qquad\quad -6x\ +3 \\ \hline 9x^3-4x^2-\ 4x+10 \end{array}$$

Διαφορά

$$\begin{array}{r} 7x^3-4x^2+2x+7 \\ -\ \ 2x^3 \qquad\ +6x-3 \\ \hline 5x^3-4x^2+8x+4 \end{array}$$

Είναι σωστός ο τρόπος που εφάρμοσε; Να τεκμηριώσετε την απάντησή σας.

**4** *Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση.*

*Το πολυώνυμο που πρέπει να προσθέσουμε στο $2x^2+5x+7$ για να βρούμε άθροισμα $10x^2+3x+2$ είναι το:*

α. $6x^2+x-2$ β. $10x^2+9x+2$ γ. $8x^2-2x-5$ δ. $-6x^2+x+12$

**5** *Τα πολυώνυμα $A(x), B(x)$ και $\Gamma(x)$ έχουν βαθμούς 4,3 και 5 αντιστοίχως.*

α. Να βρείτε το βαθμό του πολυωνύμου $A(x)+B(x)$.

β. Αν το πολυώνυμο $A(x)+\Gamma(x)$ δεν είναι το μηδενικό, τι βαθμό μπορεί να έχει;

## ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

**1** Να γράψετε τα πολυώνυμα κατά τις φθίνουσες δυνάμεις του x.

**α.** $P(x)=2x-3x^2+x^4+5+4x^3$ **β.** $Q(x)=-4x+3x^3+1$ **γ.** $A(x)=-4x^2+8+2x^3+5x$ **δ.** $B(x)=x-x^5-4$

**2** Δίνεται το πολυώνυμο $A=-2xy^2+y^3+2x^3-xy^2$.

**α.** Να βρείτε την αριθμητική του τιμή για $x=-2$ και $y=0$.

**β.** Να γράψετε το πολυώνυμο κατά τις φθίνουσες δυνάμεις του y. Ποιος είναι ο βαθμός του ως προς x και y;

**3** Να κάνετε τις πράξεις:

**α.** $(2x^2-x)-(x^3-4x^2+x-2)$ **β.** $-4x^2y-(3xy-2yx^2)+(4xy-y^3)$ **γ.** $(2\alpha^2-4\alpha\beta)-(\beta^2+3\alpha\beta)-(\alpha^2+\beta^2)$

**δ.** $2\omega^2-\left[4\omega-4-(\omega^2-4\omega)\right]$ **ε.** $\left(\frac{1}{3}x^2-\frac{2}{3}x+1\right)-\left(\frac{1}{5}x+x^2-\frac{1}{4}\right)$ **στ.** $(0{,}3x^3+2{,}1x^2)+(3{,}2x^3-0{,}3x^2-2)$

**4** Αν $A(x)=4x^3-2x^2+3x-5$, $B(x)=-2x^3+4x-1$ και $\Gamma(x)=2x^2-4x+3$, να βρείτε τα πολυώνυμα:

**α.** $A(x)-B(x)$ **β.** $A(x)+\Gamma(x)$ **γ.** $\Gamma(x)-\left[A(x)+B(x)\right]$

**5** Αν $P(x)=(-3x^2+5x-2)-(x^2-4x+3)+(2x^2+3x)$ και $Q(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$, να βρείτε τις τιμές των α,β,γ, ώστε τα πολυώνυμα $P(x)$ και $Q(x)$ να είναι ίσα.

**6** Αν $P(x)=2x^2+x-5$, να αποδείξετε ότι: **α.** $P(1)=P(2)-7$ **β.** $P(-1)-2P(1)=0$

**7** Αν $P(x)=4x^2-3x$ και $Q(x)=36x^2+9x$, να αποδείξετε ότι: $P(3x)-Q(-x)=0$.

**8** Αν $P(x)=x^2-4x+3$, να προσδιοριστεί το πολυώνυμο $Q(x)=P(2x)-P(-x)$.

**9** Να αποδείξετε ότι, αν από το εμβαδόν $7x^2+9x+24$ ενός ορθογωνίου αφαιρέσουμε τα εμβαδά $x^2+6x+6$, $6x^2+3x+2$ δύο άλλων ορθογωνίων θα βρούμε το εμβαδόν τετραγώνου πλευράς 4.

**10** Να βρεθεί ο βαθμός του πολυωνύμου:

$$P(x)=(\alpha+2)x^4-\alpha x^3-(4\alpha+3)x^2+x+4$$

και η τιμή του α, ώστε $P(1)=1$.

**11** Δίνεται το πολυώνυμο:

$$P(x)=(5x^2-x)-\left[2-(3x+5x^2)-2x^3\right]-\left[(4x-3)-x^3\right]$$

i) Να υπολογιστεί η τιμή $P\left(\frac{1}{2}\right)$

ii) Να βρεθεί το πολυώνυμο $Q(x)=P\left(\frac{x}{2}\right)-P(-2x)$