

## 1.2 Μονώνυμα - πράξεις με μονώνυμα

### A. Αλγεβρικές παραστάσεις - Μονώνυμα

#### Ερώτηση 1

- Τι ονομάζουμε αριθμητική παράσταση;
- Τι ονομάζουμε αλγεβρική παράσταση;
- Πότε μια αλγεβρική παράσταση λέγεται ακέραια;
- Τι ονομάζουμε αριθμητική τιμή μιας αλγεβρικής παράστασης.

#### Απάντηση

- Αριθμητικές παραστάσεις** λέμε τις εκφράσεις που περιέχουν μόνο αριθμούς.  $2 \cdot 4 + 3 \cdot 5^2$
- Αλγεβρικές παραστάσεις** λέμε τις εκφράσεις όπου εκτός από αριθμούς περιέχουν και μεταβλητές. Για παράδειγμα, οι παραστάσεις:  $2 \cdot \frac{x}{y} + 3 \cdot y^2$   
 $4 \cdot x + 5 \cdot y^6 x$   
 $3x, 2a^2 + x, -\sqrt{3}y^2 + 1$  είναι αλγεβρικές.
- Μια αλγεβρική παράσταση λέγεται **ακέραια**, όταν μεταξύ των μεταβλητών της σημειώνονται μόνο οι πράξεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού και οι εκθέτες των μεταβλητών της είναι φυσικοί αριθμοί. Π.χ.  $4x^3 - x^2 \cdot y + y^7$
- Αν σε μια αλγεβρική παράσταση αντικαταστήσουμε τη μεταβλητή (ή τις μεταβλητές) με έναν αριθμό (ή με αριθμούς) και εκτελέσουμε τις πράξεις που σημειώνονται προκύπτει ένας αριθμός που λέγεται **αριθμητική τιμή** της αλγεβρικής αυτής παράστασης.  
Για παράδειγμα: αν  $a = 2$  η αριθμητική τιμή της αλγεβρικής παράστασης  $2a^2 + 3$  είναι  $2 \cdot 2^2 + 3 = 11$ .

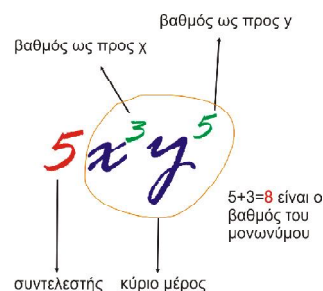
#### Ερώτηση 2

- Τι ονομάζουμε μονώνυμα;

- Τι ονομάζουμε συντελεστή, κύριο μέρος και βαθμό μονωνύμου;
- Ποιά μονώνυμα λέμε όμοια;
- Πότε δύο μονώνυμα λέγονται ίσα και πότε αντίθετα;

#### Απάντηση

- Μονώνυμα** ονομάζουμε τις ακέραιες αλγεβρικές παραστάσεις, στις οποίες μεταξύ των μεταβλητών σημειώνεται μόνο η πράξη του πολλαπλασιασμού. π.χ.  $7x^4y^2\omega$ ,  $-9x^8y^6\omega^5$ ,  $6x^9y^3\omega^7$ .



- Ο αριθμητικός παράγοντας λέγεται **συντελεστής** του μονωνύμου. Το γινόμενο όλων των μεταβλητών του λέγεται **κύριο μέρος** του μονωνύμου. Ο εκθέτης μιας μεταβλητής λέγεται **βαθμός του μονωνύμου ως προς τη μεταβλητή** αυτή, ενώ το άθροισμα των εκθετών των μεταβλητών του λέγεται **βαθμός του μονωνύμου**.
- Όμοια** λέγονται τα μονώνυμα που έχουν το ίδιο κύριο μέρος. Για παράδειγμα τα μονώνυμα  $47x^5y^3\omega$ ,  $-3x^5y^3\omega$ ,  $10x^5y^3\omega$  είναι όμοια.

δ. 1<sup>ο</sup>α ηέγονται τα όμοια μονώνυμα που έχουν τον ίδιο συντελεστή και **αντίθετα** αν έχουν αντίθετο συντελεστή.

Οι αριθμοί θεωρούνται ως μονώνυμα που τα ονομάζουμε **σταθερά μονώνυμα**. Ο αριθμός 0 λέγεται **μηδενικό μονώνυμο** και δεν έχει βαθμό, ενώ όλη τα άλλα σταθερά μονώνυμα είναι μηδενικού βαθμού.

## ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ - ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

Να βρεθεί η αριθμητική τιμή της παράστασης:

$$2xy - x^2y + 2xy^2 + 2003$$

1

α. για  $x = 10$  και  $y = 0$ .

β. για  $x = 0$  και  $y = 10$ .

### Λύση

α. Αντικαθιστούμε όπου  $x = 10$  και  $y = 0$  στην παράσταση

$$2 \cdot 10 \cdot 0 - 10^2 \cdot 0 + 2 \cdot 10 \cdot 0^2 + 2007 = 2003$$

β. Αντικαθιστούμε όπου  $x = 0$  και  $y = 10$  στην παράσταση

$$2 \cdot 0 \cdot 10 - 0^2 \cdot 10 + 2 \cdot 0 \cdot 10^2 + 2007 = 2003$$

2

Να βρείτε τις ακέραιες τιμές του  $n$  ώστε η αλ-

γεβρική παράσταση  $-\frac{2}{3}x^{7-n} \cdot y^{n-4}$  να είναι μονώνυμο. Στη συνέχεια για τις τιμές αυτές να βρείτε τα αντίστοιχα μονώνυμα.

### Λύση

Για να είναι μονώνυμο η παραπάνω αλγεβρική παράσταση πρέπει οι εκθέτες των μεταβλητών  $x, y$  να είναι φυσικοί αριθμοί.

Δηλαδή πρέπει να ισχύουν συγχρόνως:

$7 - n \geq 0$  και  $n - 4 \geq 0$  ή  $-n \geq -7$  και  $n \geq 4$  ή  $n \leq 7$  και  $n \geq 4$ .  
Οι κοινές ακέραιες τιμές για τη μεταβλητή  $n$  είναι 4, 5, 6, 7.

Για  $n = 4$  έχουμε:

$$-\frac{2}{3}x^{7-4}y^{4-4} = -\frac{2}{3}x^3y^0 = -\frac{2}{3}x^3.$$

Για  $n = 5$  έχουμε:

$$-\frac{2}{3}x^{7-5}y^{5-4} = -\frac{2}{3}x^2y^1 = -\frac{2}{3}x^2y.$$

Για  $n = 6$  έχουμε:

$$-\frac{2}{3}x^{7-6}y^{6-4} = -\frac{2}{3}x^1y^2 = -\frac{2}{3}xy^2.$$

Για  $n = 7$  έχουμε:

$$-\frac{2}{3}x^{7-7}y^{7-4} = -\frac{2}{3}x^0y^3 = -\frac{2}{3}y^3.$$

3

Ένα μονώνυμο έχει συντελεστή  $-8$  και μεταβλητές  $x$  και  $y$ . Να προσδιορίσετε το μονώνυμο, αν ο βαθμός του ως προς  $x$  είναι 3 και ως προς  $y$  είναι 7.

### Λύση

Το μονώνυμο είναι της μορφής  $-8x^ky^n$ .

Σύμφωνα με την εκφώνηση είναι  $k = 3$  και  $k + n = 7$  ή

$$k = 3 \text{ και } n = 4.$$

Οπότε το μονώνυμο είναι  $-8x^3y^4$ .

4

Να προσδιορίσετε την τιμή του φυσικού  $v$ , ώστε το μονώνυμο  $4x^2y^v$

- α. να είναι μηδενικού βαθμού ως προς  $y$   
 β. να είναι έκτου βαθμού ως προς  $x$  και  $y$   
 γ. να έχει αριθμητική τιμή 64 για  $x = 1$  και  $y = 2$ .

**Λύση**

- α. Πρέπει ο εκθέτης του  $y$  να είναι μηδέν, δηλ.  $v = 0$ .  
 β. Πρέπει το άθροισμα των εκθετών να είναι 6, δηλ.  
 $2 + v = 6$  ή  $v = 6 - 2$  ή  $v = 4$ .  
 γ. Πρέπει  $4 \cdot 1^2 \cdot 2^v = 64$  ή  $2^{v+2} = 8$  ή  $v = 1$ .

5

Να βρείτε τους αριθμούς  $k, \lambda, \mu$ , ώστε το μονώνυμο  $2kx^4y^v, \lambda x^{2v}y^\mu$  να είναι:

- α. όμοια β. ίσα γ. αντίθετα

**Λύση**

- α. Πρέπει να έχουν το ίδιο κύριο μέρος, δηλ.  
 $v = \mu$  και  $2v = 4$  άρα  $v = \mu = 2$ .  
 β. Πρέπει να είναι όμοια δηλ.  $v = \mu = 2$  και επιπλέον  $2k = \lambda$ .  
 γ. Πρέπει να είναι όμοια δηλ.  $v = \mu = 2$  και επιπλέον  $2k = -\lambda$ .

**ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ**

1

Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα:

Μονώνυμο	Συν/στής	Κύριο μέρος	Βαθμός ως προς $x$	Βαθμός ως προς $y$	Βαθμός ως προς $x, y$
$-3x^4y^7$					
$-\sqrt{2}x^2y^8$					
$\frac{1}{5}x y^6$					

2

Ποια από τις παρακάτω αλγεβρικές παραστάσεις δεν είναι μονώνυμο; α.  $-x^8y$  β.  $-\frac{3}{2}(x^2)^6 y^7$  γ.  $(-3 + \sqrt{5})x^3y^2$  δ.  $6a^4b^7\gamma\delta$

3

Ένα ορθογώνιο έχει διπλάσιο μήκος από το πλάτος του  $y$ . Το μονώνυμο που εκφράζει το εμβαδόν του είναι:

- α.  $4y$  β.  $3y$  γ.  $2y^2$  δ.  $y^2$

4

Να χαρακτηρίσετε τις επόμενες προτάσεις με (Σ), αν είναι σωστές ή με (Λ), αν είναι λανθασμένες:

1. Οι εκθέτες στις μεταβλητές ενός μονωνύμου είναι φυσικοί αριθμοί.
  2. Οι πραγματικοί αριθμοί θεωρούνται μονώνυμα.
  3. Μια αλγεβρική παράσταση δεν έχει υποχρεωτικά αριθμητική τιμή για οποιαδήποτε τιμή των μεταβλητών της.
  4. Η παράσταση  $-\frac{4}{3}x^{-2}y\omega$  είναι μονώνυμο.
- 5** Ένα μονώνυμο έχει συντελεστή  $\frac{2}{3}$  και ακέραιο μέρος  $xy^3\omega^2$ . Ποιο είναι το ίσο του και το αντίθετο μονώνυμό του;

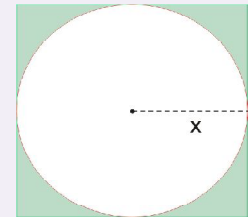
### ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

**1** Να βρεθεί η αριθμητική τιμή της παράστασης  $3xy - 5x^2y + 2xy^2 + 1960$  για **α.** για  $x = -10$  και  $y = 10$  **β.** για  $x = 0$  και  $y = 0$

**2** Ποιες από τις παρακάτω αλγεβρικές παραστάσεις είναι μονώνυμα και ποιες όχι; Στην περίπτωση που μια αλγεβρική παράσταση είναι μονώνυμο ποιος είναι ο συντελεστής και ποιο το κύριο μέρος του; Υπάρχουν μονώνυμα που να είναι όμοια;

**α.**  $\sqrt{5}a\beta^2$       **β.**  $\frac{5}{3}x^2y^2\omega$       **γ.**  $(3 + \sqrt{2})xy\omega$       **δ.**  $\frac{(\omega - x)}{2}y$       **ε.**  $\frac{2\kappa^2}{\omega \cdot x}$       **στ.**  $3x^2y^{-2}$   
**ζ.**  $\frac{5x^2y^2\omega}{4}$       **η.**  $-\frac{1}{2}(\omega - x)$       **θ.**  $-x^2y^2\omega$       **ι.**  $\frac{x^3}{4}$

**3** Να βρείτε το μονώνυμο που εκφράζει το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου μέρους του διπλανού σχήματος. Να συγκρίνετε το εμβαδόν του κύκλου με το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου μέρους.



**4** **α.** Για να είναι το πηλίκο  $a^v : a^μ$  μονώνυμο πρέπει  $v \dots \mu$ . Να σημειώσετε το κατάλληλο σύμβολο ανισότητας.  
**β.** Δίνονται τα μονώνυμα  $(a+1)x^2y^{\eta+1}$  και  $-3x^{\mu+5}y^2$ . Να βρείτε τους αριθμούς  $a$ ,  $\eta$  και  $\mu$  ώστε τα μονώνυμα να είναι ίσα.

**5** Ένα μονώνυμο έχει συντελεστή 18 και μεταβλητές  $x$  και  $y$ . Να προσδιορίσετε το μονώνυμο, αν ο βαθμός του ως προς  $x$  είναι 4 και ως προς  $y$  είναι 10.

**6** Να βρείτε τις ακέραιες τιμές του  $\eta$  ώστε η αλγεβρική παράσταση  $7x^{5-\eta}y^{\eta-1}$  να είναι μονώνυμο. Στη συνέχεια για τις τιμές αυτές να βρείτε τα αντίστοιχα μονώνυμα.

## Β. Πράξεις με μονώνυμα

### Ερώτηση 1

- α. Πως γίνεται η πρόσθεση και η αφαίρεση μονωνύμων;  
 β. Πως γίνεται ο πολλαπλασιασμός (γινόμενο) μονωνύμων;  
 γ. Πως γίνεται η διαίρεση μονωνύμων;

### Απάντηση

- α. Προσθέτουμε ή αφαιρούμε μόνο όμοια μονώνυμα. Το άθροισμά τους ή η διαφορά τους είναι ένα όμοιο μονώνυμο με τα αρχικά και έχει συντελεστή το άθροισμα ή τη διαφορά των συντελεστών τους.

$$\text{π.χ. } -3x^2y + 5x^2y - x^2y = (-3 + 5 - 1)x^2y = x^2y$$

- β. Το γινόμενο μονωνύμων είναι μονώνυμο με:

- συντελεστή το γινόμενο των συντελεστών τους
- κύριο μέρος το γινόμενο όλων των μεταβλητών τους με εκθέτη κάθε μεταβλητής το άθροισμα των εκθετών της.

$$\text{π.χ. } (2x^2y^3)(-5ky^2) = 2(-5)x^2ky^3y^2 = -10x^2ky^5$$

- γ. Η διαίρεση μονωνύμων γίνεται αν πολλαπλασιάσουμε το διαιρετέο με τον αντίστροφο του διαιρέτη.

$$\begin{aligned} \text{π.χ. } (-4\alpha\beta^2) : (-8\alpha\beta x) &= \\ -4\alpha\beta^2 \frac{1}{-8\alpha\beta x} &= \frac{-4\alpha\beta^2}{-8\alpha\beta x} = \\ \frac{-4}{-8} \frac{\alpha}{\alpha} \frac{\beta^2}{\beta} \frac{1}{x} &= \frac{1}{2} \frac{\beta}{x} \end{aligned}$$

Στη διαίρεση μονωνύμων το αποτέλεσμα δηλ. το πηλίκο δεν είναι πάντοτε μονώνυμο. Στο παραπάνω παράδειγμα δεν είναι μονώνυμο. Δείτε όμως κι' αυτό:

$$\begin{aligned} (-8\alpha^4\beta^2x^3) : (-4\alpha\beta x) &= -8\alpha^4\beta^2x^3 \cdot \frac{1}{-4\alpha\beta x} = \\ \frac{-8\alpha^4\beta^2x^3}{-4\alpha\beta x} &= 2\alpha^{4-1}\beta^{2-1}x^{3-1} = 2\alpha^3\beta x^2 \end{aligned}$$

## ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ - ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

Να κάνετε τις πράξεις:

α.  $3x^2y^2 - x^2y^2 + 8x^2y^2 - 12x^2y^2$

1

β.  $2x^2 \cdot 3x^3y \left( -\frac{4}{3}xy\omega^2 \right) \left( -\frac{1}{8}x^2\omega\alpha \right)$

γ.  $(-4xy^3\omega^2) : \left( -\frac{1}{2}xy^2\omega^2 \right)$

δ.  $(-4x^4y^2\omega^2) : (2x^3y\omega^2) \cdot 3xy\omega$

### Λύση

α.  $3x^2y^2 - x^2y^2 + 8x^2y^2 - 12x^2y^2 = (3 - 1 + 8 - 12)x^2y^2 = -2x^2y^2$

β.  $2x^2 \cdot 3x^3y \left( -\frac{4}{3}xy\omega^2 \right) \left( -\frac{1}{8}x^2\omega\alpha \right) =$

$$2 \cdot 3 \cdot \left( -\frac{4}{3} \right) \left( -\frac{1}{8} \right) x^2 \cdot x^3 \cdot x \cdot x^2 \cdot y \cdot y \cdot \omega^2 \omega \cdot \alpha = x^8y^2\omega^3\alpha$$

γ.  $(-4xy^3\omega^2) : \left( -\frac{1}{2}xy^2\omega^2 \right) =$

$$-4xy^3\omega^2 \cdot \frac{1}{-\frac{1}{2}xy^2\omega^2} = \frac{-4xy^3\omega^2}{-\frac{1}{2}xy^2\omega^2} = 8y$$

δ.  $(-4x^4y^2\omega^2) : (2x^3y\omega^2) \cdot 3xy\omega =$

$$\frac{-4x^4y^2\omega^2}{2x^3y\omega^2} \cdot 3xy\omega = -2xy \cdot 3xy\omega = -6x^2y^2\omega$$

2

Ένα κυλινδρικό δοχείο έχει ακτίνα βάσης  $\rho$  και ύψος  $u$ . Ένα δεύτερο κυλινδρικό δοχείο έχει διπλάσια ακτίνα. Να βρείτε:

- τον όγκο του δεύτερου δοχείου και
- πόση επιπλέον χωρητικότητα έχει από το πρώτο;

**Λύση**

Ο όγκος του πρώτου δοχείου είναι  $V_1 = \pi\rho^2u$ .

α. Το δεύτερο δοχείο έχει όγκο

$$V_2 = \pi(2\rho)^2u = 4\pi\rho^2u = 4V_1,$$

δηλ. 4-πλάσιο από το πρώτο δοχείο.

β. Η διαφορά των όγκων είναι:

$$V_2 - V_1 = 4\pi\rho^2u - \pi\rho^2u = 3\pi\rho^2u = 3V_1.$$

Άρα το δεύτερο δοχείο έχει 3 φορές περισσότερη χωρητικότητα από το πρώτο.

3

Να βρείτε τους ακέραιους  $\kappa$ ,  $\eta$  ώστε η παρακάτω αλγεβρική παράσταση να είναι μονώνυμο και στη συνέχεια να βρείτε το μονώνυμο:

$$A = \frac{3}{5}x^8y^{\kappa-5} - \frac{2}{3}x^{\eta-2}y^3$$

Στη συνέχεια να κάνετε την πράξη

$$A : (-5x^{10}y^5) \cdot (2x^4y^3)$$

**Λύση**

Πρέπει  $\kappa - 5 = 3$  και  $\eta - 2 = 8$ . Τότε  $\kappa = 8$  και  $\eta = 10$ .

$$\text{Έχουμε } \frac{3}{5}x^8y^{\kappa-5} - \frac{2}{3}x^{\eta-2}y^3 = \frac{3}{5}x^8y^{8-5} - \frac{2}{3}x^{10-2}y^3 =$$

$$\frac{3}{5}x^8y^3 - \frac{2}{3}x^8y^3 = \left(\frac{3}{5} - \frac{2}{3}\right)x^8y^3 = -\frac{1}{15}x^8y^3$$

$$\text{και } A : (-5x^{10}y^5) \cdot (2x^4y^3) = -\frac{1}{15}x^8y^3 : (-5x^{10}y^5) \cdot$$

$$(2x^4y^3) = \frac{1}{75}x^{-2} \cdot y^{-2} (2x^4y^3) = \frac{2}{75}x^2y$$

**ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ**

1

Ποια από τις παρακάτω αλγεβρικές παραστάσεις δεν είναι μονώνυμο; α.  $-x^8y$  β.  $-\frac{3}{2}(x^2)^6y^7$  γ.  $(-3 + \sqrt{5})x^3y^2$  δ.  $6a^4b^7\gamma\delta^{-2}$

2

Να χαρακτηρίσετε τις επόμενες προτάσεις με (Σ), αν είναι σωστές ή με (Λ), αν είναι λανθασμένες:

- Το ηλικίο μονωνύμων δεν είναι πάντα μονώνυμο.
- Το γινόμενο μονωνύμων είναι πάντα μονώνυμο.
- Το άθροισμα και η διαφορά ομοίων μονωνύμων είναι πάντα μονώνυμο.

- Η παράσταση  $-\frac{4x^2y}{3\omega}$  είναι μονώνυμο.

## 1.3 Πολυώνυμα - Πρόσθεση και αφαίρεση πολυωνύμων

3

Να αντιστοιχίσετε τις παραστάσεις της στήλης Α με τις ίσες τους παραστάσεις της στήλης Β.

**Στήλη Α**

α.  $-5x^2y + 5x^2y$

β.  $-5x^2y \cdot 5x^2y$

γ.  $-5x^3y^2 : xy$

δ.  $-\frac{1}{3}\omega^2y - \frac{1}{3}\omega^2y$

ε.  $\left(-\frac{1}{3}\omega^2y\right)\left(-\frac{1}{3}\omega^2y\right)$

στ.  $-4xy\omega + 8xy\omega$

**Στήλη Β**

1.  $-5x^2y$

2.  $\frac{1}{9}\omega^4y^2$

3.  $-25x^4y^2$

4.  $4xy\omega$

5. 0

6.  $-\frac{2}{3}\omega^2y$

## ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1

Δίνεται  $A = -2x^3y$ ,  $B = -x^2y^4$ ,  $\Gamma = xy^3$ . Να υπολογίσετε:

α.  $A \cdot B$

β.  $B \cdot \Gamma$

γ.  $A \cdot B \cdot \Gamma$

δ.  $A : B$

ε.  $A : \Gamma$

στ.  $B : \Gamma$

ζ.  $\Gamma : B$

η.  $B : A$

2

Να βρείτε τους ακέραιους  $\kappa$ ,  $\eta$  ώστε η παρακάτω αλγεβρική παράσταση να είναι μονώνυμο και στη συνέχεια να βρείτε το μονώνυμο:

$$\frac{3}{4}x^3y^{\kappa-2} - \frac{1}{3}x^{\eta+1}y^4$$

3

Να βρεθούν οι τιμές των  $\kappa$  και  $\eta$ , ώστε να ισχύουν οι ισότητες:

α)  $(-15x^{3\kappa-2}y^\eta) : (-3x^{2\kappa}y^4) = 5x^3y^2$

β)  $(4a^{2\kappa-1}b^{3\eta}) : (12a^{\kappa-3}b^{\eta+2}) = \frac{1}{3}ab^4$

4

Δύο κύκλοι έχουν ακτίνες  $10x$  και  $6x$  αντιστοίχως. Να βρεθεί η ακτίνα του κύκλου που έχει εμβαδόν ίσο με το άθροισμα των εμβαδών των δύο αρχικών κύκλων.