1.1Γ Τετραγωνική ρίζα πραγματικού αριθμού

Ερώτηση 1

Τι ονομάζουμε τετραγωνική ρίζα ενός θετικού αριθμού x; Πώς συμβολίζουμε την τετραγωνική ρίζα του x;

Απάντηση

Τετραγωνική ρίζα ενός θετικού αριθμού x είναι ο θετικός αριθμός που όταν υψωθεί στο τετράγωνο, μας δίνει τον αριθμό x.

Η τετραγωνική ρίζα του αριθμού x συμβολίζεται με $\sqrt{x}$.

Για παράδειγμα, $\sqrt{9}=3$ αφού $3^2=9$.

Ορίζουμε ακόμη $\sqrt{0}=0$.

Για οποιονδήποτε πραγματικό αριθμό x ισχύει: $\sqrt{x^2}=|x|$.

Για παράδειγμα, $\sqrt{4^2}=|4|=4$ και $\sqrt{(-4)^2}=|-4|=4$.

Αν $x \geq 0$ τότε $\sqrt{x^2}=x$.

Ερώτηση 2

Πώς αποδεικνύουμε τις παρακάτω ιδιότητες;

- $\sqrt{\alpha}\cdot\sqrt{\beta}=\sqrt{\alpha\beta}$
- $\dfrac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}}=\sqrt{\dfrac{\alpha}{\beta}}$

όπου α και β είναι μη αρνητικοί αριθμοί.

Απάντηση

- Υψώνουμε και τα δύο μέλη της ισότητας στο τετράγωνο. Έτσι η ισότητα γράφεται :

$$\left(\sqrt{\alpha}\cdot\sqrt{\beta}\right)^2=\left(\sqrt{\alpha\beta}\right)^2 \text{ ή } \left(\sqrt{\alpha}\right)^2\left(\sqrt{\beta}\right)^2=\alpha\beta \text{ ή}$$

$\alpha\beta=\alpha\beta$, που ισχύει.

- Όμοια έχουμε:

Για το 1ο μέλος: $\left(\dfrac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}}\right)^2=\dfrac{\left(\sqrt{\alpha}\right)^2}{\left(\sqrt{\beta}\right)^2}=\dfrac{\alpha}{\beta}$

Για το 2ο μέλος: $\left(\sqrt{\dfrac{\alpha}{\beta}}\right)^2=\dfrac{\alpha}{\beta}$

Άρα $\left(\dfrac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}}\right)^2=\left(\sqrt{\dfrac{\alpha}{\beta}}\right)^2$ ή $\dfrac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}}=\sqrt{\dfrac{\alpha}{\beta}}$

Άρα για δύο μη αρνητικούς αριθμούς αποδείξαμε ότι:

Το γινόμενο των τετραγωνικών ριζών τους ισούται με την τετραγωνική ρίζα του γινομένου τους και το πηλίκο των τετραγωνικών ριζών τους ισούται με την τετραγωνική ρίζα του πηλίκου τους.

Ερώτηση 3

Ισχύει η ισότητα $\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}=\sqrt{\alpha+\beta}$;(με $\alpha>0$ και $\beta>0$).

Απάντηση

Παρατηρούμε ότι με $\alpha=36$ και $\beta=64$ είναι:

$$\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}=\sqrt{36}+\sqrt{64}=6+8=14$$

Όμως $\sqrt{\alpha+\beta}=\sqrt{36+64}=\sqrt{100}=10$.

Έτσι με τη βοήθεια του παραπάνω αντιπαραδείγματος διαπιστώσαμε ότι γενικά ισχύει: $\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}\neq\sqrt{\alpha+\beta}$

Άρα το άθροισμα των τετραγωνικών ριζών δεν μπορούμε να το γράψουμε ως τετραγωνική ρίζα του αθροίσματος.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ – ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1

Να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

α) $2\sqrt{7}-3\sqrt{7}+5\sqrt{7}$ β) $2\sqrt{3}-5\sqrt{6}+3\sqrt{6}-5\sqrt{3}$

γ) $\sqrt{\frac{7}{3}}\cdot\sqrt{\frac{3}{7}}-\sqrt{\frac{8}{3}}\cdot\sqrt{12}$ δ) $\sqrt{12}-\sqrt{27}+\sqrt{3}$

Λύση

α) $2\sqrt{7}-3\sqrt{7}+5\sqrt{7}=(2-3+5)\sqrt{7}=4\sqrt{7}$

β) $2\sqrt{3}-5\sqrt{6}+3\sqrt{6}-5\sqrt{3}=(2-5)\sqrt{3}+(-5+3)\sqrt{6}=$

$-3\sqrt{3}-2\sqrt{6}=-3\sqrt{3}-2\sqrt{2\cdot 3}=$

$-3\sqrt{3}-2\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}=\left(-3-2\sqrt{2}\right)\cdot\sqrt{3}$

γ) $\sqrt{\frac{7}{3}}\cdot\sqrt{\frac{3}{7}}-\sqrt{\frac{8}{3}}\cdot\sqrt{12}=\sqrt{\frac{7}{3}\cdot\frac{3}{7}}-\sqrt{\frac{8}{3}\cdot 12}=$

$1-\sqrt{32}=1-\sqrt{4^2\cdot 2}=1-4\cdot\sqrt{2}$

δ) $\sqrt{12}-\sqrt{27}+\sqrt{3}=$

$\sqrt{4}\cdot\sqrt{3}-\sqrt{3}\sqrt{9}+\sqrt{3}=$

$\left(\sqrt{4}-\sqrt{9}+1\right)\sqrt{3}=(2-3+1)\sqrt{3}=0$

2

Να αποδείξετε τις ισότητες:

α) $3\sqrt{2}-\sqrt{72}+2\sqrt{32}=5\sqrt{2}$

β) $\sqrt{75}-\sqrt{45}+2\sqrt{3}-\sqrt{20}=7\sqrt{3}-5\sqrt{5}$

γ) $\sqrt{6{,}4}\cdot\sqrt{8{,}1}+2{,}8=10$

δ) $\sqrt{96}-\sqrt{54}+\sqrt{6}=2\sqrt{6}$

Λύση

α) $3\sqrt{2}-\sqrt{72}+2\sqrt{32}=3\sqrt{2}-\sqrt{36\cdot 2}+2\sqrt{16\cdot 2}=$

$3\sqrt{2}-6\sqrt{2}+8\sqrt{2}=(3-6+8)\sqrt{2}=$

$5\sqrt{2}$

β) $\sqrt{75}-\sqrt{45}+2\sqrt{3}-\sqrt{20}=$

$\sqrt{25\cdot 3}-\sqrt{9\cdot 5}+2\sqrt{3}-\sqrt{4\cdot 5}=$

$5\sqrt{3}-3\sqrt{5}+2\sqrt{3}-2\sqrt{5}=$

$(5+2)\sqrt{3}-(3+2)\sqrt{5}=$

$7\sqrt{3}-5\sqrt{5}$

Προσπαθούμε να εμφανίσουμε την ίδια υπόρριζη ποσότητα. Γι'αυτό αναλύουμε τους αριθμούς που είναι κάτω από τα ριζικά σε γινόμενο παραγόντων

γ) $\sqrt{6{,}4}\cdot\sqrt{81}+2{,}8=$

$\sqrt{\frac{64}{10}}\cdot\sqrt{\frac{81}{10}}+2{,}8=$

$\frac{\sqrt{64}}{\sqrt{10}}\cdot\frac{\sqrt{81}}{\sqrt{10}}+2{,}8=$

$\frac{8\cdot 9}{10}+2{,}8=$

$\frac{72}{10}+2{,}8=$

$7{,}2+2{,}8=10$

δ) $\sqrt{96}-\sqrt{54}+\sqrt{6}=\sqrt{6\cdot 16}-\sqrt{9\cdot 6}+\sqrt{6}=$
$4\sqrt{6}-3\sqrt{6}+\sqrt{6}=(4-3+1)\sqrt{6}=2\sqrt{6}$

3 Να υπολογίσετε τις τιμές των παραστάσεων:

α) $A=\sqrt{5^2}-\left(\sqrt{49}+2\sqrt{144}-\sqrt{7^2}\right)-8\sqrt{\dfrac{9}{16}}$

β) $B=2\sqrt{32}+3\sqrt{45}-2\sqrt{12}+5\sqrt{72}$

Λύση

α) $A=\sqrt{5^2}-\left(\sqrt{49}+2\sqrt{144}-\sqrt{7^2}\right)-8\sqrt{\dfrac{9}{16}}=$

$5-(7+2\cdot 12-7)\cdot 8\cdot\dfrac{3}{4}=$

$5-24-6=$
$-25.$

β) $B=2\sqrt{32}+3\sqrt{45}-2\sqrt{12}+5\sqrt{72}=$

$2\sqrt{16\cdot 2}+3\sqrt{9\cdot 5}-2\sqrt{4\cdot 3}+5\sqrt{36\cdot 2}=$

$2\sqrt{16}\cdot\sqrt{2}+3\sqrt{9}\cdot\sqrt{5}-2\sqrt{4}\cdot\sqrt{3}+5\sqrt{36}\cdot\sqrt{2}=$

$2\cdot 4\sqrt{2}+3\cdot 3\sqrt{5}-2\cdot 2\sqrt{3}+5\cdot 6\cdot\sqrt{2}=$

$8\sqrt{2}+9\sqrt{5}-4\sqrt{3}+30\sqrt{2}=$

$38\sqrt{2}-4\sqrt{3}+9\sqrt{5}\cdot$

4 Να μετατρέψετε καθένα από τα παρακάτω κλάσματα σε ισοδύναμο με ρητό παρονομαστή:

α) $\dfrac{4}{\sqrt{5}}$ β) $\dfrac{3}{2\sqrt{3}}$ γ) $\dfrac{4}{3\sqrt{7}}$

Λύση

α) $\dfrac{4}{\sqrt{5}}=\dfrac{4\sqrt{5}}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}}=\dfrac{4\sqrt{5}}{\left(\sqrt{5}\right)^2}=\dfrac{4\sqrt{5}}{5}$

β) $\dfrac{3}{2\sqrt{3}}=\dfrac{3\cdot\sqrt{3}}{2\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}=\dfrac{3\sqrt{3}}{2\cdot 3}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

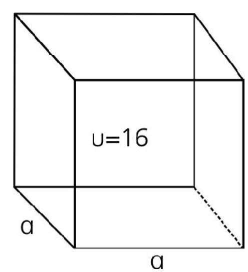
γ) $\dfrac{4}{3\sqrt{7}}=\dfrac{4\sqrt{7}}{3\sqrt{7}\cdot\sqrt{7}}=\dfrac{4\sqrt{7}}{3\cdot\left(\sqrt{7}\right)^2}=\dfrac{4\sqrt{7}}{3\cdot 7}=\dfrac{4\sqrt{7}}{21}$

5 Ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο με βάση τετράγωνο πλευράς α έχει όγκο $V=64cm^3$ και ύψος υ = 16cm. Πόσο είναι η πλευρά του τετραγώνου;

Λύση

Ο όγκος του παραλληλεπίπεδου είναι
$E=E_{βάσης}\times ύψος=α^2\cdot υ=α^2\cdot 16=64$

Άρα $α^2=\dfrac{64}{16}$ ή $α^2=4$ ή $α=2$ (αφού $α>0$)



6 Αν $\alpha = \frac{2\sqrt{50}}{\sqrt{5}} - 2\sqrt{10}$ και β είναι η ρίζα της εξίσωσης $\sqrt{3x} - 7\sqrt{3} = 0$ να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης: $A = \sqrt{2} + \sqrt{51-\beta} - \sqrt{100+\alpha}$.

Λύση

Είναι $\sqrt{3x} = 7\sqrt{3}$ ή $3x = 7^2 \cdot 3$ ή $x = 49$. Τότε $\beta = 49$

Επίσης $\alpha = \frac{2\sqrt{50}}{\sqrt{5}} - 2\sqrt{10} = 2\sqrt{\frac{50}{5}} - 2\sqrt{10} = 2\sqrt{10} - 2\sqrt{10} = 0$

Άρα $A = \sqrt{2} + \sqrt{51-49} - \sqrt{100} = \sqrt{2} + \sqrt{2} - 10 = 2\sqrt{2} - 10$

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1 *Να σημειώσετε το Σ (σωστή) ή το Λ (λανθασμένη) σε καθεμία από τις παρακάτω προτάσεις:*

α. Για κάθε πραγματικό αριθμό α ισχύει $\sqrt{\alpha^2} = \alpha$ ☐

β. $\sqrt{(-4)^2} = -4$ ☐

γ. $\sqrt{12} = 2\sqrt{3}$ ☐

δ. $\sqrt{20} + \sqrt{5} = 3\sqrt{5}$ ☐

2 *Να χαρακτηρίσετε καθεμιά από τις παρακάτω προτάσεις ως Σ (σωστή) ή Λ (λάθος).*

α. $\sqrt{\alpha+\beta} = \sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}$ ☐

β. $\sqrt{9\alpha^2} = 3\alpha$ αν $\alpha \geq 0$ ☐

γ. $\sqrt{(-2)^2} = -2$ ☐

δ. $\sqrt{\alpha^2 \cdot \beta} = \alpha\sqrt{\beta}$ όπου α είναι πραγματικός αριθμός. ☐

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1 Να κάνετε τις πράξεις:

α) $\sqrt{3}\left(2-\sqrt{3}\right)$ β) $\left(3+\sqrt{2}\right)\cdot\left(\sqrt{3}-2\right)$

γ) $\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)\cdot\left(\sqrt{3}-2\right)$ δ) $\sqrt{3}\left(\sqrt{48}-\sqrt{27}\right)$

2 Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

α) $2\sqrt{12}-7\sqrt{75}+2\sqrt{27}-3\sqrt{80}-\sqrt{20}$ β) $\dfrac{\sqrt{45}+3\sqrt{18}-2\sqrt{27}}{\sqrt{20}-2\sqrt{12}+3\sqrt{8}}$

γ) $\sqrt{75}-\sqrt{300}+3\dfrac{\sqrt{21}}{\sqrt{7}}-\sqrt{48}$ δ) $\dfrac{\sqrt{12}\cdot\sqrt{5}\cdot\sqrt{6}}{\sqrt{80}\cdot\sqrt{2}}$

ε) $\dfrac{5\sqrt{12}-2\sqrt{27}+4\sqrt{75}}{6\sqrt{48}-10\sqrt{12}}$

3 Να κάνετε τις πράξεις:

α) $5\sqrt{3}:\dfrac{\sqrt{3}+}{\sqrt{3}+1}$ β) $7\sqrt{2}:\dfrac{\sqrt{7}}{\sqrt{2}-1}$ γ) $\sqrt{\dfrac{32}{3}}\cdot\sqrt{2}-\dfrac{7}{\sqrt{3}}$

4 Να μετατρέψετε τα κλάσματα σε ισοδύναμα με ρητό παρονομαστή:

α. $\dfrac{4}{\sqrt{3}}$ β. $\dfrac{2}{3\sqrt{5}}$ γ. $\dfrac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$

5

α) Να κάνετε τις πράξεις: $\left(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}\right)\cdot\left(\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta}\right)$

β) Να μετατρέψετε τα παρακάτω κλάσματα σε κλάσματα με ρητό παρονομαστή.

i) $\dfrac{2}{\sqrt{7}-\sqrt{3}}$ ii) $\dfrac{1}{\sqrt{5}-1}$

6

Να επιλύσετε τις παρακάτω εξισώσεις:

α) $\dfrac{x}{\sqrt{2}}=\sqrt{32}$ β) $3\sqrt{2}+3x=\sqrt{50}+x$ γ) $\sqrt{6x+21}=3\sqrt{1-x}$ δ) $5+3\sqrt{x-2}=20$

7

Θεωρούμε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ $\left(A=90^\circ\right)$. Με πλευρά την υποτείνουσα του $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$ σχεδιάζουμε εξωτερικά του ορθογωνίου τριγώνου, τετράγωνο ΒΓΔΕ. Αν $AB=6\text{cm}$ και $A\Gamma=8\text{cm}$ να υπολογίσετε το εμβαδόν του τετραγώνου ΒΓΔΕ και την πλευρά του.

ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗΣ

Ερώτηση 1

Τι ονομάζουμε τετραγωνική ρίζα ενός θετικού αριθμού α; Ποιες ιδιότητες των τετραγωνικών ριζών γνωρίζετε;

Άσκηση 1

i) Αν $x=\sqrt{2}+1$, τότε η τιμή της παράστασης x^2-2x+3 είναι ίση με: **α.** 1 **β.** $\sqrt{2}$ **γ.** 4 **δ.** $\sqrt{2}+1$

ii) Αν $x-4\sqrt{3}=\sqrt{3}$ να υπολογιστεί ο x^2.