

1.1B Δυνάμεις πραγματικών αριθμών

Ερώτηση 1

Πως ορίζουμε τη νιοστή δύναμη ενός πραγματικού αριθμού a με εκθέτη ένα φυσικό αριθμό $v \geq 2$;

Απάντηση

Η δύναμη με βάση έναν πραγματικό αριθμό a και εκθέτη ένα φυσικό αριθμό $v \geq 2$ συμβολίζεται με a^v και ορίζεται ως εξής:

$$a^v = \underbrace{a \cdot a \cdot a \dots a}_v \text{ παράγοντες}, \quad a^v, \quad v \geq 2$$

Ορίζουμε ακόμη:

$$\bullet a^1 = a \quad \bullet a^0 = 1 \text{ με } a \neq 0 \quad \bullet a^{-v} = \frac{1}{a^v} \text{ με } a \neq 0$$

Ερώτηση 2

Ποιες είναι οι ιδιότητες των δυνάμεων; Να γράψετε ένα παράδειγμα για την καθεμία.

Απάντηση

- $a^m \cdot a^v = a^{m+v}$ π.χ. $(-2)^2 \cdot (-2)^5 = (-2)^{2+5} = (-2)^7$
- $a^m : a^v = a^{m-v}$ π.χ. $(-4)^5 : (-4)^2 = (-4)^{5-2} = (-4)^3 = -64$
- $a^v \cdot \beta^v = (a \cdot \beta)^v$ π.χ. $3^5 \cdot 4^5 = (3 \cdot 4)^5 = 12^5$
- $\frac{a^v}{\beta^v} = \left(\frac{a}{\beta}\right)^v$ π.χ. $\frac{(-2)^5}{(-2)^2} = (-2)^{5-2} = (-2)^3 = -8$
- $(a^m)^v = a^{mv}$ π.χ. $((-4)^2)^3 = (-4)^{2 \cdot 3} = (-4)^6 = 2^6$
- $\left(\frac{a}{\beta}\right)^{-v} = \left(\frac{\beta}{a}\right)^v$ π.χ. $\left(\frac{3}{4}\right)^{-4} = \left(\frac{4}{3}\right)^4$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ - ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

Να γράψετε καθεμιά από τις παρακάτω παραστάσεις ως μία δύναμη:

α) $3^{-5} \cdot 3^8$ β) $2^5 : 2^{-3}$ γ) $(-3)^2 : 3^5$

δ) $32 \cdot 2^{-4} \cdot \frac{1}{2^7}$ ε) $4^{-2} \cdot (-4)^4$

ζ) $(2^{-3})^0 \cdot (2^0)^3 \cdot 4^2$ η) $(0,75)^{-2} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^5$

α) $3^{-5} \cdot 3^8 = 3^{-5+8} = 3^3$ β) $2^5 : 2^{-3} = 2^{5-(-3)} = 2^8$ γ) $(-3)^2 : 3^5 = 3^2 : 3^5 = 3^{2-5} = 3^{-3}$

δ) $32 \cdot 2^{-4} \cdot \frac{1}{2^7} = 2^5 \cdot 2^{-4} \cdot 2^{-7} = 2^{5-4-7} = 2^{-6}$ ε) $4^{-2} \cdot (-4)^4 = 4^{-2} \cdot 4^4 = 4^{-2+4} = 4^2$ ζ) $(2^{-3})^0 \cdot (2^0)^3 \cdot 4^2 = 1 \cdot 1 \cdot 4^2 = 4^2$

Λύση

$$\text{n)} (0,75)^{-2} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^5 = \left(\frac{3}{4}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^5 = \left(\frac{3}{4}\right)^{5-2} = \left(\frac{3}{4}\right)^3$$

Να υπολογίσετε την τιμή της κάθε παράστασης:

$$\begin{array}{ll} \mathbf{2} & \text{α)} (3^{-4})^2 \cdot 3^9 \quad \beta) \left(-\frac{3}{4}\right)^8 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^{10} \\ & \gamma) (0,02)^3 : 10^6 \quad \delta) 9^{10} : 3^{15} \end{array}$$

Λύση

$$\text{α)} (3^{-4})^2 \cdot 3^9 = 3^{-8} \cdot 3^9 = 3^{-8+9} = 3^1 = 3$$

$$\begin{aligned} \beta) \left(-\frac{3}{4}\right)^8 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^{10} &= \left(\frac{3}{4}\right)^8 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{-10} = \left(\frac{3}{4}\right)^{8-10} = \\ &= \left(\frac{3}{4}\right)^{-2} = \left(\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{16}{9} \end{aligned}$$

$$\gamma) (0,02)^3 : 10^6 = \left(\frac{2}{100}\right)^3 : 10^6 = \frac{2^3}{10^6} : 10^6 = 2^3 \cdot 10^{-1} = \frac{8}{10} = 0,8$$

$$\delta) 9^{10} : 3^{15} = (3^2)^{10} : 3^{15} = 3^{20} : 3^{15} = 3^{20-15} = 3^5$$

Να υπολογίσετε την τιμή της κάθε παράστασης:

$$\begin{array}{ll} \mathbf{3} & \text{α)} (-3)^2 \cdot (-3)^{-4} \quad \beta) \left(-\frac{2}{3}\right)^{12} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{-14} \\ & \gamma) (0,01)^3 \cdot 10^5 \end{array}$$

Λύση

$$\text{α)} (-3)^2 \cdot (-3)^{-4} = (-3)^{2-4} = (-3)^{-2} = 3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$$

$$\beta) \left(-\frac{2}{3}\right)^{12} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{-14} = \left(\frac{2}{3}\right)^{12} = \left(\frac{2}{3}\right)^{-14} =$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{12-14} = \left(\frac{2}{3}\right)^{-2} = \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{3^2}{2^2} = \frac{9}{4}$$

$$\gamma) (0,01)^3 \cdot 10^5 = \left(\frac{1}{10}\right)^3 \cdot 10^5 = 10^{-3} \cdot 10^5 = 10^2 = 100$$

Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

$$\begin{array}{ll} \mathbf{4} & \text{α)} (xy^3)^2 \cdot x^3y \quad \beta) (-3x^2)^3 \cdot (-2x^3)^2 \\ & \gamma) \frac{3}{-2}x^3 \cdot \left(-\frac{3}{2}x\right)^{-2} \end{array}$$

Λύση

$$\text{α)} (xy^3)^2 \cdot x^3y = x^2y^6 \cdot x^3y = x^{2+3} \cdot y^{6+1} = x^5y^7$$

$$\beta) (-3x^2)^3 \cdot (-2x^3)^2 = -3^3 \cdot x^6 \cdot 4 \cdot x^6 = -108 \cdot x^{12}$$

$$\gamma) \frac{3}{-2}x^3 \cdot \left(-\frac{3}{2}x\right)^{-2} = -\frac{3}{2}x^3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot x^{-2} = -\frac{3}{2} \cdot \frac{2^2}{3^2} \cdot x^{3-2} = -\frac{2}{3} \cdot x$$

5 Αν τριπλασιάσουμε την πλευρά ενός τετραγώνου, πόσες φορές μεγαλώνει το εμβαδόν του;

Λύση

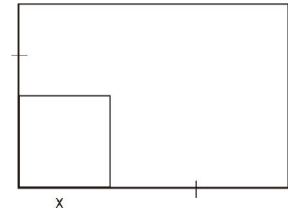
Το εμβαδόν του τετραγώνου πλευράς

x είναι: $E = x^2$

Το εμβαδόν του καινούριου τετραγώνου, πλευράς $3x$, είναι:

$$E' = (3 \cdot x)^2 = 3^2 \cdot x^2 = 9 \cdot x^2 = 9E$$

(9 φορές μεγαλύτερο)



ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1 Να χαρακτηρίσετε τις επόμενες προτάσεις με (Σ), αν είναι σωστές ή με (Λ), αν είναι λανθασμένες:

α. Για κάθε αριθμό a ισχύει: $-a - a - a = -a^3$

β. Για κάθε αριθμό a ισχύει: $(-a)(-a)(-a) = -a^3$

γ. Οι αριθμοί $\left(\frac{3}{4}\right)^5$ και $\left(\frac{4}{3}\right)^5$ είναι αντίστροφοι.

δ. Ο αριθμός $-(-3)^4$ είναι αρνητικός.

ε. Ο αριθμός -4^{-2} είναι αρνητικός.

2 Να συμπληρώσετε τα κενά χρησιμοποιώντας το κατάλληλο σύμβολο (=) ή (\neq):

α. $\left(\frac{4}{3}\right)^0 \dots 1$ β. $\left(\frac{2}{3}\right)^{-1} \dots \frac{3}{2}$ γ. $4^{-3} \dots \frac{1}{-64}$ δ. $3^{-3} \dots 27$

3 Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση.

i. Η τιμή της παράστασης $\left(\frac{3}{4}\right)^{-2}$ είναι: α. $\frac{9}{16}$ β. $\frac{16}{9}$ γ. $-\frac{9}{16}$ δ. $-\frac{16}{9}$

ii. Η τιμή της παράστασης $\left[(-4)^3\right]^0$ είναι: α. $(-4)^3$ β. 1 γ. 4^3 δ. 0

iii. Η τιμή της παράστασης $3^4 + 4^3$ είναι: α. 7^7 β. 7^{12} γ. 145 δ. 12^7

4 Να υπολογιστεί η παράσταση:

$$A = (-2)^4 - 3^2 + [(-4^2 - 8) : (-3) - (-1)^{2004}]$$

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1

Να γράψετε κάθε μια από τις ακόλουθες παραστάσεις ως μια δύναμη:

α. $3^{-6} \cdot 3^{12}$

β. $2^{-4} : 2^{-7}$

γ. $4^{-2} \cdot (-4)^6$

δ. $(5^{-2})^{-3}$

ε. $\frac{(-9)^8}{3^8}$

στ. $32 \cdot 2^3 \cdot \frac{1}{2^6}$

2

Να γίνουν οι πράξεις:

α. $2x^2y^3 \cdot 3xy^6 \cdot \frac{1}{6}xy$

β. $\frac{8x^2yz^3\omega}{64x^3z^2\omega^3}$

γ. $(-3x^2yz^3)^2$

δ. $\left(\frac{x^2}{y^3}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{2y}{x^3}\right)^{-3}$

3

Να κάνετε τις πράξεις:

α. $4a^2\beta^{-3}\gamma^{-2} \cdot \frac{1}{12}a^5 \cdot \beta^3 \cdot \gamma \cdot 15a^{-1}\beta^2\gamma^0$

β. $\frac{4a^2\beta^{-3}}{\gamma^4\delta^{-1}} : \frac{20a^{-3}\gamma^2}{\beta^4\delta^2}$

4

Να απλοποιήσετε το κλάσμα: $A = \frac{12^5 \cdot 18^{17}}{36^{24}}$

5

Να υπολογιστούν οι παραστάσεις:

$$A = (-3)^3 - 2^2 + [(-1)^{1.000} + 4^3 : (-8)] + (-2)^3 : 4$$

$$B = 8 - 3 \cdot 2^3 - (-1)^{11} \cdot [(2^6 : 4 + 3^3 : 3) : 5 - 3^2]$$

$$\Gamma = (-2^5) - \left[-17^0 + 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{-4} + 3(-4) \right] : 19 + \left(-\frac{2}{3}\right)^{-2} \cdot \left[\left(\frac{1}{2}\right)^{-2} - 2 \cdot \left(\frac{-3}{2}\right)^{-3} \right]$$

6

Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

$$\alpha) \left(-\frac{1}{2}x \cdot y^2z\right)^2 \cdot x^2 \cdot y \cdot z^2 \cdot \left(\frac{3}{2} \cdot x \cdot y \cdot z\right)^3$$

$$\beta) \left(\frac{\alpha}{\beta^{-3}}\right)^{-2} : \left(\frac{\alpha^3}{6 \cdot \beta^2}\right)^{-1} \cdot (-3 \cdot \alpha^2 \cdot \beta^{-1})^{-1}$$

$$\gamma) \left[\frac{(x \cdot y^2)^{-2}}{x \cdot y} \cdot \left(\frac{x^3 \cdot y}{x \cdot y^2}\right)^{-1} : (x^3)^2 \right]^{-2} : \left(\frac{x}{y}\right)^2$$

7

Να υπολογιστούν οι αριθμητικές τιμές των παραστάσεων:

$$A = (x-2)^{-1} + x^{-2} - (-1)^x + (-x)^2, \text{ για } x = -1$$

$$B = \left(\frac{\alpha}{2\beta}\right)^3 : \left(\frac{\alpha^2}{2\beta}\right)^{-1} \cdot \left(-\frac{1}{3} \cdot \alpha^{-2} \cdot \beta\right) \left(\frac{\beta^{-3} \cdot \alpha}{\alpha^3} : \frac{\beta^2}{\alpha^2}\right), \text{ για } \alpha = 1, \beta = -1$$

8

Να λύθούν οι επόμενες εξισώσεις:

$$\alpha. 2^{2x} \cdot 2 = 2^5$$

$$\beta. 3^x \cdot 3^{2x+3} = 27$$

$$\gamma. \left(-\frac{1}{2}\right)^3 \cdot x = \left(-\frac{1}{2}\right)^5$$

$$\delta. x : 5^{-3} = 5^6$$

ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗΣ**Ερώτηση 1**

- α. Πως προσθέτουμε δύο πραγματικούς αριθμούς;
- β. Πως πολλαπλασιάζουμε δύο πραγματικούς αριθμούς;
- γ. Πως αφαιρούμε δύο πραγματικούς αριθμούς;
- δ. Πως διαιρούμε δύο πραγματικούς αριθμούς;

Άσκηση 1

Να βρεθεί η τιμή της αριθμητικής παράστασης $\frac{(-1)^3 + \frac{1}{4} - 5}{(2-3)^4 : (-8)}$.

Άσκηση 2

Να βρεθεί η τιμή της αριθμητικής παράστασης $\left(\frac{a^3}{\beta^2}\right)^{-4} \cdot \left(\frac{2\beta^2}{a}\right)^3 \cdot 4a\beta^{-3}$.

Άσκηση 3

Να λύθούν οι επόμενες εξισώσεις:

α. $2^{2x} \cdot 4^{3x+1} = \frac{1}{64}$ β. $(-3)^{4x+2} = -243$