

1.1Α Οι πραγματικοί αριθμοί και οι πράξεις τους

Ερώτηση 1

Τι ονομάζουμε σύνολο πραγματικών αριθμών;
Πως συμβολίζουμε το σύνολο των πραγματικών αριθμών;

Τι παριστάνει το σύμβολο R^* ;

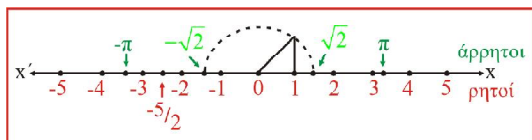
Απάντηση

Το σύνολο που αποτελείται από τους ρητούς και τους άρρητους αριθμούς, ονομάζεται σύνολο των πραγματικών αριθμών.

Το σύνολο όλων αυτών των αριθμών το συμβολίζουμε με το γράμμα R .

Με το συμβολισμό R^* παριστάνουμε το σύνολο των πραγματικών αριθμών χωρίς το μηδέν.

Οι πραγματικοί αριθμοί παριστάνονται με τα σημεία ενός άξονα.



Ερώτηση 2

Πώς προσθέτουμε πραγματικούς αριθμούς;
Πώς πολλαπλασιάζουμε πραγματικούς αριθμούς;

Απάντηση

Αν οι αριθμοί που προσθέτουμε είναι ομόσημοι, βάζουμε το κοινό πρόσημο τους και προσθέτουμε τις απόλυτες τιμές τους.

Έτσι $2 + 3 = 5$ και $-2 - 3 = -5$.

Αν οι αριθμοί που προσθέτουμε είναι ετερόσημοι, βάζουμε το πρόσημο του αριθμού με τη μεγαλύτερη απόλυτη τιμή και αφαιρούμε τις απόλυτες τιμές τους.

Έτσι $-2 + 3 = 1$ και $2 - 3 = -1$.

Αν οι αριθμοί που πολλαπλασιάζουμε είναι ομόσημοι, βάζουμε πρόσημο + και πολλαπλασιάζουμε τις απόλυτες τιμές τους. Έτσι $2 \cdot 3 = 6$ και $(-2) \cdot (-3) = +6 = 6$.

Αν οι αριθμοί που πολλαπλασιάζουμε είναι ετερόσημοι, βάζουμε πρόσημο - και πολλαπλασιάζουμε τις απόλυτες τιμές τους.

Έτσι $2 \cdot (-3) = -6$ και $(-2) \cdot 3 = -6$.

Ερώτηση 3

Ποιες είναι οι ιδιότητες της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού;

Απάντηση

Για την πρόσθεση και τον πολλαπλασιασμό ισχύουν οι ιδιότητες:

ΙΔΙΟΤΗΤΑ	ΠΡΟΣΘΕΣΗ	ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ
Αντιμεταθετική	$a + b = b + a$	$a \cdot b = b \cdot a$
Προσεταιριστική	$a + (b + \gamma) = (a + b) + \gamma$	$a(b\gamma) = (a\beta)\gamma$
	$a + 0 = a$	$a \cdot 1 = a$
	$a + (-a) = 0$	$a \cdot \frac{1}{a} = 1, a \neq 0$
		$a \cdot 0 = 0$
Επιμεριστική		$a \cdot (b + \gamma) = ab + a\gamma$

- Δύο αριθμοί λέγονται αντίθετοι όταν έχουν άθροισμα μηδέν.
- Δύο αριθμοί διαφορετικοί από το μηδέν λέγονται αντίστροφοι όταν έχουν γινόμενο ίσο με τη μονάδα.

Ερώτηση 4

**Πως αφαιρούμε δύο πραγματικούς αριθμούς;
Πως διαιρούμε δύο πραγματικούς αριθμούς;**

Απάντηση

Για να αφαιρέσουμε δύο πραγματικούς αριθμούς, προσθέτουμε στο μειωτέο τον αντίθετο του αφαιρετέου.

Δηλαδή $a - b = a + (-b)$.

Π.χ.: $-5 - (-3) = -5 + (+3) = -5 + 3 = -2$

Για να διαιρέσουμε δύο πραγματικούς αριθμούς, πολλαπλασιάζουμε το διαιρέτο με τον αντίστροφο του διαιρέτη. Δηλαδή

$$a : b = \frac{a}{b} = a \cdot \frac{1}{b}, \text{ με } b \neq 0$$

$$\text{Π.χ.: } \left(-\frac{1}{2}\right) : 3 = \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \frac{1}{3} = -\frac{1}{6}.$$

Σχόλιο: Όταν ζητούν να αποδείξουμε ότι ισχύει μία ισότητα $A=B$ τότε ακολουθούμε ένα από τα επόμενα:

1. Ξεκινάμε από το A και με πράξεις καταλήγουμε στο B.
2. Ξεκινάμε από το B και με πράξεις καταλήγουμε στο A.
3. Κάνουμε πράξεις και το A και στο B και καταλήγουμε στην ίδια παράσταση Γ.

Συνήθως ξεκινάμε από το μέλος, στο οποίο μπορούν να γίνουν οι περισσότερες πράξεις.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ - ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

Να εκτελέσετε τις πράξεις:

1

$$\alpha. 4 + \frac{1}{2} - \frac{4}{6} + 2 + \frac{1}{3} - 5$$

$$\beta. \frac{3}{2} - \left(-\frac{1}{4}\right) + \left(-\frac{4}{5}\right) - \left(+\frac{1}{10}\right)$$

Λύση

$$\alpha. 4 + \frac{1}{2} - \frac{4}{6} + 2 + \frac{1}{3} - 5 = 4 + 2 - 5 + \frac{3}{2} - \frac{1}{4} + \frac{2}{6} = 1 + \frac{3}{6} - \frac{4}{6} + \frac{2}{6} = 1 + \frac{3-4+2}{6} = \frac{6}{6} + \frac{1}{6} = \frac{6+1}{6} = \frac{7}{6}$$

$$\beta. \frac{3}{2} - \left(-\frac{1}{4}\right) + \left(-\frac{4}{5}\right) - \left(+\frac{1}{10}\right) = \frac{10}{2} + \frac{5}{4} - \frac{4}{5} - \frac{2}{10} = \frac{30+5-16-2}{20} = \frac{17}{20}$$

Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

2

$$A = \frac{\frac{4}{3} + 5 - \frac{1}{12}}{4\left(\frac{1}{2} - \frac{3}{8}\right) + 7}$$

Λύση

$$A = \frac{\frac{4}{3} + \frac{5}{1} - \frac{1}{12}}{4\left(\frac{1}{2} - \frac{3}{8}\right) + 7} = \frac{\frac{4}{3} + \frac{5}{1} - \frac{1}{12}}{4\left(\frac{4}{8} - \frac{3}{8}\right) + 7} = \frac{\frac{16}{12} + \frac{60}{12} - \frac{1}{12}}{4\left(\frac{4-3}{8}\right) + 7} = \frac{16+60-1}{12} = \frac{75}{12} = \frac{75}{12} \cdot \frac{75}{75} = \frac{75 \cdot 2}{15 \cdot 12} = \frac{5}{6}$$

3 Να αποδείξετε ότι: α. $(-a) \cdot \beta = -(\alpha\beta)$ β. $(\alpha + \beta + \gamma) - (\alpha - \beta - \gamma) = 2(\beta + \gamma)$

Λύση

α. Πρέπει να δείξουμε ότι ο αντίθετος του $\alpha\beta$ είναι ο $(-a) \cdot \beta$ ή ότι ο $\alpha\beta$ και ο $(-a) \cdot \beta$ έχουν άθροισμα μηδέν.

$$\text{Πράγματι } (-a) \cdot \beta + \alpha\beta = [(-a) + a]\beta = 0 \cdot \beta = 0$$

β. $(\alpha + \beta + \gamma) - (\alpha - \beta - \gamma) = (\alpha + \beta + \gamma) + [-(\alpha - \beta - \gamma)] = \alpha + \beta + \gamma + (-\alpha + \beta + \gamma) = \alpha + \beta + \gamma - \alpha + \beta + \gamma =$

$$(\alpha - \alpha) + \beta + \beta + \gamma + \gamma = 0 + 2\beta + 2\gamma = 2(\beta + \gamma)$$

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1 Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα σημειώνοντας "x" στην κατάλληλη θέση.

	-4	$\frac{3}{4}$	7	0,5	-0,1	$\sqrt{7}$	$\sqrt{25}$	3,14	π	$\frac{41}{3}$
Ακέραιος										
Ρητός										
Άρρητος										

2 Να συμπληρώσετε τις ισότητες:

α. $-5 + 4 = \dots$ β. $-4 + 4 = \dots$ γ. $-4 - 7 = \dots$ δ. $(-2) \cdot \frac{2}{3} = \dots$ ε. $0 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) = \dots$

στ. $\left(-\frac{5}{4}\right) \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) = \dots$ ζ. $(-4) : \left(\frac{3}{5}\right) = \dots$ η. $\left(-\frac{4}{3}\right) : (+3) = \dots$ θ. $\left(-\frac{3}{4}\right) : \left(+\frac{3}{4}\right) = \dots$

3 Να συμπληρώσετε τις ισότητες:

α. $(-4 \cdot 2 + 7)x = \dots$ β. $-5(4 - 3x) = \dots$ γ. $-4(3 - 2)x = \dots$
 δ. $-4(x - \dots) = \dots + 2$ ε. $(2 - x)(3 - y) = \dots$ στ. $3(\dots + \dots) = 9x + 9$

4 Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση:

ι) Αν δύο αριθμοί είναι αντίθετοι, τότε:

- α. είναι ομόσημοι β. έχουν ίσες απόλυτες τιμές
 γ. έχουν γινόμενο 0 δ. έχουν γινόμενο 1



ii) Αν δύο αριθμοί είναι αντίστροφοι, τότε:

- α. είναι ετερόσημοι β. έχουν άθροισμα μηδέν
 γ. έχουν ίσες απόλυτες τιμές δ. έχουν γινόμενο τη μονάδα

5 Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με (Σ), αν είναι σωστές ή με (Λ), αν είναι λανθασμένες:

- α. Οι αντίστροφοι αριθμοί είναι ομόσημοι
 β. Το άθροισμα δύο ετερόσημων αριθμών είναι θετικός αριθμός
 γ. Η απόλυτη τιμή κάθε πραγματικού αριθμού είναι θετικός αριθμός
 δ. Δύο αριθμοί με γινόμενο θετικό και άθροισμα αρνητικό είναι αρνητικοί

6 Σε καθεμία από τις παρακάτω προτάσεις να σημειώσετε Σ (σωστή) ή Λ (λάθος).

- α. Οι αριθμοί 1 και -1 είναι αντίστροφοι.
 β. Κάθε άρρητος πραγματικός αριθμός δεν μπορεί να γραφεί ούτε ως δεκαδικός ούτε ως περιοδικός δεκαδικός.
 γ. Κάθε φυσικός αριθμός είναι και ακέραιος.
 δ. Κάθε πραγματικός αριθμός είναι ρητός.
 ε. Κάθε ρητός αριθμός είναι ακέραιος.
 στ. Ο αριθμός 0 δεν έχει αντίθετο.

7 Ποιο από τα παρακάτω είναι ίσο με $a \cdot (b + \gamma)$.

- α. $(a + \beta) \cdot \gamma$ β. $(\beta + \gamma) \cdot a$ γ. $a\beta + \beta\gamma$ δ. $\beta(a + \gamma)$

8 Αν a, β είναι πραγματικοί αριθμοί, τότε η διαφορά $a - \beta$ είναι ίση με:

- α. $-a + \beta$ β. $-\beta - (-a)$ γ. $-(a - \beta)$ δ. $-a - \beta$

9 Αν $3a - 3\beta = 0$ τότε οι πραγματικοί αριθμοί a, β είναι:

- α. ίσοι β. αντίθετοι γ. αντίστροφοι δ. κανένα από τα προηγούμενα

10 Να χαρακτηρίσετε ως Σ (σωστή) ή Λ (λάθος) καθεμία από τις παρακάτω προτάσεις.

- α. Ο -2 είναι φυσικός. β. Το $\frac{2}{3}$ είναι πραγματικός. γ. Ο $\sqrt{3}$ είναι άρρητος.
 δ. Ο 2,24 είναι ρητός. ε. Ο $\frac{10}{2}$ είναι ακέραιος.

11 Ποιοι από τους παρακάτω αριθμούς είναι ρητοί και ποιοι άρρητοι:

- α. 1, 2313542 ... β. π γ. $\sqrt{4}$ δ. 4, 212121 ...

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1 Αν οι αριθμοί $2x - y + \omega$ και $y - 2x + \phi$ είναι αντίθετοι να δείξετε ότι ω και ϕ είναι αντίθετοι.

2 Να εκτελέσετε τις πράξεις:

α) $-225 : (-5) + 4 \cdot (-7) + (8 - 5) : 3$

β) $4 \cdot [3(-6) - (4 - 8) : 2 - (3 + 4 - 9) \cdot 3] \cdot [(-3 + 8 + 1) - (-7)(-2)]$

γ) $\left(1 - \frac{5}{2}\right) \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{5}\right) - \frac{3}{5} : \left(-\frac{1}{5} + \frac{2}{3}\right)$

δ) $3 - (6 - 2 \cdot 3 - 5) - 2[-2(-2 - 6 - 4)]$

ε) $4\{-2 - 3[-1 + 10 : (2 - 12) - 6]\} + 2(-7 - 4 + 1)$

3 Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης

$$A = \frac{4 \cdot \frac{-3}{2} \cdot (-5)}{144 : \left(\frac{-6}{5}\right)}$$

$$B = -7 + \frac{-3 - \frac{1}{3}}{-2 + \frac{1}{3}}$$

$$\Gamma = \frac{-\frac{1}{2} + \frac{3}{4} - 1}{3 - \frac{1}{4} + \frac{1}{2}}$$

$$\Delta = \frac{\frac{2}{3} - \frac{1}{2} + \frac{5}{6}}{1 - \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3}\right)} : \frac{\frac{1}{4} - \frac{1}{1 + \frac{1}{2}}}{2 - \left(\frac{3}{4} - \frac{2}{1 - \frac{1}{2}}\right)} \cdot \frac{1 - \frac{1}{3}}{2 + \frac{1}{6}}$$

$$E = \frac{1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{1 + \frac{1}{2}}}{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{1 - \frac{1}{2}}}$$

4

Αφού απαλείψετε τις παρενθέσεις της παράστασης :

$$\Pi = 2\alpha + (-5\alpha + 2\beta + 4) - (-2\beta + 3\alpha + 8)$$

να υπολογίσετε την αριθμητική τιμή της για $\alpha = -1$ και $\beta = -3$.

5

Να γίνουν οι πράξεις στην παράσταση που ακολουθεί και να υπολογιστεί η αριθμητική τιμή της για $x = 2$.

$$A = -4[-(2 - 3x) - (x + 5)] - [-3(-x + 1) - 2(x + 1)]$$

6

Αν $x + y = -5$ και $\omega + \phi = -7$, να υπολογίσετε την τιμή των παραστάσεων:

$$A = 4 - (x - \omega) - (y - \phi) \quad B = -(-5 - x + \phi) + (-8 + y) - (\omega - 4)$$

$$\Gamma = 6 \cdot x \cdot y - [-3x(1 - 2y) - 3(x + 2 \cdot y)]$$

7

Αν $x + 2 \cdot y = \frac{1}{3}$ να υπολογιστεί η αριθμητική της παράστασης:

$$A = -(x - 3 \cdot y) - [(2 \cdot x + 4 \cdot y) - (-x + 2 \cdot y - 1)] - 6(2 - x) + 3 \cdot y$$

8

Δύο αριθμοί έχουν γινόμενο -6 και άθροισμα 1 . Ποιοι είναι οι αριθμοί;

9

Να αποδείξετε τις παρακάτω ισότητες:

α. $8 - (\alpha - \beta) + (\alpha - 5 - \beta) = 3$

β. $2 - (\alpha + \beta - \gamma) - (4 + \gamma - \beta) - (-2 - \alpha) = 0$

γ. $2(\alpha + \beta + \gamma) - 3(\alpha - \beta + \gamma) = 5\beta - (\alpha + \gamma)$