



ΜΑΘΗΜΑ Α1.5 Αξιοσημείωτες ταυτότητες

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1) Ποιες από τις παρακάτω ισότητες είναι ταυτότητες;
 $2x = 4$, $x^2 - 1 = 0$, $4x + 2 = 2 + 4x$, $x^3 \cdot x^4 = x^7$

2) Να χαρακτηρίσετε Σωστή ή Λάθος κάθε μια από τις παρακάτω προτάσεις:

Πρόταση	Σωστό	Λάθος
$(-\alpha + \beta)^2 = (-\alpha)^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$		
$(-\alpha + \beta)^2 = (-\alpha)^2 + 2(-\alpha)\beta + \beta^2$		
$(-\alpha - \beta)^2 = -\alpha^2 - 2\alpha\beta - \beta^2$		
$(-\alpha - \beta)^2 = (-\alpha)^2 + 2(-\alpha)(-\beta) + (-\beta)^2$		
$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = x^2 + \frac{1}{x^2} + 2$		
$(2\alpha - 5)^2 = 4\alpha^2 - 10\alpha + 25$		
$(9x - 3)^2 = 81x^2 - 9$		

3) Να βρείτε τα αναπτύγματα:

- α) $(x+1)^2$ β) $(y+3)^2$ γ) $(2a+5)^2$ δ) $(2y+3x)^2$
 ε) $\left(a + \frac{2}{a}\right)^2$ στ) $(y^2+2)^2$ ζ) $(x^4+x)^2$ η) $(2x^2+5x^3)^2$
 θ) $(2x+\sqrt{6})^2$ ι) $(2\sqrt{x}+5\sqrt{y})^2$ ια) $\left(\frac{x}{2} + \frac{y}{7}\right)^2$ ιβ) $(x^2y+xy^2)^2$

4) Να βρείτε τα αναπτύγματα:

- α) $(x-1)^2$ β) $(y-5)^2$ γ) $(2\omega-3)^2$ δ) $(8y-7x)^2$
 ε) $\left(a - \frac{3}{a}\right)^2$ στ) $(y^2-4)^2$ ζ) $(x^4-9x)^2$ η) $(3x^5-5x^3)^2$
 θ) $(x-\sqrt{2})^2$ ι) $\left(2\sqrt{x} - \frac{\sqrt{y}}{2}\right)^2$ ια) $\left(\frac{x}{2} - \frac{2}{x}\right)^2$ ιβ) $\left(2x^2y - \frac{1}{2}xy^2\right)^2$

5) Να βρείτε τα αναπτύγματα:

- α) $(-x-1)^2$ β) $(-y+11)^2$ γ) $(-2\omega+\sqrt{3})^2$ δ) $(-\sqrt{x}-\sqrt{y})^2$
 ε) $(-3x+y)^2$ στ) $(-3y^2-5)^2$ ζ) $(-2+xy\sqrt{3})^2$ η) $(-2\sqrt{x}-\sqrt{12})^2$

Να βρείτε τα αναπτύγματα:

6) α) $(x+1)^3$ β) $(y+4)^3$ γ) $(2a+3\beta)^3$ δ) $(x^2+2)^3$
ε) $\left(a+\frac{1}{a}\right)^3$ στ) $(y^2+y)^3$ ζ) $(x^4+y^5)^3$ η) $(2x^2+\sqrt{2})^3$

Να βρείτε τα αναπτύγματα:

7) α) $(x-2)^3$ β) $(y-5)^3$ γ) $(2a-1)^3$ δ) $(2x-3y)^3$
ε) $(y^2-4)^3$ στ) $(y^2+2y)^3$ ζ) $(x^3-y^4)^3$ η) $(4x^4-\sqrt{3})^3$

Να βρείτε τα αναπτύγματα:

8) α) $(x-1)(x^2+x+1)$ β) $(x-3)(x^2+3x+9)$
γ) $(y+2)(y^2-2x+4)$ δ) $(2\omega+1)(4\omega^2-2\omega+1)$
ε) $(2x+7y)(2x-7y)$ στ) $(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})$
ζ) $(2x^2+3y^3)(2x^2-3y^3)$ η) $(\sqrt{x}-x^5)(\sqrt{x}+x^5)$

Να βρείτε τα αναπτύγματα:

9) α) $(x-1)(x+1)$ β) $(y+3)(y-3)$
γ) $(3-\omega)(3+\omega)$ δ) $(x-y)(-x-y)$
ε) $(x^2-5)(x^4+5x+25)$ στ) $(x^3+x^2)(x^6-x^5+x^4)$

Να βρείτε τα ισοδύναμα των παρακάτω κλασμάτων με ρητό παρονομαστή:

10) $\frac{1}{\sqrt{5}-1}$, $\frac{6}{\sqrt{7}-\sqrt{3}}$, $\frac{5}{3+\sqrt{2}}$, $\frac{12}{2\sqrt{2}+\sqrt{6}}$

Να βρείτε τα αναπτύγματα:

11) α) $(x+y+1)^2$, β) $(x-y+3)^2$, γ) $(2\alpha-3\beta+5)^2$, δ) $(3x-y^2-4)^2$

Να κάνετε τις πράξεις:

12) α) $(x+y)^2 - (x-2y)(x+2y) + (2x-y)^2$, β) $(x^2-1)^2 - (x^2-2)(x^2+2)$
γ) $(x-4)^2 - (2x+5)^2$, δ) $(3\alpha+2)^3 - (3\alpha-2)^2$
ε) $(\alpha-\beta)^3 + (\alpha+\beta)^3 + 3(\alpha-\beta)^2(\alpha+\beta) + 3(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)^2$
ζ) $(-x+3x^2)^3 - 3(3x^3-x^2)^2$, η) $(\alpha-1)^3 - 2(3\alpha+2)^3 - a(a+2)(a-2)$
θ) $(x+y)^3 - y(x-y)(x+y) + x(x-y)^2$

Να αποδείξετε τις ταυτότητες:

13) α) $(x-2y)^2 - (2x-y)^2 + 3x^2 = 3y^2$, β) $(\alpha-3\beta)^2 + (\beta-3\alpha)^2 + 8(\alpha-\beta)(\alpha+\beta) = 0$
γ) $(\alpha-3\beta)^2 + (3\alpha-2\beta)(3\alpha-2\beta) - (3\alpha-\beta)^2 = \alpha^2 + 4\beta^2$,
δ) $(\alpha-4)^2 + (2\alpha-3)^2 = \alpha^2 + (2\alpha-5)^2$, ε) $(x+2y)^2 - (2x-y)^2 = 3(y-x)(x+y)$
στ) $(\alpha^2-\beta^2)^2 + (2\alpha\beta)^2 = (\alpha^2+\beta^2)^2$, ζ) $(2x^2+2x)^2 + (2x+1)^2 = (2x^2+2x+1)^2$

14) Αν $x + \frac{1}{x} = 4$ να υπολογίσετε τα $x^2 + \frac{1}{x^2}$ και $x^3 + \frac{1}{x^3}$

15) Αν $x = 3 + \sqrt{5}$ και $y = 3 - \sqrt{5}$ να υπολογίσετε τα παρακάτω:
 xy , $x^2 - y^2$, $x^2 + y^2$, $x^3 + y^3$, $x^2 + xy + y^2$, $x^3 - y^3$

16) Αν $\alpha = \sqrt{3} - \sqrt{2}$ και $\beta = \sqrt{3} + \sqrt{2}$ να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:
 $A = 5\alpha^2 - 9\alpha\beta + 5\beta^2$

Με τη βοήθεια των αξιοσημείωτων ταυτοτήτων να υπολογίσετε τα:
 17) α) $99^2 + 2 \cdot 99 + 1^2$, β) $102^2 - 2 \cdot 204 + 4^2$, γ) $100.001^2 - 100.000^2$
 δ) $101 \cdot 99$, ε) $7,5^2 - 3,5^2$, στ) $\frac{7,23^2 - 4,23^2}{11,46}$, ζ) $185^2 - 184^2$
 η) $99^3 + 3 \cdot 99^2 + 3 \cdot 99 + 1^3$, θ) $101^3 - 3 \cdot 101^2 + 3 \cdot 101 - 1$

18) Αν $\alpha - \beta = (\sqrt{5} - 2)(\sqrt{5} + 2)$ να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:
 $A = (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta + (\alpha - \beta)^{2013}$

19) Να αποδείξετε ότι $\left(x + \frac{5}{x}\right)^2 - \left(x - \frac{5}{x}\right)^2 = 20$ και κατόπιν να υπολογίσετε τις τιμές αριθμών $\alpha = \left(2010 + \frac{1}{402}\right)^2 - \left(2010 - \frac{1}{402}\right)^2$ και $\beta = \left(1000 - \frac{1}{200}\right)^2 - \left(1000 + \frac{1}{200}\right)^2$

20) Αν $\alpha \cdot \beta = 5$ και $\alpha^2 \cdot \beta + \alpha \cdot \beta^2 + \alpha + \beta = 24$ να βρείτε την τιμή $\alpha^2 + \beta^2$

21) Να αποδείξετε ότι το πολυώνυμο $P(x) = (x-3)^2 - 10(x-1)(x+1) + (3x+1)^2$ είναι σταθερό.

Για το πολυώνυμο $P(x) = -2x^2 + 2x + 800$
 22) α) να αποδείξετε ότι: $P(1-x) = P(x)$,
 β) να υπολογίσετε τις τιμές των $P(100)$ και $P(-99)$

23) Αν $x - \frac{2}{x} = -4$ να υπολογίσετε τα $x^2 + \frac{4}{x^2}$ και $x^3 - \frac{8}{x^3}$

24) Στο τρίγωνο ΑΒΓ είναι $ΑΓ = 2κ$, $ΑΒ = 2κ^2 - \frac{1}{2}$ και $ΒΓ = 2κ^2 + \frac{1}{2}$, όπου ο αριθμός $κ > \frac{1}{2}$.
 Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο είναι ορθογώνιο.

