

1.5. Ανισώσεις α' βαθμού



- < είναι μικρότερο από
- ≤ είναι μικρότερο ή ίσο από
- > είναι μεγαλύτερο από
- ≥ είναι μεγαλύτερο ή ίσο από
- ≠ δεν είναι ίσο με



Κάθε τιμή της μεταβλητής που κάνει την ανίσωση αληθή καλείται λύση της ανίσωσης. Για παράδειγμα: Οι λύσεις της ανίσωσης $x < 3$ είναι όλοι οι αριθμοί που είναι μικρότεροι του 3.



α β

Αν ένας αριθμός α είναι μικρότερος από τον αριθμό β, τότε ο α βρίσκεται «πιο αριστερά» από τον β στην ευθεία των αριθμών. Επίσης ο β βρίσκεται «πιο δεξιά» από τον α.

39. Με την χρήση μίας μεταβλητής να γράψετε μία ανίσωση για κάθε εικόνα.

α)



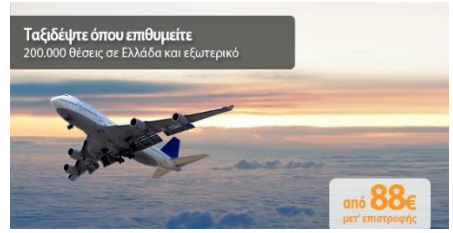
.....

β)



.....

γ)



.....

40. Με την χρήση μίας μεταβλητής να γράψετε μία ανίσωση για κάθε μία από τις ακόλουθες περιπτώσεις.

α) Άτομα κάτω των 17 δεν επιτρέπονται.

β) Η ορατότητα είναι μικρότερη από 3,2 km.

41. Να περιγράψετε μία άλλη περίπτωση που μπορεί να παρουσιαστεί με τη χρήση ανίσωσης. Να γράψετε την αντίστοιχη ανίσωση.

.....
.....

42. Δίνονται οι παρακάτω αριθμοί.

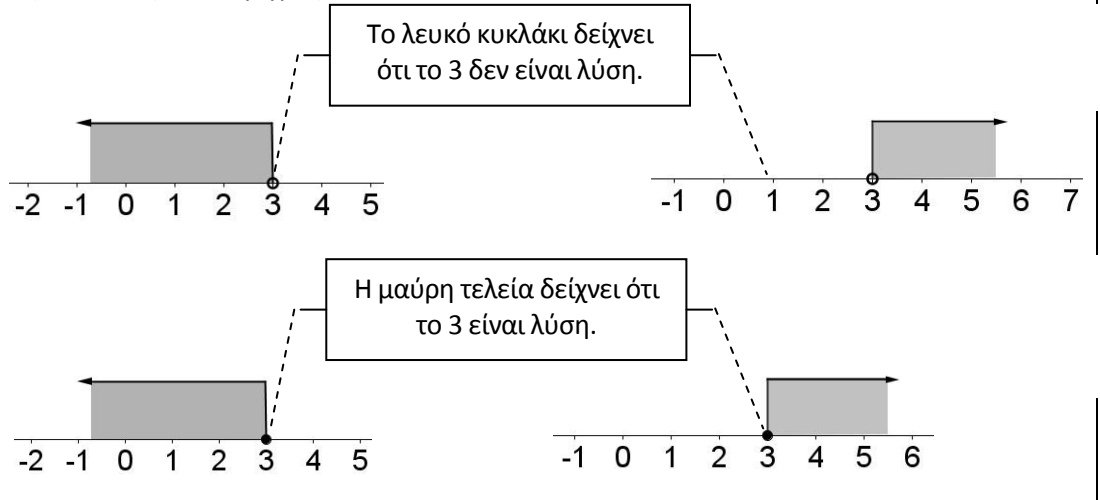
- i) 1 ii) -7,3 iii) 9,004 iv) 0 v) 3 vi) $\frac{2895}{3247}$

α) Ποιοι από τους παραπάνω αριθμούς αποτελούν λύση της ανίσωσης $x < 3$. Καταγράψτε τους αριθμούς.

β) Δώστε μερικές ακόμα λύσεις της $x < 3$.
.....

γ) Πόσες λύσεις έχει η ανίσωση $x < 3$;

Στην ευθεία των αριθμών παρουσιάζονται οι λύσεις της ανίσωσης $x < 3$, μαζί με τις λύσεις τριών άλλων ανισώσεων οι οποίες συγκρίνουν το x με το 3. Για κάθε περίπτωση να γράψετε την ανίσωση που περιγράφουν.



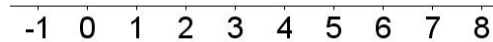
43. Να εξηγήσετε σε τι διαφέρει η ανίσωση $x < 3$ από την εξίσωση $x = 3$.

.....

44. α) Να περιγράψετε πώς θα παρουσιάζατε τις λύσεις της ανίσωσης $x \neq 3$ στην ευθεία των αριθμών.

.....

β) Να παρουσιάσετε τις λύσεις της ανίσωσης $x \neq 3$.



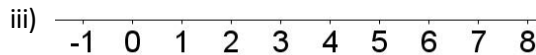
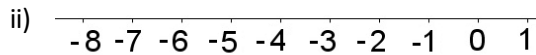
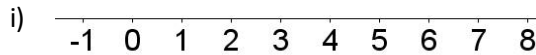
45. α) Να ξαναγράψετε κάθε ανίσωση, ώστε η μεταβλητή να είναι στα αριστερά.

i) $2 < x$

ii) $-5 \geq \beta$

iii) $0 \leq u$

β) Να παρουσιάσετε τις λύσεις κάθε ανίσωσης.

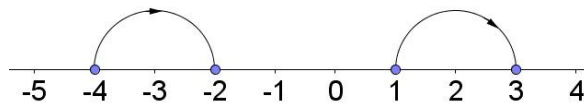


46. Ισχύει ότι $-4 < 1$. Ελέγξτε τι συμβαίνει αν προσθέσετε τον αριθμό 2 σε κάθε μέλος της ανίσωσης.

$-4 < 1$


$-4 + 2 < 1 + 2$


$-2 < 3$




Τι παρατηρείτε;

.....


 Η ανίσωση $4 > x$ μπορεί να γραφεί και ως $x < 4$.


 Όταν η μεταβλητή βρίσκεται στα αριστερά, το σύμβολο της ανίσωσης δείχνει στην ίδια κατεύθυνση που φαίνεται και στην ευθεία των αριθμών.

Χρησιμοποιώντας πρόσθεση και αφαίρεση για την επίλυση ανισώσεων.


 Αν και στα δύο μέλη μιας ανίσωσης προσθέσουμε ή αφαιρέσουμε τον ίδιο αριθμό, τότε προκύπτει και πάλι μια ανίσωση με την ίδια φορά. Δηλαδή:

Αν $\alpha < \beta$ τότε
 $\alpha + \gamma < \beta + \gamma$
 και
 $\alpha - \gamma < \beta - \gamma$

Αν $\alpha > \beta$ τότε
 $\alpha + \gamma > \beta + \gamma$
 και
 $\alpha - \gamma > \beta - \gamma$



Αν και στα δύο μέλη μιας ανίσωσης προσθέσουμε ή αφαιρέσουμε τον ίδιο αριθμό, τότε προκύπτει και πάλι μια ανίσωση με την ίδια φορά. Δηλαδή:

Αν $\alpha < \beta$ τότε
 $\alpha + \gamma < \beta + \gamma$
 και
 $\alpha - \gamma < \beta - \gamma$.

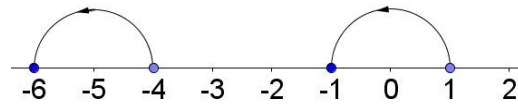
Αν $\alpha > \beta$ τότε
 $\alpha + \gamma > \beta + \gamma$
 και
 $\alpha - \gamma > \beta - \gamma$.

47. Ισχύει ότι $-4 < 1$. Ελέγξτε τι συμβαίνει αν αφαιρέσετε τον αριθμό 2 από κάθε μέλος της ανίσωσης.

$-4 < 1$

$-4 - 2 < 1 - 2$

$-6 < -1$



Τι παρατηρείτε;

48. Ποιον αριθμό χρειάζεται να προσθέσετε σε κάθε μέλος των παρακάτω ανισώσεων ώστε να προκύψει απλούστερη ανίσωση;

α) $x - 3 > -2$

β) $0 < -\frac{4}{3} + s$

γ) $1 \leq z - 4$

49. Ποιον αριθμό χρειάζεται να αφαιρέσετε σε κάθε μέλος των παρακάτω ανισώσεων ώστε να προκύψει απλούστερη ανίσωση;

α) $x + 3 > -2$

β) $0 < \frac{4}{3} + s$

γ) $1 \leq z + 4$

50. α) Να λύσετε την ανίσωση $x - 3 < 5$

.....

β) Να παραστήσετε τις λύσεις στην ευθεία των αριθμών.

γ) Αντικαταστήστε το x με έναν αριθμό μεγαλύτερο του 8 και εκτελέστε τις πράξεις στην ανίσωση $x - 3 < 5$. Είναι αληθής η ανίσωση;

δ) Αντικαταστήστε το x με τον αριθμό 8 και εκτελέστε τις πράξεις στην ανίσωση $x - 3 < 5$. Είναι αληθής η ανίσωση;

ε) Αντικαταστήστε το x με έναν αριθμό μικρότερο του 8 και εκτελέστε τις πράξεις στην ανίσωση $x - 3 < 5$. Είναι αληθής η ανίσωση;

51. α) Να λύσετε την ανίσωση $y - 2 > -4$

.....

β) Να παραστήσετε τις λύσεις στην ευθεία των αριθμών.

52. α) Να λύσετε την ανίσωση $y + 2 < -6$.

.....

β) Να παραστήσετε τις λύσεις στην ευθεία των αριθμών.

Χρησιμοποιώντας πολλαπλασιασμό και διαίρεση για την επίλυση ανισώσεων.



Αν και τα δύο μέλη μιας ανίσωσης πολλαπλασιαστούν ή διαιρεθούν με τον ίδιο θετικό αριθμό, τότε προκύπτει και πάλι μια ανίσωση με την ίδια φορά. Δηλαδή:

$$\begin{aligned} &\text{Αν } \alpha < \beta \text{ και } \gamma > 0 \text{ τότε} \\ &\alpha \cdot \gamma < \beta \cdot \gamma \\ &\text{και} \\ &\frac{\alpha}{\gamma} < \frac{\beta}{\gamma}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\text{Αν } \alpha > \beta \text{ και } \gamma > 0 \text{ τότε} \\ &\alpha \cdot \gamma > \beta \cdot \gamma \\ &\text{και} \\ &\frac{\alpha}{\gamma} > \frac{\beta}{\gamma}. \end{aligned}$$

53. Εργαστείτε με τον διπλανό σας και διερευνήστε τι συμβαίνει σε μία ανίσωση όταν πολλαπλασιάζεται κάθε μέλος της με τον ίδιο αριθμό.

α) Συμπληρώστε το κενό σε κάθε πρόταση, θέτοντας μέσα στο κενό το σύμβολο <, > ή =.

i) $4 > 1$

ii) $3 \cdot 4$ $3 \cdot 1$

iii) $2 \cdot 4$ $2 \cdot 1$

iv) $1 \cdot 4$ $1 \cdot 1$

v) $0 \cdot 4$ $0 \cdot 1$

vi) $-1 \cdot 4$ $-1 \cdot 1$

vii) $-2 \cdot 4$ $-2 \cdot 1$

viii) $-3 \cdot 4$ $-3 \cdot 1$

β) Τι συμβαίνει στην ανίσωση όταν πολλαπλασιάζεται κάθε μέλος της

i) με έναν θετικό αριθμό;

ii) με το μηδέν;

iii) με έναν αρνητικό αριθμό;

54. α) Να λύσετε την ανίσωση $\frac{x}{2} < -1$.

.....

β) Να παραστήσετε τις λύσεις στην ευθεία των αριθμών.

γ) Να περιγράψετε τις λύσεις για την ανίσωση $\frac{x}{2} \leq -1$.

.....

55. α) Να λύσετε την ανίσωση $2x \leq -4$.

.....

β) Να παραστήσετε τις λύσεις στην ευθεία των αριθμών.

56. Η Μαρία έλυσε την ανίσωση $-2 > \frac{y}{3}$ και βρήκε ότι $-6 > y$. Η Κατερίνα έλυσε την ίδια ανίσωση και βρήκε $y < -6$. Είναι και οι δύο λύσεις σωστές; Εξηγήστε γιατί.

.....

.....

.....

57. α) Να λύσετε την ανίσωση $-2x \leq -4$.

.....

.....

.....

β) Να παραστήσετε τις λύσεις στην ευθεία των αριθμών.

58. α) Να λύσετε την ανίσωση $-\frac{2}{3}x \geq 2$.

.....

.....

.....

β) Να παραστήσετε τις λύσεις στην ευθεία των αριθμών.

59. α) Να λύσετε την ανίσωση $-x < \frac{1}{2}$.

.....

.....

.....

β) Να καταγράψετε τέσσερις ακέραιους αριθμούς που αποτελούν λύση της παραπάνω ανίσωσης

60. α) Με ποιον αριθμό μπορείτε να διαιρέσετε κάθε μέλος της ανίσωσης $-x \leq 7$ για να λάβετε $x \geq -7$;

β) Με ποιον αριθμό μπορείτε να πολλαπλασιάσετε κάθε μέλος της ανίσωσης $-x > -3$ για να λάβετε $x < 3$;



Αν και τα δύο μέλη μιας ανίσωσης πολλαπλασιαστούν ή διαιρεθούν με τον ίδιο αρνητικό αριθμό, τότε προκύπτει και πάλι μια ανίσωση με την αντίστροφη φορά. Δηλαδή:

$$\begin{aligned} \text{Αν } \alpha < \beta \text{ και } \gamma < 0 \text{ τότε} \\ \alpha \cdot \gamma > \beta \cdot \gamma \\ \text{και} \\ \frac{\alpha}{\gamma} > \frac{\beta}{\gamma} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Αν } \alpha > \beta \text{ και } \gamma < 0 \text{ τότε} \\ \alpha \cdot \gamma < \beta \cdot \gamma \\ \text{και} \\ \frac{\alpha}{\gamma} < \frac{\beta}{\gamma} \end{aligned}$$

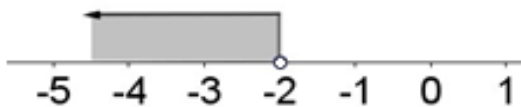


Δεν πολλαπλασιάζουμε τα μέλη μίας ανίσωσης με τον αριθμό 0.



Δεν μπορούμε να διαιρέσουμε τα μέλη μίας ανίσωσης με τον αριθμό 0.

61. Η ακόλουθη ευθεία των αριθμών δείχνει τις λύσεις μίας ανίσωσης.



Ποιες από τις ακόλουθες είναι η ανίσωση;

- α) $-2x > 4$
- β) $-4 > 2x$
- γ) $-x < 2$
- δ) $8 < -4x$
- ε) $-2 > x$

62. Να εκτιμήσετε τη λύση κάθε ανίσωσης.

- α) $-2,099x < 4$
- β) $3,87y \geq -24$

63. Να λύσετε τις ανισώσεις.

α) $\frac{3x}{2} \geq -45$	β) $2 < -8x$	γ) $0 < -7x$
--	--	--

64. Ο Αποστόλης έλυσε την ανίσωση $-15x \leq 135$ προσθέτοντας 15 σε κάθε μέλος της ανίσωσης. Τι λάθος έκανε;

.....

.....

.....

.....

65. Ο Αποστόλης έλυσε την ανίσωση $-\frac{3x}{4} \leq 12$ και βρήκε ότι $x \leq -16$. Τι λάθος έκανε;

.....

.....

.....

.....

Αξιοποιώντας τις ιδιότητες για την επίλυση ανισώσεων.



Θυμόμαστε να αλλάζουμε την φορά της ανίσωσης όταν πολλαπλασιάζουμε ή διαιρούμε με αρνητικό αριθμό.



Κάνουμε απαλοιφή παρονομαστών, εφόσον η ανίσωση έχει παρονομαστές

66. Να λύσετε την ανίσωση $3x + 100 > x + 400$.

Βήματα

- Χωρίζουμε γνωστούς από αγνώστους
- Κάνουμε τις αναγωγές ομοίων όρων
- Διαιρούμε με τον συντελεστή του αγνώστου
- Απλοποιούμε το κλάσμα

67. Να λύσετε την ανίσωση $2(x - 1) - 3(x + 1) \leq 4(x + 2) + 12$. Στη συνέχεια, να παραστήσετε τις λύσεις στην ευθεία των αριθμών.

Βήματα

-
-
-
-
-
-

68. Να λύσετε την ανίσωση $\frac{5-x}{4} + \frac{x+2}{8} \geq x$. Στη συνέχεια, να παραστήσετε τις λύσεις στην ευθεία των αριθμών.

Βήματα

-
-
-
-
-
-
-
-



Όταν η ανίσωση αληθεύει για κάθε τιμή του αριθμού x . Η παράσταση των λύσεων αυτών στην ευθεία των αριθμών είναι όλη η ευθεία.



Όταν η ανίσωση δεν αληθεύει για καμιά τιμή του αριθμού x . Λέμε ότι η ανίσωση είναι αδύνατη. Στην παράσταση των λύσεων αυτών στην ευθεία των αριθμών δε θα σημειώσουμε τίποτα, γιατί κανένας αριθμός δεν είναι λύση αυτής της ανίσωσης.

69. Να λύσετε την ανίσωση $2(x - 1) - 3(x + 2) < 4(x + 1) - 5(x - 2)$. Στη συνέχεια, να παραστήσετε τις λύσεις στην ευθεία των αριθμών.

.....

.....

.....

.....

70. Να λύσετε την ανίσωση $x + 2 + 2(x - 3) > 3x + 4$. Στη συνέχεια, να παραστήσετε τις λύσεις στην ευθεία των αριθμών.

.....

.....

.....

.....

71. Να λύσετε την ανίσωση $x - \frac{x}{2} - \frac{3x - 1}{4} < 1$. Στη συνέχεια, να παραστήσετε τις λύσεις στην ευθεία των αριθμών.

.....

.....

.....

.....

.....

72. Να λύσετε την ανίσωση $\frac{8 - x}{6} + \frac{2(x - 1)}{3} \leq \frac{1}{2}(x + 6) - \frac{x}{3}$. Στη συνέχεια, να παραστήσετε τις λύσεις στην ευθεία των αριθμών.

.....

.....

.....

.....

.....

Εύρεση κοινών λύσεων εξισώσεων

Μπορούμε να γράψουμε τις δύο ανισώσεις ως μία ανίσωση:

- $12 < \theta < 17$

Την ανίσωση αυτή μπορούμε να την διαβάσουμε ως εξής:

- θ είναι μεγαλύτερη από 12 και μικρότερη του 17
- θ είναι μεταξύ 12 και 17.

Μπορούμε να γράψουμε τις δύο ανισώσεις ως μία ανίσωση:

- $12 \leq \theta \leq 17$

Την ανίσωση αυτή μπορούμε να την διαβάσουμε ως εξής:

- θ είναι μεγαλύτερη ή ίση από 12 και μικρότερη ή ίση του 17
- θ είναι από 12 μέχρι και 17.

Η ανίσωση χωρίζεται σε δύο ανισώσεις, οι οποίες πρέπει να ισχύουν ταυτόχρονα, δηλαδή να συναληθεύουν.

Στη συνέχεια παριστάνουμε τις λύσεις κάθε μίας από τις ανισώσεις στην ευθεία των αριθμών.

Ακολουθώς σχεδιάζουμε τις παραστάσεις των δύο λύσεων στην ευθεία των αριθμών. Βρίσκουμε τις κοινές λύσεις.

76. Σήμερα η θερμοκρασία θα είναι υψηλότερη από 12°C , αλλά δεν θα ξεπεράσει τους 17°C .

α) Να γράψετε την παραπάνω πρόβλεψη σε μορφή ανίσωσης.

.....

β) Να παραστήσετε τις λύσεις στην ευθεία των αριθμών.

77. Σήμερα η θερμοκρασία θα είναι υψηλότερη ή ίση με 12°C και θα είναι χαμηλότερη ή ίση με 17°C .

α) Να γράψετε την παραπάνω πρόβλεψη σε μορφή ανίσωσης.

.....

β) Να παραστήσετε τις λύσεις στην ευθεία των αριθμών.

78. Να λύσετε την ανίσωση $\frac{x+1}{3} \leq 2 \leq \frac{3-x}{2}$.

Χωρίζουμε την ανίσωση σε δύο ανισώσεις και τις λύνουμε χωριστά.

$$\frac{x+1}{3} \leq 2$$

.....

$$2 \leq \frac{3-x}{2}$$

.....

Η παράσταση των λύσεων των ανισώσεων στην ευθεία των αριθμών είναι η ακόλουθη:

Στη συνέχεια σχεδιάζουμε την παράσταση των δύο λύσεων στην ίδια ευθεία.

