

Α.1.5. Χαρακτήρες διαιρετότητας-ΜΚΔ-ΕΚΠ-Ανάλυση αριθμού σε γινόμενο πρώτων παραγόντων



Πολλαπλάσια ενός φυσικού αριθμού a είναι οι αριθμοί που προκύπτουν από τον πολλαπλασιασμό του a με όλους τους φυσικούς αριθμούς. Με τον τρόπο αυτό θα προκύψουν τα πολλαπλάσια του a που είναι $0, a, 2a, 3a, 4a \dots$



Κάθε φυσικός αριθμός διαιρεί τα πολλαπλάσιά του.



Κάθε φυσικός που διαιρείται από έναν άλλο είναι πολλαπλάσιό του.



Αν ένας φυσικός διαιρεί έναν άλλον θα διαιρεί και τα πολλαπλάσιά του.



Το μικρότερο από τα κοινά πολλαπλάσια δύο ή περισσότερων αριθμών που δεν είναι μηδέν ονομάζεται **Ελάχιστο Κοινό Πολλαπλάσιο (ΕΚΠ)** των αριθμών αυτών. Το **Ελάχιστο Κοινό Πολλαπλάσιο (ΕΚΠ)** δύο αριθμών γράφεται $ΕΚΠ(\alpha, \beta)$.

26. Δύο πλοία πραγματοποιούν δρομολόγια σ΄ ένα νησί του Αιγαίου. Τα δύο πλοία επισκέπτονται το νησί ως εξής: Το πρώτο ανά 4 ημέρες και το δεύτερο ανά 6 ημέρες. Παρακολουθήστε το μικροπείραμα mpa14.ggb. Αν ξεκίνησαν από το νησί ταυτόχρονα, σε πόσες ημέρες θα ξαναβρεθούν στο λιμάνι του νησιού για πρώτη φορά; Για δεύτερη φορά; Για τρίτη φορά;

.....

.....

.....

.....

27. Να γράψετε ορισμένα πολλαπλάσια του αριθμού 5 και του αριθμού 8.

Πολλαπλάσια του 5										
Πολλαπλάσια του 8										

(α) Ελέγξτε αν ο αριθμός 5 διαιρεί τα πολλαπλάσιά του.

.....

.....

.....

(β) Ελέγξτε αν ο φυσικός αριθμός 48 διαιρείται από τον αριθμό 8. Είναι ο αριθμός 48 πολλαπλάσιο του 8;

.....

.....

(γ) Ελέγξτε αν ο φυσικός αριθμός 24 διαιρείται από τον αριθμό 16. Είναι ο αριθμός 24 πολλαπλάσιο του 16;

.....

.....

28. Να γράψετε τα πολλαπλάσια των αριθμών 3 και 4:

Πολλαπλάσια του 3												
Πολλαπλάσια του 4												

(α) Με βάση τον πίνακα, να καταγράψετε τα κοινά πολλαπλάσια των δύο αριθμών.

.....

.....

(β) Ποιο είναι το Ελάχιστο Κοινό Πολλαπλάσιο των αριθμών 3 και 4;

.....

.....



Διαιρέτες ενός φυσικού αριθμού α λέγονται όλοι οι αριθμοί που τον διαιρούν.



Κάθε αριθμός α έχει διαιρέτες τους αριθμούς **1 και α** .



Ένας αριθμός που έχει διαιρέτες μόνο τον **εαυτό του** και το **1** λέγεται **πρώτος αριθμός**, διαφορετικά λέγεται **σύνθετος**.



Δύο φυσικοί αριθμοί α και β μπορεί να έχουν κοινούς διαιρέτες. Ο μεγαλύτερος από αυτούς ονομάζεται **Μέγιστος Κοινός Διαιρέτης (ΜΚΔ)** των α και β και συμβολίζεται **ΜΚΔ(α , β)**.



Δύο αριθμοί α και β λέγονται **πρώτοι μεταξύ τους** αν είναι **ΜΚΔ(α , β) = 1**.



Για τον υπολογισμό του ΜΚΔ:
 α) Γίνεται ανάλυση των αριθμών σε γινόμενα πρώτων παραγόντων.
 β) Επιλέγονται **μόνο οι κοινοί παράγοντες με το μικρότερο εκθέτη**.



Για τον υπολογισμό του ΕΚΠ:
 α) Γίνεται ανάλυση των αριθμών σε γινόμενα πρώτων παραγόντων.
 β) Επιλέγονται **οι κοινοί και μη κοινοί παράγοντες με το μεγαλύτερο εκθέτη**.

29. Να βρείτε τους διαιρέτες του 48.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

30. Να βρείτε τους διαιρέτες του 37.

.....

.....

Τι παρατηρείτε;

.....

31. Να βρείτε τους διαιρέτες του 18 και 63.

.....

.....

Ποιοι είναι οι κοινοί διαιρέτες των δύο αυτών αριθμών;

.....

Ποιος είναι ο μεγαλύτερος κοινός διαιρέτης τους;

.....

32. Να βρείτε τους διαιρέτες του 18 και 65.

.....

.....

Ποιοι είναι οι κοινοί διαιρέτες των δύο αυτών αριθμών;

.....

Ποιος είναι ο μεγαλύτερος κοινός διαιρέτης τους;

.....

33. Να αναλύσετε τους αριθμούς 12, 450, 30 σε γινόμενο πρώτων παραγόντων. Με τη βοήθεια αυτής της ανάλυσης να βρεθεί ο ΜΚΔ και το ΕΚΠ αυτών των αριθμών.

**Κριτήρια Διαιρετότητας**

λέγονται οι κανόνες με τους οποίους μπορείτε να συμπεράνετε, χωρίς να κάνετε τη διαίρεση, αν ένας φυσικός αριθμός διαιρείται με τους αριθμούς 2, 3, 4, 5, 9, 10 ή 25.

- Ένας φυσικός αριθμός διαιρείται με **10, 100, 1000, ...**, αν λήγει σε **ένα, δύο, τρία, ... μηδενικά** αντίστοιχα.
- Ένας φυσικός αριθμός διαιρείται με το 2, αν το τελευταίο ψηφίο είναι 0, 2, 4, 6, 8.
- Ένας φυσικός αριθμός διαιρείται με το 5, αν λήγει σε 0 ή 5.
- Ένας φυσικός αριθμός διαιρείται με το 3 ή το 9, αν το **άθροισμα των ψηφίων του** διαιρείται με το 3 ή το 9 αντίστοιχα.
- Ένας φυσικός αριθμός διαιρείται με το 4 ή το 25, αν τα **δύο τελευταία ψηφία** του σχηματίζουν αριθμό που διαιρείται με το 4 ή το 25 αντίστοιχα.
- Ένας φυσικός αριθμός διαιρείται με το 6 αν διαιρείται συγχρόνως με **το 2 και το 3**.

34. Να βρείτε αν διαιρούνται οι αριθμοί 12510, 772, 225, 13600 με τους αριθμούς 2, 3, 4, 5, 8, 9, 10, 25, 100. Σε κάθε περίπτωση να αιτιολογήτε την απάντησή σας.

12510

772

225

13600

35. Έχει αναδειχθεί ότι, ένας φυσικός αριθμός διαιρείται με το 11, όταν η διαφορά των αθροισμάτων των ψηφίων που βρίσκονται στις άρτιες και στις περιττές θέσεις διαιρείται με το 11. Να ελέγξετε αν ο αριθμός 27514322 διαιρείται από το 11.

Ασκήσεις προς λύση**Κριτήρια διαιρετότητας**

- 1.1.** Να υπολογίσετε το άθροισμα: $31 + 32 + 33 + 34 + 16 + 17 + 18 + 19$
- 1.2.** Να κάνετε τις πράξεις:
- A.** $62 \cdot 5 + 62 \cdot 9$
- B.** $349 \cdot 17 - 349 \cdot 12$
- Γ.** $99 \cdot 15 + 99 \cdot 11 - 99 \cdot 20$
- Δ.** $73 \cdot 32 - 73 \cdot 12 + 73 \cdot 5$
- 1.3.** Να γράψετε σε απλούστερη μορφή:
- A.** $2 \cdot \alpha + 5 \cdot \alpha$
- B.** $12x - 9x$
- Γ.** $3y + 10y - 8y$
- 1.4.** Να γράψετε σε απλούστερη μορφή:
- A.** $7 \cdot (x - y) + 7y + 3$
- B.** $12 \cdot (\omega + \kappa) + 10 - 12 \cdot \omega - 12 \cdot \kappa$
- 1.5.** Αν $x - y = 2$, να υπολογίσετε τις τιμές των παραστάσεων:
- A.** $4x - 4y$
- B.** $8x - 8y + 8$
- 1.6.** Αν $\alpha + \beta = 3$ και $\kappa - \lambda = 2$, να υπολογίσετε τις παραστάσεις:
- A.** $6\alpha + 6\beta + 2\kappa - 2\lambda$
- B.** $5(\alpha + \kappa) + 5(\beta - \lambda)$
- 1.7.** Να γράψετε πιο σύντομα τα παρακάτω αθροίσματα και γινόμενα:
- A.** $x + x + y + y + y$
- B.** $x \cdot x \cdot x + y \cdot y$
- Γ.** $x \cdot x \cdot y \cdot y \cdot y$
- Δ.** $(x + x) \cdot y \cdot y$
- E.** $\chi + \chi + \chi + \chi + \chi$
- ΣΤ.** $\chi \cdot \chi \cdot \chi \cdot \chi$
- 1.8.** Να γράψετε πιο σύντομα τα παρακάτω αθροίσματα και γινόμενα:
- A.** $xy + xy + xy$
- B.** $3 \cdot x \cdot x \cdot 3 \cdot x$
- Γ.** $4x + 4x + 4x$
- 1.9.** Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης: $10 \cdot \gamma^2 + (10 \cdot \gamma)^2$ όταν $\gamma = 2$

1.10. Να συγκρίνετε τους αριθμούς:

A. $3 \cdot 2$ και 2^3

B. 4^3 και 3^4

Γ. $(2+4)^2$ και $2^2 + 4^2$

Δ. $(3 \cdot 4)^2$ και $3^2 \cdot 4^2$

Ε. $(5-3)^2$ και $5^2 - 3^2$

1.11. Να εξηγήσετε γιατί οι αριθμοί $6 \cdot x$ και $6 \cdot y + 30$ διαιρούνται με το 6 (όπου x, y φυσικοί αριθμοί).

1.12. Τρεις φίλοι παίζουν στο Internet ένα παιχνίδι. Ο πρώτος παίζει το παιχνίδι κάθε 4 μέρες, ο δεύτερος κάθε 6 μέρες και ο τρίτος κάθε 8 μέρες. Αν σήμερα παίζουν όλοι το παιχνίδι, μετά από πόσες ημέρες θα ξαναπαίζουν όλοι μαζί;

1.13. Ένας Μαθηματικός έχει επιλέξει 30 ασκήσεις από το 1ο κεφάλαιο, 48 ασκήσεις από το 2ο κεφάλαιο και 36 ασκήσεις από το 3ο κεφάλαιο για να ετοιμάσει επαναληπτικά διαγωνίσματα.

A. Πόσα το πολύ όμοια διαγωνίσματα (δηλαδή με ίδιο πλήθος ασκήσεων από κάθε κεφάλαιο) μπορεί να φτιάξει;

B. Πόσες ασκήσεις θα υπάρχουν στο κάθε διαγώνισμα από το ίδιο κεφάλαιο;

1.14. Ποιες τιμές μπορεί να πάρει το ψηφίο a στον αριθμό $23a4$ ώστε να προκύψει αριθμός που:

A. να διαιρείται με το 9

B. να διαιρείται με το 3

1.15. Αν $x + y = 2$, να βρείτε την τιμή των παραστάσεων:

$$A = 2(x + 1) + 2(y - 1)$$

$$B = x + 3(x + 2) + 4(y - 1)$$

1.16. Ένα βιβλίο Μαθηματικών έχει 400 με 450 σελίδες. Αν μετρήσουμε τις σελίδες ανά 7, 12, 15 δεν περισσεύει καμία. Να βρείτε πόσες σελίδες έχει το βιβλίο.