

ΣΥΜΠΛΗΡΩΜΑΤΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

16. Να μετατρέψεις σε αριθμητικές παραστάσεις τις εκφράσεις

α. Τα $\frac{3}{5}$ ενός αριθμού.

β. Ο αντίστροφος ενός αριθμού είναι 4.

γ. Το μισό του αθροίσματος δύο αριθμών.

δ. Το $\frac{2}{3}$ ενός αριθμού μειωμένα κατά 2.

ε. Ένας αριθμός αυξημένος κατά τα $\frac{5}{9}$ αυτού.

 Λύση

α. $\frac{3}{5} \cdot x$

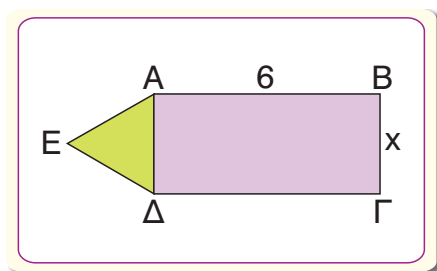
β. $\frac{1}{a} = 4$

γ. $\frac{a+b}{2}$

δ. $\frac{2}{3} \cdot x - 2$

ε. $x + \frac{5}{9}x$

17. Στο παρακάτω σχήμα το ΑΒΓΔ είναι ορθογώνιο και το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ισόπλευρο.



α. Να εκφραστεί με τη βοήθεια του x :

i. η περίμετρος του ορθογωνίου ΑΒΓΔ

ii. η περίμετρος του τριγώνου ΑΔΕ

iii. η περίμετρος του σχήματος ΑΒΓΔΕ

β. Να βρεθούν οι αριθμητικές τιμές των περιμέτρων των σχημάτων αν $x = 2$ και $x = 1,5$.

γ. Για ποια τιμή του x η περίμετρος του σχήματος ΑΒΓΔΕ θα γίνει 27;

4

Λύση

- α. i. Το ορθογώνιο ΑΒΓΔ έχει $AB = ΓΔ = 6$ και $ΒΓ = ΑΔ = x$ οπότε η περίμετρος του είναι

$$\Pi_1 = 6 + 6 + x + x = 12 + 12x.$$

- ii. Το ισόπλευρο τρίγωνο ΑΔΕ έχει όλες τις πλευρές του ίσες με x οπότε η περίμετρος του θα είναι

$$\Pi_2 = x + x + x = 3x.$$

- iii. Το σχήμα ΑΒΓΔΕ έχει περίμετρο

$$\begin{aligned} \Pi &= AB + ΒΓ + ΓΔ + ΔΕ + ΕΑ = \\ &= 6 + x + 6 + x + x = 12 + 3x \end{aligned}$$

- β. Είναι $\Pi_1 = 12 + 2x$

για $x = 2$ θα είναι $\Pi_1 = 12 + 2 \cdot 2 = 12 + 4 = 16$

για $x = 1,5$ θα είναι $\Pi_2 = 12 + 2 \cdot 1,5 = 12 + 3 = 15$

Το ισόπλευρο τρίγωνο ΑΔΕ έχει περίμετρο $\Pi_2 = 3x$

και για $x = 2$ θα είναι $\Pi_2 = 3 \cdot 2 = 6$

ενώ για $x = 1,5$ θα είναι $\Pi_2 = 3 \cdot 1,5 = 4,5$

Τέλος το σχήμα ΑΒΓΔΕ έχει περίμετρο $\Pi = 12 + 3x$

για $x = 2$ θα είναι $\Pi = 12 + 3 \cdot 2 = 12 + 6 = 18$

ενώ για $x = 1,5$ θα είναι

$$\Pi = 12 + 3 \cdot 1,5 = 12 + 4,5 = 16,5$$

- γ. Πρέπει $12 + 3x = 27$

δηλαδή $3x = 27 - 12$

$$3x = 15$$

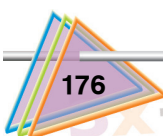
ή $x = 15 : 3$ άρα $x = 5$.

18. Αν $x \cdot y = \frac{5}{8}$ και $z \cdot \omega = \frac{3}{4}$ να βρεθεί το γινόμενο $x \cdot (y \cdot z) \cdot \omega$

Λύση

Σύμφωνα με την προσεταιριστική ιδιότητα θα είναι

$$x \cdot (y \cdot z) \cdot \omega = (x \cdot y) \cdot z \cdot \omega = \frac{5}{8} \cdot (z \cdot \omega) = \frac{5}{8} \cdot \frac{3}{4} = \frac{15}{32}$$



19. Να συγκριθούν τα κλάσματα

i. $\frac{a+4}{a+2}$ και ii. $\frac{a-3}{a-2}$ με τη μονάδα.

 **Λύση**

i. Επειδή $a+4 > a+2$ τότε $\frac{a+4}{a+2} > 1$

ii. Είναι $a-3 < a-2$ οπότε $\frac{a-3}{a-2} < 1$

20. Για ποιες τιμές του φυσικού αριθμού x δεν έχει νόημα το κλάσμα $\frac{1}{x-1}$

 **Λύση**

Ένα κλάσμα δεν έχει νόημα όταν ο παρανομαστής του είναι 0, δηλαδή όταν $x-1=0$ ή $x=1$.

21. Η απόσταση που διανύει ένα αυτοκίνητο όταν κινείται με ταχύτητα u για χρόνο t , είναι $u \cdot t$. Να βρεθεί πόσα χιλιόμετρα θα διανύσει το αυτοκίνητο αν:

α. $u = 80 \text{ Km/h}$ και $t = 3\text{h}$

β. $u = 120 \text{ Km/h}$ και $t = 5\text{h}$

 **Λύση**

α. $u \cdot t = 80 \cdot 3 = 240 \text{ Km}$

β. $u \cdot t = 120 \cdot 5 = 600 \text{ Km}$

22. Αν $x = 4$, $y = 2$ και $\omega = 2,5$ να βρεθούν οι τιμές των παραστάσεων:

α. $(x+2) \cdot y + 3 \cdot x \cdot y \cdot \omega$

β. $(x+y)^2$

γ. $x^2 + 2 \cdot x \cdot y + y^2$

δ. $(x-\omega) \cdot 2$

ε. $x^2 - 2 \cdot x \cdot \omega + \omega^2$

στ. $3x^2 + 5y^2 + \omega^2$

4

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΜΗ ΕΝΘΥΜΙΑ

✍️ Λύση

$$\begin{aligned} \alpha. (x+2) \cdot y + 3 \cdot x \cdot y \cdot \omega &= \\ &= (4+2) \cdot 2 + 3 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 2,5 = \\ &= 6 \cdot 2 + 3 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 2,5 = \\ &= 12 + 60 = 72 \end{aligned}$$

$$\beta. (x+y)^2 = (4+2)^2 = 6^2 = 36$$

$$\begin{aligned} \gamma. x^2 + 2 \cdot x \cdot y + y^2 &= \\ &= 4^2 + 2 \cdot 4 \cdot 2 + 2^2 = \\ &= 16 + 2 \cdot 4 \cdot 2 + 4 = \\ &= 16 + 16 + 4 = 36 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta. (x-\omega) \cdot 2 &= (4-2,5) \cdot 2 = \\ &= 1,5 \cdot 2 = 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \epsilon. x^2 - 2 \cdot x \cdot \omega + \omega^2 &= \\ &= 4^2 - 2 \cdot 4 \cdot 2,5 + (2,5)^2 = \\ &= 16 - 2 \cdot 4 \cdot 2,5 + 6,25 = \\ &= 16 - 20 + 6,25 = \\ &= 16 + 6,25 - 20 = \\ &= 22,25 - 20 = \\ &= 2,25 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma\tau. 3x^2 + 5y^2 + \omega^2 &= \\ &= 3 \cdot 4^2 + 5 \cdot 2^2 + 2,5^2 = \\ &= 3 \cdot 16 + 5 \cdot 4 + 6,25 = \\ &= 48 + 20 + 6,25 = \\ &= 74,25 \end{aligned}$$

ΠΡΟΤΕΡΑΙΟΤΗΤΑ ΠΡΑΞΕΩΝ

Σε μία αριθμητική παράσταση:

- Πρώτα υπολογίζουμε τις δυνάμεις.
- Εκτελούμε τους πολλαπλασιασμούς και τις διαιρέσεις.
- Κάνουμε τις προσθέσεις και τις αφαιρέσεις.

Αν υπάρχουν στην παράσταση παρενθέσεις τότε με την προηγούμενη σειρά εκτελούμε τις πράξεις πρώτα μέσα στις παρενθέσεις.

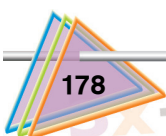
23. Αν $\alpha = 810$, $\beta = 420$, $\gamma = 14$, $\delta = 7,8$ και $\epsilon = 0,1$ να υπολογιστούν οι τιμές των παραστάσεων.

i. $(\alpha + \beta : \gamma)(\delta + \epsilon)$ ii. $(\alpha + \beta)(\gamma - \delta) - \epsilon$ iii. $(\alpha + 3\beta) : 2\gamma - (\delta + \epsilon)$

✍️ Λύση

$$\begin{aligned} \text{i. } (\alpha + \beta : \gamma)(\delta + \epsilon) &= (810 + 420 : 14)(7,8 + 0,1) = (810 + 30) \cdot (7,9) = \\ &= 840 \cdot 7,9 = 6636 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ii. } (\alpha + \beta)(\gamma - \delta) - \epsilon &= (810 + 420)(14 - 7,8) - 0,1 = \\ &= 1230 \cdot 6,2 - 0,1 = \\ &= 7626 - 0,1 = 7625,9 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \text{iii. } (\alpha + 3\beta) : 2\gamma - (\delta + \epsilon) &= (810 + 3 \cdot 420) : (2 \cdot 14) - (7,8 + 0,1) = \\ &= (810 + 1260) : 28 - 7,9 = \\ &= 2070 : 28 - 7,9 = \\ &= 73,93 - 7,9 = \\ &= 66,03 \end{aligned}$$

24. Αν $\alpha = 50$ να βρεθούν οι τιμές των διαφορών:

$$\begin{array}{ll} \text{i. } \frac{\alpha}{4} - \frac{\alpha}{8} & \text{ii. } \frac{\alpha}{2} - \frac{\alpha}{3} \\ \text{iii. } \frac{2\alpha}{5} - \frac{3\alpha}{10} & \text{iv. } \frac{4\alpha}{3} - \frac{2\alpha}{7} \end{array}$$

 Λύση

$$\begin{aligned} \text{i. } \frac{\alpha}{4} - \frac{\alpha}{8} &= \frac{50}{4} - \frac{50}{8} = \frac{50^2}{4} - \frac{50}{8} = \frac{100}{8} - \frac{50}{8} = \frac{50}{8} = \frac{25}{4} \\ \text{ii. } \frac{\alpha}{2} - \frac{\alpha}{3} &= \frac{50}{2} - \frac{50}{3} = \frac{50^3}{2} - \frac{50^2}{3} = \frac{150}{6} - \frac{100}{6} = \frac{50}{6} = \frac{25}{3} \\ \text{iii. } \frac{2\alpha}{5} - \frac{3\alpha}{10} &= \frac{2 \cdot 50}{5} - \frac{3 \cdot 50}{10} = 2 \cdot 10 - 3 \cdot 5 = 20 - 15 = 5 \\ \text{iv. } \frac{4\alpha}{3} - \frac{2\alpha}{7} &= \frac{4 \cdot 50}{3} - \frac{2 \cdot 50}{7} = \frac{200^7}{3} - \frac{100^3}{7} = \frac{1400}{21} - \frac{300}{21} = \frac{1100}{21} \end{aligned}$$

25. Να βρεθούν οι τιμές του φυσικού αριθμού v , για τις οποίες το κλάσμα

$$\frac{\frac{63}{v+1}}{\frac{3}{2}}$$

είναι φυσικός αριθμός.

 Λύση

Κάνοντας το σύνθετο κλάσμα $\frac{\frac{63}{v+1}}{\frac{3}{2}}$ απλό έχουμε:

$$\frac{2 \cdot 63}{3(v+1)} = \frac{2 \cdot \overset{21}{\cancel{63}}}{\cancel{3} \cdot (v+1)} = \frac{42}{v+1}$$

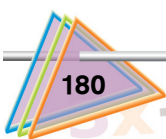
1

4

Για να είναι το κλάσμα $\frac{42}{v+1}$ φυσικός αριθμός θα πρέπει ο $(v + 1)$ να είναι διαιρέτης του 42.

Δηλαδή

	$v + 1 = 1$	οπότε	$v = 0$
	$v + 1 = 2$	άρα	$v = 1$
	$v + 1 = 3$	άρα	$v = 2$
	$v + 1 = 6$	οπότε	$v = 5$
	$v + 1 = 7$	δηλαδή	$v = 6$
	$v + 1 = 14$	άρα	$v = 13$
	$v + 1 = 21$	οπότε	$v = 20$
και	$v + 1 = 42$	άρα	$v = 41$



ΕΞΑΣΚΗΣΗ

26. Να γράψετε τις παρακάτω λεκτικές εκφράσεις με μαθηματικές εκφράσεις γραμμάτων και αριθμών.
- i. Ένας αριθμός ελαττωμένος κατά 13.
 - ii. Το πενταπλάσιο ενός αριθμού.
 - iii. Το διπλάσιο ενός αριθμού είναι 18.
 - iv. Από έναν αριθμό αφαιρούμε 6 και βρίσκουμε 11.
 - v. Το τετραπλάσιο ενός αριθμού είναι μεγαλύτερο του 20.
 - vi. Το τριπλάσιο ενός αριθμού είναι μικρότερο του 10.

27. Να διατυπώσετε με λόγια τις παρακάτω μαθηματικές εκφράσεις:

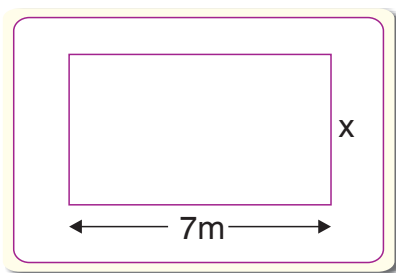
- i. $x + 4$
- ii. $a < 3$
- iii. $\omega - 2$
- iv. $y + 4 = 8$
- v. $4 \cdot x + 3$

28. Γράψτε με απλούστερο τρόπο τις μαθηματικές εκφράσεις:

- i. $\omega + \omega + \omega + \omega$
- ii. $3 \cdot a + 5 \cdot a$
- iii. $8 \cdot \kappa + 7 \cdot \kappa + 5 \cdot \kappa + 3 \cdot \lambda + 7 \cdot \lambda$
- iv. $5x + 12x - 3x$
- v. $3x + 0,5 \cdot x + 7,8 \cdot x + 5,3 \cdot x$
- vi. $4,2 \cdot y - 2,9 \cdot y + 32 \cdot y - 4,89 \cdot y$

(Απ.: i. 4ω , ii. $8a$, iii. $20\kappa + 10\lambda$,
iv. $14 \cdot x$, v. $16,6x$, vi. $28,41y$)

29. Είναι γνωστό ότι το εμβαδόν ενός ορθογώνιου ισούται με το γινόμενο των διαστάσεών του.



- i. Η μία διάσταση είναι 7m, να εκφράσετε το εμβαδόν χρησιμοποιώντας την μεταβλητή x για την άλλη διάσταση.
- ii. Να βρείτε πόσο είναι το εμβαδόν, αν $x = 4m$

(Απ.: $28m^2$)

4

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΣΗΜΕΙΩΣΗ

30. Αν $x \cdot y = \frac{4}{7}$ και $z = \frac{21}{6}$, να βρείτε το $x \cdot (y \cdot z)$

(Απ.: 2)

31. Στην εξίσωση $3 + \kappa = \nu$, το κ και το ν είναι φυσικοί αριθμοί. Ποια από τις τιμές 0, 2, 4 μπορεί να πάρει ο ν ;

(Απ.: 4)

32. Να εξετάσετε αν ο αριθμός 15 είναι λύση της εξίσωσης $50 - x = 35$

(Απ.: είναι)

33. Να εξετάσετε αν ο αριθμός 28 είναι λύση της εξίσωσης $3 \cdot x = 74$

(Απ.: Δεν είναι)

34. Να εξετάσετε ποιος από τους αριθμούς 10, 11, 12 είναι λύση της εξίσωσης $x + 30 = 52 - x$

(Απ.: 11)

35. Ποιος αριθμός επαληθεύει κάθε μία από τις παρακάτω εξισώσεις;

i. $x + 5,8 = 20,95$ ii. $x - 12,32 = 3,75$ iii. $123,8 - x = 92,24$

(Απ.: i. 15,15, ii. 15,98, iii. 31,56)

36. Ποια είναι η τιμή του x για να ισχύει:

i. $\frac{x}{7} = \frac{36}{84}$ ii. $\frac{4}{5} = \frac{20}{x}$ iii. $\frac{2}{3} = \frac{x}{45}$

(Απ.: i. 3, ii. 25, iii. 30)

37. Να βρείτε την τιμή του φυσικού αριθμού x :

i. $\frac{x+2}{2} + \frac{3}{4} = \frac{13}{4}$ ii. $\frac{5}{6} + \frac{x}{4} = \frac{13}{12}$ iii. $\frac{3}{4} + \frac{x+1}{7} = \frac{41}{28}$

(Απ.: i. 3, ii. 1, iii. 4)

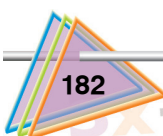
38. Να λύσετε τις εξισώσεις:

i. $x + 25 = 32$ ii. $x - 12 = 45$ iii. $115 - x = 37$

iv. $24 \cdot x = 120$ v. $80 : x = 16$ vi. $x : 25 = 5$

(Απ.: i. 7, ii. 57, iii. 78,

iv. 5, v. 5, vi. 125)



39. Να λύσετε τις εξισώσεις:

i. $(2+3)+x=17+(12-6)$

ii. $5-3+x=18-(4+7)$

iii. $(13+7)-5-x=15-(7+2)$

iv. $(45-7)-x=25-(40-30)$

(Απ.: i. $x = 18$, ii. $x = 5$, iii. $x = 9$, iv. $x = 23$)

40. Σε έναν αριθμό προσθέτουμε 156 και παίρνουμε άθροισμα 832. Ποιος είναι ο αριθμός;

(Απ.: 676)

41. Ποιος αριθμός πρέπει να προστεθεί στο 3, για να προκύψει ο αντίστροφος του $\frac{3}{13}$;

(Απ.: $\frac{4}{3}$)

42. Να συγκρίνετε με τη μονάδα τα κλάσματα:

i. $\frac{a+5}{a+3}$

ii. $\frac{a-4}{a-5}$

iii. $\frac{a-6}{a-4}$

iv. $\frac{3a+2}{3a-2}$

(Απ.: i., ii., iii. μεγαλύτερα του 1, iv. Μικρότερο του 1)

43. Για ποια τιμή του φυσικού αριθμού x δεν έχει νόημα το κλάσμα $\frac{3}{x-3}$

(Απ.: $x = 3$)

44. Αν $x = 5$, $y = 3$ και $\omega = 2$ να υπολογίσετε τις τιμές των παραστάσεων:

i. $(x+3) \cdot y + 2 \cdot x \cdot y \cdot \omega$

ii. $(x-3) \cdot \omega + (y-\omega)^2$

iii. $(x-y)^2$

iv. $x^2 - 2 \cdot x \cdot y + y^2$

v. $4x^2 - 2y^2 - \omega^2$

(Απ.: i. 84, ii. 5, iii. 4, iv. 4, v. 78)

45. Να υπολογίσετε τις τιμές των παραστάσεων:

$\Pi_1 = (a + \beta : \gamma) \cdot (\delta - \epsilon)$ και $\Pi_2 = (a + \beta) : (\gamma - \delta) - \epsilon$ όταν

i. $a = 816$, $\beta = 340$, $\gamma = 3,4$, $\delta = 1,7$, $\epsilon = 1,3$

ii. $a = 462$, $\beta = 75$, $\gamma = 1,5$, $\delta = 1,4$, $\epsilon = 1,1$

(Απ.: i. $\Pi_1 = 366,4$, $\Pi_2 = 678,7$, ii. $\Pi_1 = 153,6$, $\Pi_2 = 5368,9$)

46. Να βρείτε τις 9 τιμές του φυσικού αριθμού n για τις οποίες το κλάσμα

$\frac{24}{\frac{n+1}{2} \cdot \frac{2}{3}}$ είναι φυσικός αριθμός.

(Απ.: 0, 1, 2, 3, 5, 8, 11, 17, 35)