Θέματα εξετάσεων περιόδου
Μαΐου - Ιουνίου
στην Γεωμετρία
Τάξη - Β΄ Λυκείου

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1ο

Α. Να αποδείξετε ότι σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο το τετράγωνο του ύψους που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα είναι ίσο με το γινόμενο των προβολών των κάθετων πλευρών του στην υποτείνουσα . Μονάδες 13

Β. α.. Τι ονομάζουμε δύναμη σημείου Ρ ως προς κύκλο (Ο, R); Μονάδες 4

β) Να συμπληρώσετε τα κενά :

i. Σε κάθε κανονικό πολύγωνο η κεντρική γωνία του ω_ν είναι ίση με ……...

ii. Τετράγωνο εγγεγραμμένο σε κύκλο έχει πλευρά λ_4 =……………….

iii. Αν δύο τρίγωνα είναι όμοια, ο λόγος των εμβαδών τους είναι ίσος με …….

iv. Αν σε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει $\alpha^2 < \beta^2 + \gamma^2$ τότε η γωνία Α είναι …………….

Μονάδες 8

Θέμα 2ο

Σε τραπέζιο ΑΒΓΔ είναι $\hat{A} = 90^o$, $\hat{\Delta} = 90^o$ και ΑΒ // ΓΔ . Αν ΑΒ = 4cm , ΑΔ = 3cm, και ΒΓ = 5cm να βρείτε :

α. Το μήκος της προβολής της πλευράς ΒΓ πάνω στην ΓΔ . Μονάδες 13

β. Το εμβαδόν του τραπεζίου ΑΒΓΔ . Μονάδες 12

Θέμα 3ο

Τρίγωνο ΑΒΓ έχει γ = 7cm , β = 5cm , και α = 6cm . Θεωρούμε σημείο Δ στην ΑΓ τέτοιο ώστε ΑΔ = 2cm , και το Μ μέσο της ΒΓ. Να βρείτε:

α. Το μήκος της διαμέσου ΑΜ . Μονάδες 12

β. Το λόγο των εμβαδών $\frac{(AB\Delta)}{(AB\Gamma)}$. Μονάδες 13

Θέμα 4ο

Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ εγγεγραμμένο σε κύκλο (Ο, R) με πλευρά $8\sqrt{3}$ cm. Να βρείτε :

α. Το μήκος του κύκλου . Μονάδες 12

β. Το εμβαδόν των τριών κυκλικών τμημάτων που βρίσκονται μεταξύ του κύκλου και του τριγώνου . Μονάδες 13

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1ο

Α. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τραπεζίου ισούται με το γινόμενο του ημιαθροίσματος των βάσεών του επί το ύψος του. Μονάδες 13

Β. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη ***΄΄Σωστό*** ή ***Λάθος΄΄*** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α. Αν $\alpha^2 < \beta^2 + \gamma^2$ όπου α, β, γ πλευρές τριγώνου ΑΒΓ τότε η γωνία Α είναι οξεία.

β. Το θεώρημα των συνημιτόνων σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ εκφράζεται από τη σχέση $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 + 2\beta\gamma\sigma\upsilon\nu A$.

γ. Το εμβαδόν ενός τριγώνου ΑΒΓ δίνεται από τη σχέση $E = \dfrac{\alpha\beta\gamma}{4R}$.

δ. Το απόστημα του κανονικού εξαγώνου εγγεγραμμένου σε κύκλο (Ο, R) δίνεται από τη σχέση $\alpha_6 = R\sqrt{3}$.

ε. Αν δύο χορδές ΑΒ, ΓΔ ενός κύκλου (Ο, R) ή οι προεκτάσεις τους τέμνονται σε ένα σημείο Ρ, τότε ισχύει: ΡΑ·ΡΒ = ΡΓ·ΡΔ.

στ. Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο, το τετράγωνο μιας κάθετης πλευράς του είναι ίσο με το γινόμενο της υποτείνουσας επί την προβολή της πλευράς αυτής στην υποτείνουσα.

Μονάδες 12

Θέμα 2ο

Σε κύκλο (Ο, R) θεωρούμε σημείο Ρ εκτός αυτού για το οποίο ισχύει ΟΡ = 2R.

α. Αν είναι $\Delta^{P}_{(O,R)} = 12$ να βρείτε την ακτίνα του κύκλου. Μονάδες 13

β. Από το Ρ φέρνω την ΡΑΒ τέμνουσα του κύκλου (Ο, R) στα σημεία Α και Β έτσι ώστε ΡΑ = 2·ΑΒ. Να βρεθεί το μήκος της χορδής ΑΒ. Μονάδες 12

Θέμα 3ο

Το ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ(ΑΒ = ΑΓ = 5) με ΒΓ = 6, είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο $(O, \dfrac{25}{8})$

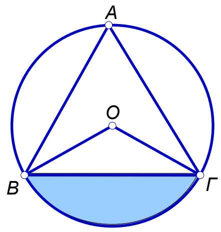
α. Να βρεθεί το είδος του τριγώνου. Μονάδες 7

β. Να υπολογισθεί το εμβαδόν του. Μονάδες 8

γ. Προεκτείνουμε την ΑΒ προς το μέρος του Β κατά ένα τμήμα $B\Delta = \dfrac{AB}{2}$.

Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου ΒΔΓ. Μονάδες 10

Θέμα 4ο



Τρίγωνο ΑΒΓ είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο (Ο,R).

Η γωνία Α βαίνει σε τόξο ΒΓ που έχει μήκος $\dfrac{2\pi R}{3}$.

Αν ΑΒ = 5 και ΑΓ = 4 να βρεθούν:

α. Η γωνία Α. Μονάδες 8

β. Η πλευρά ΒΓ, το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ. Μονάδες 10

γ. Η ακτίνα R και το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου κυκλικού τμήματος. Μονάδες 7

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1ο

a. Σε τρίγωνο ΑΒΓ με $\beta > \gamma$ να αποδείξετε ότι:

$\beta^2 + \gamma^2 = 2\mu_\alpha^2 + \dfrac{\alpha^2}{2}$ όπου μ_α διάμεσος προς την α Μονάδες 15

b. Σε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ($\hat{A} = 90°$) είναι $\alpha = 10$.

Να βρεθεί το άθροισμα $\mu_\alpha^2 + \mu_\beta^2 + \mu_\gamma^2$ Μονάδες 10

Θέμα 2ο

Τρίγωνο ΑΒΓ είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο (Ο, R) και έχει $AB = R\sqrt{2}$. Να βρείτε συναρτήσει του R.

a. Την πλευρά ΒΓ Μονάδες 12

b. Το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ Μονάδες 13

Θέμα 3ο

Σε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ(ΑΒ = ΑΓ) φέρνουμε το ύψος ΒΕ. Να δείξετε ότι:

$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 2BE^2 + 2AE^2 + \Gamma E^2$. Μονάδες 25

Θέμα 4ο

Δύο κύκλοι C_1: (Κ, 8) και C_2: (Λ, 6) τέμνονται στα σημεία Α και Β έτσι ώστε η $\widehat{K A \Lambda} = 90°$.

Αν η διάκεντρος ΚΛ τέμνει τον C_1 στο Δ και το C_2 στο Γ να υπολογίσετε

a. Την ΚΛ Μονάδες 8

b. Την ΚΓ Μονάδες 9

c. Την ΓΔ Μονάδες 8

ΘΕΜΑΤΑ

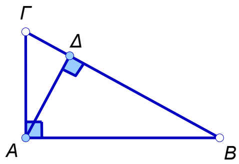
Θέμα 1º

Α. Αν από ένα εξωτερικό σημείο Ρ κύκλου (Ο, R) φέρνουμε το εφαπτόμενο τμήμα ΡΕ και μια ευθεία που τέμνει τον κύκλο στα σημεία Α, Β, τότε να δείξετε ότι: $ΡΕ^2 = ΡΑ \cdot ΡΒ$

Μονάδες 15

Β. Με τη βοήθεια του σχήματος να συμπληρωθούν οι ισότητες:

- $ΑΒ^2 = ΒΓ \cdot$ ....
- $ΑΔ^2 =$ ....
- $\dfrac{ΑΒ^2}{ΑΓ^2} = \dfrac{......}{......}$



Μονάδες 6

Γ. Να συμπληρωθούν οι προτάσεις

- Αν δύο τρίγωνα είναι όμοια ο λόγος των εμβαδών τους ισούται ………..
- Αν μια γωνία ενός τριγώνου είναι ίση με μια γωνία άλλου τριγώνου, ο λόγος των εμβαδών τους είναι ίσος .... Μονάδες 4

Θέμα 2º

Σε κύκλο (Ο, R) θεωρούμε τα διαδοχικά σημεία Α, Β, Γ ώστε $ΑΒ = λ_4$ και $ΒΓ = λ_3$. Να βρείτε την περίμετρο και το εμβαδόν του καμπυλόγραμμου τριγώνου ΑΒΓ ως συνάρτηση του R.

Μονάδες 25

Θέμα 3º

Αν σε τρίγωνο ΑΒΓ είναι $β = 8$, $γ = 6$ και $μ_α = \sqrt{14}$ να υπολογίσετε:

a. Την πλευρά α — Μονάδες 9
b. Την προβολή της διαμέσου $μ_α$ πάνω στην πλευρά α — Μονάδες 8
c. Να εξεταστεί το είδος του τριγώνου ως προς τις γωνίες του. — Μονάδες 8

Θέμα 4º

Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ(ΑΒ // ΓΔ) με ΑΒ = 10, ΒΓ = 7, ΓΔ = 4, ΔΑ = 5. Η παράλληλη από το σημείο Γ προς την ΑΔ τέμνει την ΑΒ στο σημείο Ε. Να βρείτε.

a. Το εμβαδόν του τριγώνου ΓΕΒ. — Μονάδες 8
b. Το εμβαδόν του τραπεζίου ΑΒΓΔ — Μονάδες 9
c. Το εμβαδόν του εγγεγραμμένου κύκλου στο τρίγωνο ΓΕΒ. — Μονάδες 8

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1ο

Α. Σε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A}$ = 90°) φέρνουμε το ΑΔ ύψος προς την υποτείνουσα.

Δείξτε ότι $ΑΔ^2 - ΒΔ \cdot ΔΓ$ Μονάδες 13

Β. Συμπληρώστε τα κενά;

Αν σε τρίγωνο ισχύει

a. $\beta^2 = 3\alpha^2 + \gamma^2$ τότε το τρίγωνο είναι ....στην................. Μονάδες 4

b. $\gamma^2 = \alpha^2 - \beta^2$ τότε το τρίγωνο είναι ....στην .... Μονάδες 4

c. $\alpha^2 - \beta^2 = 2\gamma^2$ τότε το τρίγωνο είναι ....στην.............. Μονάδες 4

Θέμα 2ο

Σε τρίγωνο ΑΒΓ είναι β = 7, γ = 6 και $\mu_\alpha = \frac{7}{2}$ Να υπολογίσετε:

Α. την πλευρά α Μονάδες 12

Β. Την προβολή της διαμέσου μ_α στη ΒΓ. Μονάδες 13

Θέμα 3ο

Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ με πλευρά α = 4cm και σημείο Σ της Α Β τέτοιο ώστε.

Να υπολογισθούν:

Α. Το εμβαδόν του τριγώνου ΔΣΓ. Μονάδες 13

Β. Η απόσταση του Δ από την ΓΣ Μονάδες 12

Θέμα 4ο

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με α =2γ και $\mu_\alpha = \frac{\alpha\sqrt{3}}{2}$.

Α. Να δείξετε ότι $\beta = \gamma\sqrt{7}$ Μονάδες 5

Β. Να βρείτε το είδος του τριγώνου ως προς τις γωνίες του. Μονάδες 5

Γ. Αν το τμήμα ΒΔ είναι ύψος του τριγώνου να δείξετε ότι $ΑΔ = \frac{2\gamma\sqrt{7}}{7}$

Μονάδες 7

Δ. Να υπολογίσετε τον λόγο των εμβαδών: $\frac{(ΑΔΜ)}{(ΑΒΓ)}$ Μονάδες 8

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1ο

Α. Πότε ένα πολύγωνο λέγεται κανονικό; Μονάδες 5

Β. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο φύλλο απαντήσεων τη λέξη ***Σωστό*** ή ***Λάθος*** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

a. Η πλευρά ισοπλεύρου τριγώνου εγγεγραμμένου σε κύκλο ακτίνας R είναι $\lambda_3 = R\sqrt{3}$.

b. Σε κάθε τρίγωνο ισχύει : $\alpha^2 + \gamma^2 = 2\mu_\gamma^2 + \dfrac{\beta^2}{2}$

c. Αν $\widehat{\varphi_\nu}$ είναι μία από τις ίσες γωνίες ενός κανονικού ν-γώνου, τότε $\widehat{\varphi_\nu} = 360^o - \dfrac{180^o}{\nu}$.

Μονάδες 12

Γ. Να γράψετε στην κόλλα απαντήσεων το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση για καθένα από τα ερωτήματα Γ_1 και Γ_2.

Γ_1. Αν το απόστημα κανονικού πολυγώνου εγγεγραμμένου σε κύκλο ακτίνας R είναι $\dfrac{R\sqrt{2}}{2}$, τότε η πλευρά του είναι: Α. $R^2\sqrt{2}$ Β. $R\sqrt{2}$ Γ. 2R Δ. $2R^2$ Ε. $\sqrt{R}$

Γ_2. Αν τα μήκη α, β, γ των πλευρών τριγώνου ΑΒΓ πληρούν τις σχέσεις $\alpha < \beta < \gamma$ και $\gamma^2 < \alpha^2 + \beta^2$ τότε το τρίγωνο είναι: Α. οξυγώνιο Β. ορθογώνιο Γ. αμβλυγώνιο Μονάδες 8

Θέμα 2ο

Σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ είναι ΑΒ = 6, ΒΓ = 12 και ΑΓ = 8.

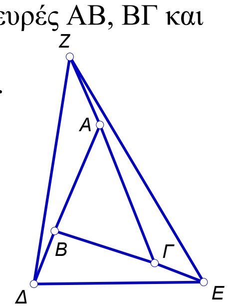
a. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι αμβλυγώνιο. Μονάδες 7

b. Να υπολογίσετε το μήκος της διαμέσου ΑΜ. Μονάδες 9

c. Να υπολογίσετε το μήκος της προβολής της διαμέσου ΑΜ στην πλευρά ΒΓ. Μονάδες 9

Θέμα 3ο

Σε τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = 8, ΑΓ = 10 και $\hat{A} = 30°$, προεκτείνουμε τις πλευρές ΑΒ, ΒΓ και ΓΑ κατά τμήματα $B\Delta = \dfrac{1}{2}AB$, $\Gamma E = \dfrac{1}{2}B\Gamma$ και $AZ = \dfrac{1}{2}\Gamma A$ αντίστοιχα.



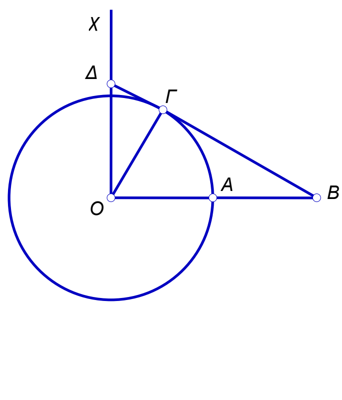
α) Να αποδείξετε ότι (ΑΒΓ) = 20 τ.μ. Μονάδες 7

β) Να αποδείξετε ότι $\dfrac{(B\Delta E)}{(AB\Gamma)} = \dfrac{3}{4}$. Μονάδες 8

γ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου ΔΕΖ. Μονάδες 10

Θέμα 3ο

Δίνεται κύκλος (Ο, R). Προεκτείνουμε την ακτίνα του ΟΑ κατά τμήμα ΑΒ = ΟΑ και από το σημείο Β φέρνουμε εφαπτομένη ΒΓ στον κύκλο. Στο Ο φέρνουμε ημιευθεία Οx κάθετη στην ακτίνα ΟΑ, η οποία τέμνει την ευθεία ΒΓ στο σημείο Δ.



a. Να αποδείξετε ότι $\hat{B} = 30°$. Μονάδες 6

b. Να υπολογίσετε, συναρτήσει του R, το μήκος του τόξου ΑΓ. Μονάδες 7

c. Να υπολογίσετε, συναρτήσει του R, το εμβαδόν του μικτόγραμμου τριγώνου ΑΒΓ. Μονάδες 12

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1ο

Α. Σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ με διάμεσο ΑΜ να αποδείξετε ότι το άθροισμα των τετραγώνων δύο πλευρών του ισούται με το διπλάσιο του τετραγώνου της διαμέσου που περιέχεται μεταξύ των πλευρών αυτών, αυξημένο κατά το μισό του τετραγώνου της τρίτης πλευράς, δηλαδή

$AB^2 + A\Gamma^2 = 2AM^2 + \frac{B\Gamma^2}{2}$ Μονάδες 15

Β. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν , με τη λέξη ***« Σωστό »*** ή ***« Λάθος »*** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

a. Σε κάθε τρίγωνο **ΑΒΓ** ισχύει η ισοδυναμία: $\alpha^2 < \beta^2 + \gamma^2$, αν και μόνο αν $\hat{A} < 90°$.

b. Η Διάμεσος τριγώνου χωρίζει το τρίγωνο σε δύο ισεμβαδικά (ισοδύναμα) τρίγωνα.

c. Το εμβαδόν **Ε** κάθε τριγώνου **ΑΒΓ** δίνεται από τον τύπο $E = \frac{1}{2}\alpha\beta\eta\mu B$

d. Η πλευρά κανονικού εξαγώνου εγγεγραμμένου σε κύκλο **(Ο,R)** είναι ίση με $R\sqrt{2}$

e. Σε κύκλο **(O,R)** το εμβαδόν **Ε** κυκλικού τομέα **μ^o** δίνεται από τον τύπο $E = \frac{\pi R^2 \mu}{180}$

Μονάδες 10

Θέμα 2ο

Τα μήκη των πλευρών ενός τριγώνου ΑΒΓ είναι ΑΒ = 6 , ΒΓ = 12 και ΓΑ = 8

a. Να αποδείξετε ότι το ΑΒΓ είναι αμβλυγώνιο Μονάδες 7

b. Να υπολογιστεί η διάμεσος ΑΜ Μονάδες 9

c. Να υπολογιστεί το μήκος της προβολής της διαμέσου ΑΜ στην ΒΓ

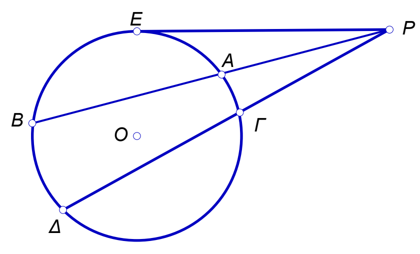
Μονάδες 9

Θέμα 3ο

Στο διπλανό σχήμα το τμήμα ΡΕ είναι εφαπτόμενο του κύκλου και οι ΡΑΒ και ΡΓΔ τέμνουσες αυτού. Αν ΑΒ = 9, ΡΓ = 4 και ΓΔ = 5 τότε :

a. Να υπολογίσετε το ΡΑ Μονάδες 15

b. Να υπολογίσετε το ΡΕ Μονάδες 10



Θέμα 4ο

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = 6, ΑΓ = 8 και $\hat{A} = 60^o$.

Να βρεθούν:

a. Το ύψος υ_β Μονάδες 10

b. Το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ Μονάδες 10

c. Το ύψος υ_α Μονάδες 5

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1ο

Α. Να αποδειχθεί ότι: Το άθροισμα των τετραγώνων δύο πλευρών ενός τριγώνου ισούται με το διπλάσιο του τετραγώνου της διαμέσου που περιέχεται μεταξύ των πλευρών αυτών, αυξημένο κατά το μισό του τετραγώνου της τρίτης πλευράς. Μονάδες 13

Β. Να σημειώσετε το (Σ) ή το (Λ) αν νομίζετε ότι οι παρακάτω προτάσεις είναι σωστές ή λάθος αντίστοιχα

a. Αν οι χορδές ΑΒ, ΓΔ ή οι προεκτάσεις τους τέμνονται σε ένα σημείο Ρ, τότε ισχύει $PA \cdot PB = P\Gamma \cdot P\Delta$ Μονάδες 3

b. Το εμβαδόν ενός ορθογωνίου ισούται με το ημιγινόμενο των πλευρών του Μονάδες 3

c. Το εμβαδόν τριγώνου με πλευρές α, β, γ και ημιπερίμετρο τ είναι

$E = \sqrt{\tau \cdot (\tau - \alpha) \cdot (\tau - \beta) \cdot (\tau - \gamma)}$ Μονάδες 3

d. Η πλευρά τετραγώνου εγγεγραμμένου σε κύκλο (Ο, R) είναι ίση με $R\sqrt{3}$ Μονάδες 3

Θέμα 2ο

Αν μεταξύ των πλευρών α, β, γ ενός τριγώνου ΑΒΓ ισχύει $\gamma = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \sqrt{3}\alpha\beta}$ τότε

a. Να δειχθεί ότι το τρίγωνο είναι αμβλυγώνιο Μονάδες 12

b. Να υπολογισθεί η γωνία Γ Μονάδες 13

Θέμα 3ο

Δίνεται κύκλος (Ο, R) και ένα ισόπλευρο τρίγωνο εγγεγραμμένο σ' αυτόν. Να υπολογίσετε:

a. Το εμβαδόν του ισοπλεύρου τριγώνου Μονάδες 9

b. Το εμβαδόν του κύκλου Μονάδες 8

c. Το εμβαδόν του χωρίου που βρίσκεται ανάμεσα στον κύκλο και στο τρίγωνο

Μονάδες 8

Θέμα 4ο

Στις πλευρές ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ τρίγωνου ΑΒΓ παίρνουμε αντίστοιχα σημεία Δ, Ε, Ζ τέτοια ώστε

$B\Delta = \frac{\alpha}{4}$, $\Gamma E = \frac{\beta}{3}$ και $AZ = \frac{\gamma}{2}$

a. Να αποδειχθεί ότι $(AZE) = \frac{1}{3}(AB\Gamma)$, $(BZ\Delta) = \frac{1}{8}(AB\Gamma)$ και $(\Gamma E\Delta) = \frac{1}{4}(AB\Gamma)$

Μονάδες 12

b. Αν $(AB\Gamma) = 480$τ.μ. να υπολογισθεί το εμβαδόν του τριγώνου ΔΕΖ. Μονάδες 6

c. Αν η περίμετρος του τριγώνου ΔΕΖ είναι 40μ. να υπολογισθεί η ακτίνα του εγγεγραμμένου του κύκλο. Μονάδες 7

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1ο

Α. Σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ με διάμεσο ΑΜ να αποδείξετε ότι το άθροισμα των τετράγωνων δυο πλευρών του ισούται με το διπλάσιο του τετράγωνου της διάμεσου που περιέχεται μεταξύ των πλευρών αυτών, αυξημένο κατά το μισό του τετράγωνου της τρίτης πλευράς, δηλαδή:

$AB^2 + A\Gamma^2 = 2AM^2 + \dfrac{B\Gamma^2}{2}$ Μονάδες 9

Β. Να απαντήσετε στο γραπτό σας με σωστό η λάθος στις παρακάτω προτάσεις:

a. Η γωνία ενός κανονικού πολύγωνου και η κεντρική του γωνία, είναι παραπληρωματικές.

b. Το εμβαδόν ενός τετράγωνου δίνεται από τον τύπο , $\dfrac{\delta^2}{2}$ όπου δ η διαγώνιος του.

c. Η ευθεία που συνδέει τα μέσα των δυο βάσεων τραπεζίου, το διαιρεί σε δυο ισοδύναμα τραπέζια.

d. Σε τρίγωνο ΑΒΓ αν ΒΓ = 5, ΑΓ = 8 και ΑΒ = 4 τότε η γωνία Α είναι αμβλεία.

Μονάδες $4\times4 = 16$

Θέμα 2ο

Οι πλευρές ενός τρίγωνου ΑΒΓ είναι: ΑΒ = 3, ΒΓ = 5, ΑΓ = 7.

a. Να δείξετε ότι η γωνία Β είναι αμβλεία.

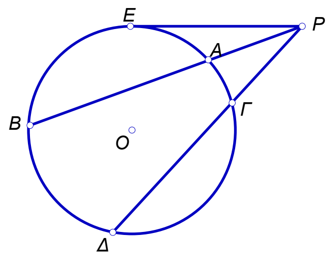
b. Να υπολογίσετε την προβολή ΒΔ της πλευράς ΑΒ πάνω στη ΒΓ.

c. Να υπολογίσετε τη γωνία Β.

d. Να υπολογίσετε τη διάμεσο ΑΜ του τρίγωνου ΑΒΓ

e. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τρίγωνου ΑΒΓ. Μονάδες $5\times5 = 25$

Θέμα 3ο



Στο παρακάτω σχήμα , το τμήμα ΡΕ είναι εφαπτόμενο του κύκλου και οι ΡΒ και ΡΔ τέμνουσες αυτού.

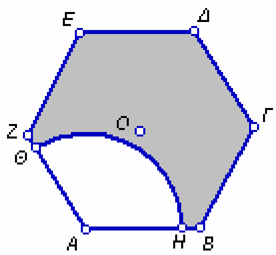
Αν ΑΒ = 9, ΡΓ = 4 και ΓΔ = 5 τότε:

a. Να υπολογίσετε το ΡΑ

b. Να υπολογίσετε το ΡΕ

Μονάδες 15 +10 = 25

Θέμα 4ο



Δίνεται κανονικό εξάγωνο πλευράς 5m. Με κέντρο την κορυφή Α και ακτίνα ίση με την ακτίνα του εγγεγραμμένου στο εξάγωνο κύκλου φέρνω τόξο που τέμνει τις πλευρές ΑΒ και ΖΑ στα Η και Θ αντίστοιχα. Να υπολογίσετε:

a. Την ακτίνα του εγγεγραμμένου στο εξάγωνο κύκλου. Μονάδες 5

b. Το γραμμοσκιασμένο εμβαδόν του μικτόγραμμου ΗΒΓΔΕΖΘ Μονάδες 10

c. Την περίμετρο του μικτόγραμμου ΗΒΓΔΕΖΘ. Μονάδες 10

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1ο

A_1. Να αποδείξετε ότι: Σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ με διάμεσο ΑΜ το άθροισμα των τετραγώνων δύο πλευρών του ισούται με το διπλάσιο του τετραγώνου της διαμέσου που περιέχεται μεταξύ των πλευρών αυτών, αυξημένο κατά το μισό του τετραγώνου της τρίτης πλευράς, δηλαδή

$$AB^2 + A\Gamma^2 = 2AM^2 + \frac{B\Gamma^2}{2}$$ Μονάδες 10

A_2. Σε τρίγωνο ΑΒΓ με $AB < A\Gamma$ να συμπληρώσετε τη σχέση $A\Gamma^2 - AB^2 =$ .... ώστε να εκφράζει το 2ο θεώρημα των διαμέσων Μονάδες 5

Β. Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση για καθένα από τα ερωτήματα Β1 και Β2.

B_1. Σε τρίγωνο ΑΒΓ δίνονται : $\beta = 8$, $\gamma = 6$ και $\mu_\alpha = 5$ Η πλευρά α είναι ίση με:

Α. 7, Β. 4, Γ. 10, Δ. 9 Ε. 11 Μονάδες 5

B_2. Σε τρίγωνο ΑΒΓ με $\alpha = 4$, $\beta = 7$, $\gamma = 5$ το ΑΔ είναι ύψος και η ΑΜ διάμεσος. Η προβολή ΜΔ της διαμέσου ΑΜ πάνω στη πλευρά α είναι ίση με:

Α. 4, Β. 8, Γ. $\frac{8}{3}$, Δ. 5 Ε. 3 Μονάδες 5

Θέμα 2ο

A_1. Να χαρακτηρίσετε προς προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό με τη λέξη ***΄΄Σωστό΄΄*** ή ***΄΄Λάθος΄΄*** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

Α. Το Ρ είναι εξωτερικό σημείο του κύκλου (Ο, R) αν και μόνο αν $\Delta^{P}_{(O,R)} > 0$,

Β. Σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει η ισοδυναμία:

$\alpha^2 < \beta^2 + \gamma^2$, αν και μόνο αν $\hat{A} < 90°$

Γ. Το εμβαδόν Ε κάθε τριγώνου ΑΒΓ δίνεται από τον τύπο $E = \frac{1}{2}\alpha\beta\,\eta\mu B$

Δ. Σε κύκλο (Ο, R) το εμβαδόν Ε κυκλικού τομέα μ° δίνεται από τον τύπο $E = \frac{\pi R^2 \mu}{180}$

Ε. Το 1ο θεώρημα των διαμέσων σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ εκφράζεται από τον τύπο:

$$\beta^2 + \gamma^2 = 2\alpha^2 + \frac{\mu_\alpha^2}{2}$$ Μονάδες 25

Θέμα 3ο

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} = 90°$) με ΑΒ = 6 και ΑΓ = 8. Να βρείτε:

a. Την υποτείνουσα του ΒΓ Μονάδες 5
b. Το εμβαδόν του Μονάδες 5
c. Το ύψος υ_α Μονάδες 5
d. Την ακτίνα ρ του εγγεγραμμένου κύκλου Μονάδες 10

Θέμα 4ο

Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ πλευράς α. Γράφουμε τα τόξα των κύκλων (Α, α) (Β, α) και (Γ, α) που περιέχονται στις γωνίες $\hat{A}$, $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$ αντίστοιχα. Να υπολογίσετε ως συνάρτηση του α

a. Την περίμετρο Μονάδες 10
b. Το εμβαδόν του καμπυλόγραμμου τριγώνου ΑΒΓ. Μονάδες 15

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1ο

Α. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν τραπεζίου ισούται με το γινόμενο του ημιαθροίσματος των βάσεών του επί το ύψους του. Μονάδες 9

Β. Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα της **Γραμμή Α** και δίπλα σε κάθε γράμμα τον αριθμό της **Γραμμής Β**, που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

Γραμμή Α Κανονικό πολύγωνο εγγεγραμμένο σε κύκλο (Ο, R)	α. τετράγωνο β. κανονικό εξάγωνο γ. ισόπλευρο τρίγωνο
Γραμμή Β Πλευρά λ_ν	1. $\frac{R\sqrt{3}}{2}$ 2. $R\sqrt{2}$ 3. $\frac{R\sqrt{2}}{2}$ 4. $R\sqrt{3}$ 5. R

Μονάδες 6

Γ. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιο σας τη λέξη ***Σωστό*** ή ***Λάθος*** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α. Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο το τετράγωνο μιας κάθετης πλευράς του είναι ίσο με το γινόμενο της υποτείνουσας επί την προβολή της πλευράς αυτής στην υποτείνουσα.

β. Σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει η ισοδυναμία: $\alpha^2 < \beta^2 + \gamma^2$, αν και μόνο αν $\hat{A} > 90^o$.

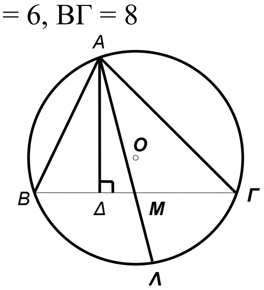
γ. Το εμβαδόν ενός ορθογωνίου ισούται με το γινόμενο των πλευρών του.

δ. Η κεντρική γωνία κανονικού ν-γώνου δίνεται από τον τύπο $\omega_\nu = \frac{\nu}{360}$. Μονάδες 10

ε. Το εμβαδόν κυκλικού τομέα $O\overset{\frown}{AB}$ μ^o και ακτίνας R δίνεται από τον τύπο $\left(O\overset{\frown}{AB}\right) = \frac{\pi R^2 \mu}{360}$

Θέμα 2ο

Σε τρίγωνο ΑΒΓ, η ΑΜ είναι διάμεσος και το ΑΔ ύψος του. Επίσης ΑΒ = 6, ΒΓ = 8 και $A\Gamma = \sqrt{46}$.



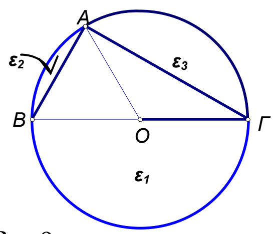
α. Να βρεθεί το μήκος της διαμέσου ΑΜ. Μονάδες 9

β. Να βρεθεί το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος ΔΜ. Μονάδες 8

γ. Αν η προέκταση της ΑΜ τέμνει τον περιγεγραμμένο κύκλο του τριγώνου στο Λ, να βρεθεί το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος ΛΜ. Μονάδες 8

Θέμα 3ο

Σε κύκλο (Ο,R) θεωρούμε διαδοχικά σημεία Α, Β, Γ τέτοια ώστε AB=R , $A\Gamma = R\sqrt{3}$, και ΒΓ=2R .



α. Να δείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο. Μονάδες 3

β. Να βρεθεί το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ. Μονάδες 3

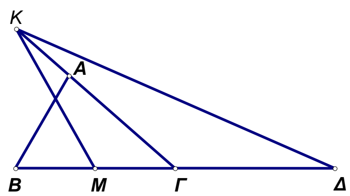
γ. Να δείξετε ότι η γωνία ΑΟΒ είναι 60° Μονάδες 4

δ. Να βρεθούν τα μήκη των τόξων ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ Μονάδες 6

ε. Να βρεθούν τα εμβαδά των κυκλικών τμημάτων ε_1, ε_2 και ε_3. Μονάδες 9

Θέμα 4ο

Σε τρίγωνο ΑΒΓ προεκτείνουμε τις πλευρές ΒΓ και ΓΑ κατά τμήματα ΓΔ = ΒΓ και $AK = \frac{1}{2}\Gamma A$ αντίστοιχα. Αν Μ το μέσο της ΒΓ, να δείξετε ότι α. $\frac{(\Gamma K \Delta)}{(AB\Gamma)} = \frac{3}{2}$. β. $\frac{(\Gamma K M)}{(AB\Gamma)} = \frac{3}{4}$.



Μονάδες 10

γ. Να βρεθούν οι λόγοι $\frac{(\Gamma K \Delta)}{(\Gamma K M)}$ και $\frac{(MK\Delta)}{(AB\Gamma)}$. Μονάδες 15

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1ο

Α. Να αποδείξετε ότι σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ με διάμεσο ΑΜ, το άθροισμα των τετραγώνων δύο πλευρών του ισούται με το διπλάσιο του τετραγώνου της διαμέσου που περιέχεται μεταξύ των πλευρών αυτών, αυξημένο κατά το μισό του τετραγώνου της τρίτης πλευράς,

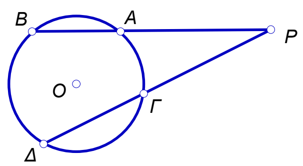
δηλαδή $AB^2 + A\Gamma^2 = 2AM^2 + \dfrac{B\Gamma^2}{2}$ Μονάδες 13

Β. Να χαρακτηρίσετε ως ***σωστό (Σ)*** ή ***λάθος (Λ)*** καθεμιά από τις παρακάτω προτάσεις:

1. Το εμβαδόν τριγώνου ΑΒΓ δίνεται από τον τύπο: $E = \dfrac{\alpha\beta\gamma}{R}$ όπου R η ακτίνα του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου.

2. Αν δυο πολύγωνα είναι όμοια, ο λόγος των εμβαδών τους ισούται με το τετράγωνο του λόγου ομοιότητας τους.

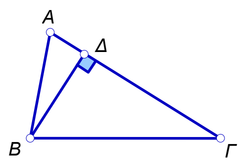
3. Στο διπλανό σχήμα ισχύει:



$PA \cdot PB = P\Gamma \cdot \Gamma\Delta$

4. Αν στο διπλανό σχήμα είναι $B\Delta \perp A\Gamma$,

ισχύει: $B\Gamma^2 = AB + A\Gamma - 2.A\Gamma \cdot A\Delta$



Μονάδες 12

Θέμα 2ο

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $\alpha = 2$, $\beta = 4$, $\gamma = 3$. Να βρεθούν:

a. το είδος του τριγώνου Μονάδες 9

b. η διάμεσος ΜΒ Μονάδες 9

c. η προβολή της διαμέσου ΜΒ στην πλευρά ΑΓ Μονάδες 7

Θέμα 3ο

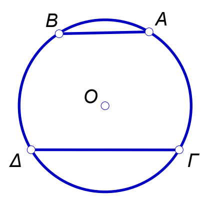
Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{A} = 120°$ και ΑΒ = κ, ΑΓ = 2κ. Με πλευρές τις ΑΒ, ΑΓ και εξωτερικά του τριγώνου κατασκευάζουμε τετράγωνα ΑΒΔΕ, ΑΓΖΗ.

a. Να δείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΕΗ είναι ισεμβαδικά. Μονάδες 12

b. Να βρεθεί το εμβαδόν του εξαγώνου ΒΓΖΗΕΔ Μονάδες 13

Θέμα 4ο

Δίνεται κύκλος (Ο,R) και δυο παράλληλες χορδές, εκατέρωθεν του κέντρου Ο, ΑΒ = R και $\Gamma\Delta = R\sqrt{3}$.



Να υπολογιστούν:

a. Τα μήκη των τόξων ΑΔ, ΒΓ, ΔΓ, ΑΒ, Μονάδες 10

b. Η περίμετρος του τραπεζίου ΑΒΓΔ Μονάδες 7

c. Το εμβαδόν του τραπεζίου ΑΒΓΔ Μονάδες 8

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1^o

Α. Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με ύψη ΑΔ, ΒΕ και διάμεσο ΑΜ και $\beta > \gamma$.

a. Να γραφεί ο τύπος του θεωρήματος της οξείας γωνίας για την πλευρά α.

b. Να γραφούν οι τύποι των δυο θεωρημάτων της διαμέσου για την ΑΜ .

Β. Δίνεται κύκλος (Ο, R).

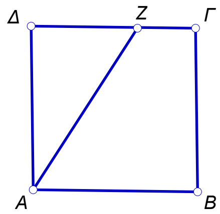
a. Να δοθεί ο ορισμός της δύναμης σημείου Ρ ως προς τον κύκλο (Ο, R).

b. Τι ισχύει όταν το Ρ είναι εσωτερικό σημείο του κύκλου;

Μονάδες 25

Θέμα 2^o

Έστω ΑΒΓΔ τετράγωνο πλευράς ΑΒ = α και Ζ σημείο της ΓΔ. Αν (ΑΒΓΔ) = 3(ΑΔΖ), να υπολογισθεί το ΔΖ συναρτήσει του α.



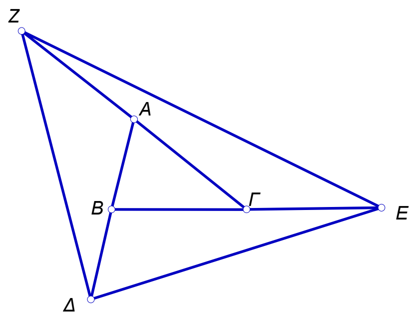
Μονάδες 25

Θέμα 3^o

Σε τρίγωνο ΑΒΓ προεκτείνουμε τις πλευρές του κατά την ίδια φορά και κατά τμήματα ΒΔ = ΑΒ, ΑΖ = ΑΓ, ΓΕ = ΒΓ. Να αποδειχθεί ότι:

a. (ΑΔΖ) = 2(ΑΒΓ)

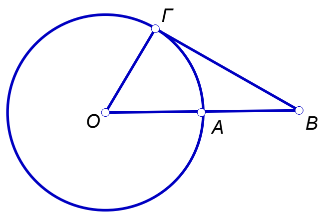
b. (ΔΕΖ) = 7(ΑΒΓ).



Μονάδες 25

Θέμα 4^o

Δίνεται κύκλος (Ο, R) και μια ακτίνα του ΟΑ. Στην προέκταση της ΟΑ παίρνουμε τμήμα ΑΒ = ΟΑ = R και από το Β φέρνουμε την εφαπτόμενη ΒΓ του κύκλου. Να υπολογισθεί το εμβαδόν του μικτόγραμμου σχήματος ΑΒΓ, συναρτήσει του R



Μονάδες 25

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1°

Α. Να κατασκευάσετε τετράγωνο και να υπολογίσετε την πλευρά του λ_4 και το απόστημά του α_4 συναρτήσει της ακτίνας R του περιγεγραμμένου, σ' αυτό, κύκλου. Μονάδες 11

Β. Αντιστοιχίστε κάθε πλευρά κανονικού πολυγώνου της **ΓΡΑΜΜΗΣ Α** με το αντίστοιχο απόστημά του στη **ΓΡΑΜΜΗ Β** .

ΓΡΑΜΜΗ Α Πλευρά λ_ν κανονικού πολυγώνου συναρτήσει του R	**R**, $R\sqrt{3}$, $R\sqrt{2}$	
ΓΡΑΜΜΗ Β Απόστημα α_ν κανονικού πολυγώνου συναρτήσει του R	**R**, $\frac{R\sqrt{3}}{2}$, $\frac{R}{2}$, $\frac{R\sqrt{2}}{2}$, $\frac{R}{3}$	Μονάδες 6

Γ. Να χαρακτηρίσετε ως ***σωστό (Σ)*** ή ***λάθος (Λ)*** καθεμία από τις επόμενες προτάσεις.

a. Το μήκος ℓ ενός τόξου κύκλου ακτίνας R, που αντιστοιχεί σε επίκεντρη γωνία μ°, ισούται με : $\ell = \frac{\pi R \mu^\circ}{360^\circ}$

b. Το 1° θεώρημα διαμέσων σε τρίγωνο ΑΒΓ δίνεται από τον τύπο $\beta^2+\gamma^2 = 2\alpha^2 + \frac{\mu_\alpha^2}{2}$.
όπου α, β, γ οι πλευρές του και μ_α η διάμεσος που αντιστοιχεί στην πλευρά α)

c. Το εμβαδόν Ε κάθε τριγώνου ΑΒΓ δίνεται από τον τύπο $E = \frac{1}{2}\alpha \cdot \beta \cdot \eta\mu B$.

d. Αν δύο τρίγωνα είναι όμοια τότε ο λόγος των εμβαδών τους ισούται με το τετράγωνο του λόγου ομοιότητάς τους.

Μονάδες 8

Θέμα 2°

Αν σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ έχουμε α = 5 ,β = 4 και γ = 2, τότε :

a. Η γωνία ΒΑΓ του τριγώνου είναι
Α. ορθή Β. αμβλεία Γ. οξεία Μονάδες 12.5
Δικαιολογήστε την απάντησή σας

b. Υπολογίστε τη διάμεσο μ_α του τριγώνου ΑΒΓ. Μονάδες 12.5

Θέμα 3°

Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ πλευράς α εγγεγραμμένο σε κύκλο (Ο, R).

Στην πλευρά ΒΓ θεωρούμε το σημείο Ε έτσι ώστε : $E\Gamma = \frac{\alpha}{3}$ και προεκτείνουμε την ΑΕ που τέμνει τον κύκλο στο σημείο Σ.

α)Να αποδείξετε ότι $AE = \frac{\alpha\sqrt{7}}{3}$ Μονάδες 8

β) Να αποδείξετε ότι $E\Sigma = \frac{2\sqrt{7}\alpha}{21}$ Μονάδες 8

γ)Να βρείτε τον λόγο των εμβαδών των τριγώνων $\frac{(AEB)}{(\Gamma E\Sigma)}$ Μονάδες 9

Θέμα 4°

Δίνεται κύκλος (Ο, R) και ακτίνα του ΟΑ. Στην προέκταση του ΟΑ προς το Α παίρνουμε σημείο Β, ώστε ΟΑ = ΑΒ. Αν ΒΓ είναι το εφαπτόμενο τμήμα που άγεται από το Β προς τον κύκλο ,να βρείτε

α) την περίμετρο του μικτόγραμμου τριγώνου ΑΒΓ Μονάδες 12,5

β) το εμβαδόν του μικτόγραμμου τριγώνου ΑΒΓ. Μονάδες 12,5

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1^o

Α. Αν ΑΒΓ ($\hat{A}$ = 90°) ορθογώνιο τρίγωνο και ΑΔ το ύψος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα, τότε:

a. Να αποδείξετε ότι $AB^2 = BΔ \cdot BΓ$ Μονάδες 12

b. Να συμπληρώσετε τις παρακάτω ισότητες ώστε να προκύψουν αληθείς προτάσεις:

$AΓ^2$ = ... $-AB^2$

$AΔ^2 = BΔ\cdot$............. Μονάδες 2 + 2

Β. Να χαρακτηρίσετε ***Σωστό*** ή ***Λάθος*** κάθε μια από τις παρακάτω προτάσεις:

a. Σε τρίγωνο ΑΒΓ το 1^o θεώρημα διαμέσων εκφράζεται από την σχέση $β^2+γ^2=2μ_α^2-\frac{α^2}{2}$

b. Αν $Δ^{P}_{(O,\,R)} > 0$ τότε το σημείο Ρ είναι εξωτερικό σημείο του κύκλου (Ο, R).

c. Δύο ισοδύναμα πολύγωνα είναι πάντοτε και ίσα. Μονάδες 3 + 3 + 3

Θέμα 2^o

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με β = 16cm, γ = 12cm και $μ_α$ = 10cm.

a. Να υπολογίσετε την πλευρά α. Μονάδες:10

b. Να βρείτε το είδος του τριγώνου ως προς τις γωνίες του. Μονάδες 7

c. Να υπολογίσετε:

i. το εμβαδόν του.

ii. Την ακτίνα ρ του εγγεγραμμένου κύκλου. Μονάδες 4 + 4

Θέμα 3^o

Σε κύκλο (Ο, 10cm) εγγράφουμε κανονικό πολύγωνο με πλευρά $λ_ν=10\sqrt{3}$cm .

Να βρείτε:

a. Το πλήθος ν των πλευρών του πολυγώνου και το απόστημά του $α_ν$. Μονάδες:10

b. Την γωνία $φ_ν$ του πολυγώνου. Μονάδες 5

c. Το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τον κύκλο και το πολύγωνο.

Μονάδες 10

Θέμα 4^o

Σε κύκλο (Ο, R) θεωρούμε μία διάμετρό του ΑΒ και ένα σημείο Γ ώστε ΑΓ = R.

Να υπολογίσετε:

a. Την πλευρά ΒΓ του τριγώνου ΑΒΓ. Μονάδες 10

b. Την γωνία ΑΒΓ και τις μοίρες του τόξου ΑΓ Μονάδες 5

c. Την περίμετρο του μεικτόγραμμου τριγώνου ΑΒΓ (που αποτελείται από τις πλευρές ΑΒ και ΒΓ και από το τόξο ΑΓ) Μονάδες 10