



ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

ΤΜΗΜΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

ΕΚΘΕΤΙΚΗ ΟΙΚΟΓΕΝΕΙΑ ΚΑΤΑΝΟΜΩΝ

ΛΕΜΟΝΙΑ ΓΕΩΡ. ΜΠΟΥΤΣΚΟΥ

ΕΡΓΑΣΙΑ

Που υποβλήθηκε στο Τμήμα Στατιστικής
του Οικονομικού Πανεπιστημίου Αθηνών
ως μέρος των απαιτήσεων για την απόκτηση
Μεταπτυχιακού Διπλώματος
Συμπληρωματικής Ειδίκευσης στη Στατιστική
Μερικής Παρακολούθησης (Part-time)

Αθήνα
Οκτώβριος, 2011

ΑΦΙΕΡΩΣΗ

Στον Σταύρο

και στα τρία μου καμάρια: στο Γιάννη, στο Γιώργο και στο Δημήτρη.

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Ευχαριστώ θερμά την καθηγήτρια του Οικονομικού Πανεπιστημίου Αθηνών κ. Αικατερίνη Δημάκη για την καθοριστική βοήθεια που μου παρείχε σε όλη την διάρκεια του μεταπτυχιακού προγράμματος και ιδιαίτερα κατά την διάρκεια εκπόνησης της παρούσας εργασίας ως επιβλέπουσα.

Επίσης πολλά ευχαριστώ στην οικογένειά μου για την υπομονή και την στήριξη που μου παρείχαν τα δύο χρόνια των σπουδών μου.

ΒΙΟΓΡΑΦΙΚΟ ΣΗΜΕΙΩΜΑ

Ονομάζομαι Λεμονιά Γ. Μπούτσκου. Αποφοίτησα από το Λύκειο Αμυνταίου το 1984. Στη συνέχεια φοίτησα στο Μαθηματικό τμήμα της Σχολής Θετικών Επιστημών του Α.Π.Θ. και απέκτησα το πτυχίο το 1988. Από τότε εργάστηκα σε φροντιστήριο μέσης εκπαίδευσης ως το 2005 που διορίστηκα σε Δημόσιο Σχολείο. Το 2009 παρακολούθησα το μεταπτυχιακό πρόγραμμα συμπληρωματικής ειδίκευσης στην Στατιστική. Το πρόγραμμα αυτό ολοκληρώνεται με την εκπόνηση της παρούσας εργασίας.

ABSTRACT

Lemonia Mpoutskou

EXPONENTIAL FAMILY OF DISTRIBUTIONS

October, 2011

The exponential family of distributions includes all these distributions whose probability density function can be written in exponential form. The likelihood functions and the moment generating functions of these distributions can also be written in exponential form. Many well – known distributions belong to the exponential family of distributions, such as normal, exponential, Gamma, Beta, Gaussian, Chi – square, Dirichlet, Bernoulli, binomial, multinomial, Weibull and Poisson. Some of these distributions belong by definition to the exponential family, while some others can be written in exponential form. The first category includes the following distributions that this assignment will examine: exponential, Gamma, Beta, Dirichlet, Liouville, Weibull and Chi – square. From the second category we will examine the following distributions: Gaussian, inverse Gaussian, Bernoulli, Reyleigh, Extreme value, double exponential and Erlang. In addition to that, the exponentiated exponential distribution will be presented, which has some common characteristics with Gamma and Weibull distributions.

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Λεμονιά Μπούτσκου

ΕΚΘΕΤΙΚΗ ΟΙΚΟΓΕΝΕΙΑ ΚΑΤΑΝΟΜΩΝ

Οκτώβριος, 2011

Η εκθετική οικογένεια κατανομών περιλαμβάνει όλες εκείνες τις κατανομές των οποίων η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας μπορεί να γραφεί σε εκθετική μορφή. Σε εκθετική μορφή μπορούν επίσης να γραφούν και οι συναρτήσεις πιθανοφάνειας και οι ροπογεννήτριες αυτών των κατανομών. Πολλές γνωστές κατανομές ανήκουν στην εκθετική οικογένεια κατανομών, όπως η κανονική, η εκθετική, η Γάμμα, η Βήτα, η Gaussian, η Chi – square, η Dirichlet, η Bernoulli, η διωνυμική, η πολυωνυμική, η Weibull και η Poisson. Ορισμένες από αυτές τις κατανομές ανήκουν εξ ορισμού στην εκθετική οικογένεια, ενώ μερικές άλλες μπορούν να γραφούν στην εκθετική μορφή. Στην πρώτη κατηγορία ανήκουν οι εξής κατανομές που θα εξετάσουμε: Εκθετική (exponential), Γάμμα (Gamma), Βήτα (Beta), Dirichlet, Liouville, Weibull και Chi – square. Από τη δεύτερη κατηγορία θα εξετάσουμε τις εξής κατανομές: Gaussian, αντίστροφη Gaussian, Bernoulli, Reyleigh, Extreme value, Διπλή εκθετική και Erlang. Επίσης, παρουσιάζεται και η εκθετικοποιημένη εκθετική κατανομή, η οποία έχει κοινά στοιχεία με τις Γάμμα και Weibull.

ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ

Σελίδα

ΕΙΣΑΓΩΓΗ	1
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1. ΕΚΘΕΤΙΚΗ ΟΙΚΟΓΕΝΕΙΑ ΚΑΤΑΝΟΜΩΝ	3
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2. ΑΝΑΛΥΣΗ ΕΚΘΕΤΙΚΩΝ ΚΑΤΑΝΟΜΩΝ	8
2.1 ΕΚΘΕΤΙΚΗ ΚΑΤΑΝΟΜΗ	8
2.2 GAMMA	17
2.3 BHΤΑ	28
2.4 DIRICHLET	36
2.5 LIOUVILLE	40
2.6 WEIBULL	42
2.7 CHI – SQUARE	51
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3. ΑΝΑΛΥΣΗ ΜΗ ΕΚΘΕΤΙΚΩΝ ΚΑΤΑΝΟΜΩΝ ΠΟΥ ΜΠΟΡΟΥΝ ΝΑ ΛΑΒΟΥΝ ΕΚΘΕΤΙΚΗ ΜΟΡΦΗ.....	57
3.1 GAUSSIAN ΚΑΤΑΝΟΜΗ	57
3.2 ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ GAUSSIAN (INVERSE GAUSSIAN DISTRIBUTION – WALD).....	62
3.3 BERNOULLI	64
3.4 REYLEIGH ΚΑΤΑΝΟΜΗ	67
3.5 ΆΛΛΕΣ ΚΑΤΑΝΟΜΕΣ	69
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4. ΕΚΘΕΤΙΚΟΠΟΙΗΜΕΝΗ ΕΚΘΕΤΙΚΗ ΚΑΤΑΝΟΜΗ....	76
ΕΠΙΛΟΓΟΣ	80
ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ	81

ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΓΡΑΦΗΜΑΤΩΝ

<u>Γράφημα</u>	<u>Σελίδα</u>
Γράφημα 1. Συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της γενικευμένης μορφής και της απλής μορφής της εκθετικής κατανομής	5
Γράφημα 2. Συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της εκθετικής κατανομής ...	8
Γράφημα 3. Αθροιστική συνάρτηση πιθανότητας της εκθετικής κατανομής ...	9
Γράφημα 4. Γραφική απεικόνιση της ιδιότητας της απώλειας μνήμης	11
Γράφημα 5. Συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της Γάμμα κατανομής	15
Γράφημα 6. Διάφορες συναρτήσεις πυκνότητας πιθανότητας της Γάμμα κατανομής	16
Γράφημα 7. Αθροιστική συνάρτηση πιθανότητας της Γάμμα κατανομής	17
Γράφημα 8. Δυναμικές μετατροπές της κατανομής Γάμμα	19
Γράφημα 9. Συνάρτηση κινδύνου της Γάμμα κατανομής	20
Γράφημα 10. Συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της Βήτα κατανομής	25
Γράφημα 11. Αθροιστική συνάρτηση πιθανότητας της Βήτα κατανομής	26
Γράφημα 12. Συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της Weibull κατανομής ..	36
Γράφημα 13. Αθροιστική συνάρτηση της κατανομής Weibull	38
Γράφημα 14. Weibull probability paper	42
Γράφημα 15. Νομόγραμμα της Weibull κατανομής	43
Γράφημα 16. Συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της chi – square κατανομής	44
Γράφημα 17. Αθροιστική συνάρτηση της chi – square κατανομής	45
Γράφημα 18. Συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της Gaussian κατανομής	50

Γράφημα 19. Αθροιστική συνάρτηση πιθανότητας της Gaussian κατανομής.	51
Γράφημα 20. Γραφική απεικόνιση της πολυωνυμικής συνάρτησης.....	52
Γράφημα 21. Συνάρτηση κινδύνου της Gaussian κατανομής	53
Γράφημα 22. Συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της αντίστροφης Gaussian κατανομής	54
Γράφημα 23. Συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της Bernoulli	56
Γράφημα 24. Αθροιστική συνάρτηση πιθανότητας της Bernoulli	56
Γράφημα 25. Συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της Reyleigh κατανομής.	58
Γράφημα 26. Αθροιστική συνάρτηση πιθανότητας της Reyleigh κατανομής.	59
Γράφημα 27. Συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της κατανομής extreme value	60
Γράφημα 28. Αθροιστική συνάρτηση της extreme value κατανομής.....	61
Γράφημα 29. Συνάρτηση κινδύνου της extreme value	62
Γράφημα 30. Συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της διπλής εκθετικής κατανομής	63
Γράφημα 31. Συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της κατανομής Erlang	64
Γράφημα 32. Αθροιστική συνάρτηση της κατανομής Erlang	65
Γράφημα 33. Συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της εκθετικοποιημένης εκθετικής κατανομής.....	67
Γράφημα 34. Συνάρτηση κινδύνου	68

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η παρούσα εργασία πραγματεύεται μερικές από τις κατανομές πιθανότητας που ανήκουν στην εκθετική οικογένεια κατανομών. Η εκθετική οικογένεια κατανομών έχει γενικά την εξής μορφή (Goordazi και Jafarpour, 2009):

$$p(x|\eta) = h(x) \exp(\eta^T t(x) - a(\eta))$$

η οποία εναλλακτικά γράφεται και ως εξής (Goordazi και Jafarpour, 2009):

$$a(\eta) = \log \int h(x) \exp(\eta^T t(x)) dx$$

Μία κατανομή ανήκει στην εκθετική οικογένεια κατανομών όταν η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας που έχει μπορεί να γραφεί σε εκθετική μορφή. Για παράδειγμα, η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της διωνυμικής κατανομής μπορεί να γραφεί ως εξής (Wolpert, 2011):

$$\binom{m}{x} p^x (1-p)^{m-x} = \exp \left[\left(\log \frac{p}{1-p} \right) x - m \log(1-p) \right] \binom{m}{x}$$

Η κατανομή Poisson μπορεί να γραφεί επίσης σε εκθετική μορφή (Wolpert, 2011):

$$\frac{\theta^x}{x!} e^{-\theta} = \exp[(\log \theta)x - \theta] \frac{1}{x!}$$

Άλλα παραδείγματα κατανομών που μπορούν να γραφούν σε εκθετική μορφή είναι τα εξής (<http://www.cs.columbia.edu/~jebara/4771/tutorials/lecture12.pdf>):

Gaussian	$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{- x-\mu ^2/(2\sigma^2)}$
Bernoulli	$p(x) = a^x (1-a)^{1-x}$
Πολυωνυμική	$p(x) = \frac{n!}{x_1! x_2! \dots x_n!} \prod_{i=1}^n a_i^{x_i}$

Μερικές από τις κατανομές που θα εξετάσουμε στην παρούσα εργασία και ανήκουν στην εκθετική οικογένεια κατανομών είναι οι εξής:

1. Εκθετική (exponential)

2. Γάμμα (Gamma)
3. Βήτα (Beta)
4. Dirichlet
5. Weibull
6. Chi – square

Παράλληλα, θα παρουσιάσουμε και ορισμένες ακόμα κατανομές, οι οποίες μπορούν επίσης να λάβουν εκθετική μορφή, αποτελώντας, με αυτόν τον τρόπο, μέλη της εκθετικής οικογένειας κατανομών:

1. Gaussian
2. Αντίστροφη Gaussian
3. Bernoulli
4. Reyleigh
5. Extreme value
6. Διπλή εκθετική
7. Erlang

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1. ΕΚΘΕΤΙΚΗ ΟΙΚΟΓΕΝΕΙΑ ΚΑΤΑΝΟΜΩΝ

Σύμφωνα με τους Clark και Thayer (2004), η οικογένεια εκθετικών κατανομών περιλαμβάνει όλες εκείνες τις συνεχείς, διακριτές ή μικτού τύπου κατανομές, των οποίων η συνάρτηση πιθανότητας ή η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας μπορεί να γραφεί ως εξής στη γενική της μορφή (general form):

$$f(y_i; \theta_i) = \exp[d(\theta_i)e(y_i) + g(\theta_i) + h(y_i)]$$

όπου οι d , e , g και h είναι όλες γνωστές συναρτήσεις και έχουν την ίδια μορφή για όλα τα y_i .

Ο Craig (2009) αναφέρει πως η εκθετική οικογένεια κατανομών είναι μία οικογένεια συναρτήσεων πυκνότητας πιθανότητας για μία τυχαία μεταβλητή X , η οποία έχει την παρακάτω μορφή:

$$p(x|\theta) = f(x)g(\theta)\exp\left\{\sum_{j=1}^k c_j \varphi_j h_j(x)\right\}$$

Σύμφωνα με έναν άλλον ορισμό, μία συνάρτηση πιθανότητας μπορούμε να ισχυριστούμε ότι ανήκει στην εκθετική οικογένεια κατανομών αν ισχύουν τα παρακάτω

(<http://eclass.uoa.gr/modules/document/file.php/MATH262/541.%20%CE%A3%CF%84%CE%B1%CF%84%CE%B9%CF%83%CF%84%CE%B9%CE%BA%CE%AE%20%CE%99/E.O.K.pdf>):

1. Το πεδίο ορισμού $S_f = \{x \in \mathfrak{R} : f(x, \underline{\theta}) > 0\}$ της τυχαίας μεταβλητής X δεν θα πρέπει να εξαρτάται από τις άγνωστες παραμέτρους $(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_s)$
2. Αν μπορεί να γραφεί στην παρακάτω μορφή (α) ή σε κάποια από τις εναλλακτικές που δίνονται παρακάτω (β – δ)

$$\alpha) f(x, \underline{\theta}) = \exp\left\{\sum_{i=1}^s \eta_i(\underline{\theta})T_i(X) - B(\underline{\theta})\right\}h(x)$$

$$\beta) f(x, \underline{\theta}) = \exp\left\{\sum_{i=1}^s \eta_i(\underline{\theta})T_i(X) - B(\underline{\theta}) + H(x)\right\}$$

$$\gamma) f(x, \underline{\theta}) = \exp\left\{\sum_{i=1}^s \eta_i(\underline{\theta})T_i(X)\right\}\beta(\underline{\theta})h(x)$$

$$\delta) f(x, \underline{\theta}) = \exp\left\{\sum_{i=1}^s \eta_i(\underline{\theta})T_i(X) + H(x)\right\}\beta(\underline{\theta})$$

Εκτός από τη γενική μορφή της εκθετικής οικογένειας κατανομών, υπάρχει και κανονική μορφή που δίνεται από τον τύπο:

$$f(x, \underline{\eta}) = \exp\left\{\sum_{i=1}^s \eta_i T_i(X) - A(\underline{\eta})\right\}h(x)$$

Η παραπάνω κανονική μορφή της εκθετικής κατανομής προκύπτει από τη γενική ως εξής

(<http://eclass.uoa.gr/modules/document/file.php/MATH262/541.%20%CE%A3%CF%84%CE%B1%CF%84%CE%B9%CF%83%CF%84%CE%B9%CE%BA%CE%AE%20%CE%99/E.O.K.pdf>):

Στη γενική μορφή θέτουμε: $\eta_i = (\underline{\theta}) = \eta_i$ από την οποία προκύπτει ότι $\theta_i = \theta_i(\underline{\eta})$ και ότι $\underline{\eta} = (\eta_1(\underline{\theta}), \eta_2(\underline{\theta}), \dots, \eta_s(\underline{\theta}))$. Τότε, η $B(\underline{\theta})$ παίρνει τη μορφή $A(\underline{\eta})$ και η συνάρτηση πιθανότητας, ή συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας, της εκθετικής οικογένειας κατανομών έχει την εξής μορφή:

$$f(x, \underline{\eta}) = \exp\left\{\sum_{i=1}^s \eta_i T_i(X) - A(\underline{\eta})\right\} h(x)$$

Το παρακάτω Γράφημα απεικονίζει τη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της γενικευμένης μορφής (συμπαγής γραμμή) και της απλής εκθετικής κατανομής (διακεκομμένη γραμμή) για τις εξής περιπτώσεις αντίστοιχα (Johnson et al., 1994, σελ 556):

1. $\lambda_1=0,1$ και $\lambda_{12} = 0,2$ και $s = 0,5$
2. $\lambda_1=0,1$ και $\lambda_{12} = 0,2$ και $s = \infty$

Γράφημα 1. Συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της γενικευμένης μορφής και της απλής μορφής της εκθετικής κατανομής

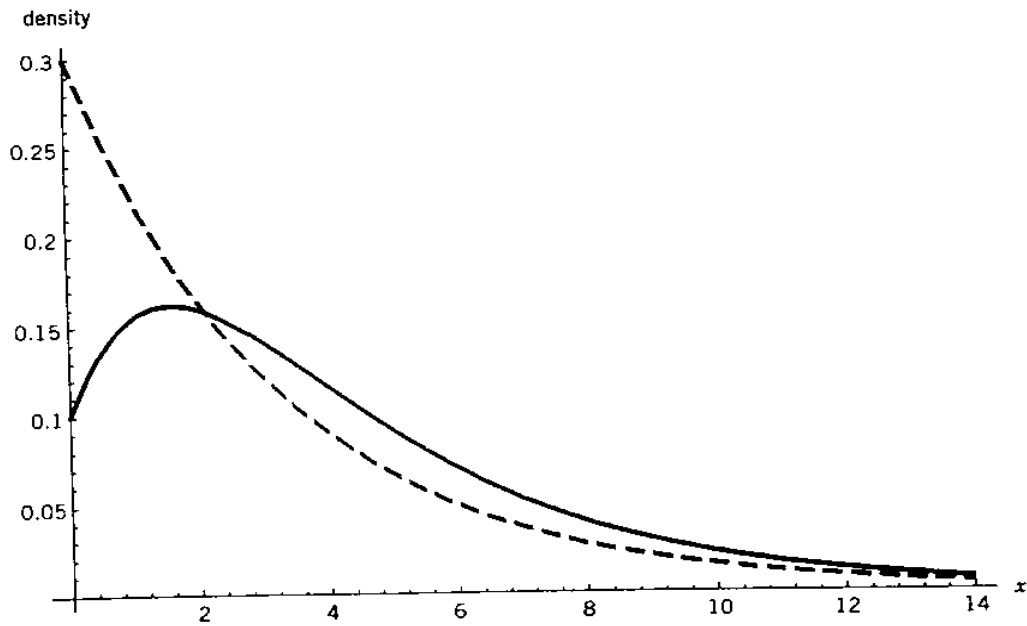


Figure 19.2 Plots of the Generalized Exponential Density in (19.153) and the Exponential Density for the Case $\lambda_1 = 0.1$, $\lambda_{12} = 0.2$ and $s = 0.5$, and $\lambda_1 = 0.1$, $\lambda_{12} = 0.2$ and $s = \infty$, Respectively. The Dashed Line Is the Exponential Density and the Solid Line Is the Generalized Exponential Density.

Πηγή: Johnson et al., 1994, σελ. 556

Η συνάρτηση πιθανοφάνειας για την εκθετική οικογένεια κατανομών έχει την εξής μορφή (Wolpert, 2011):

$$f_n(x|\theta) = \exp[\eta(\theta) \sum_{j=1}^n t(x_j) - nB(\theta)] \prod h(x_i)$$

Για τα μέλη της εκθετικής κατανομής ισχύει η εξής σχέση (Θαλασσίας, 2011, σελ. 12):

$$E\left(\frac{\partial \ln L(\theta)}{\partial \theta}\right) = 0$$

$$E\left(\frac{\partial^2 \ln L(\theta)}{\partial \theta^2}\right) + E\left(\frac{\partial \ln L(\theta)}{\partial \theta}\right)^2 = 0$$

Ως εκ τούτου, έχουμε (Θαλασσίας, 2011, σελ. 12):

$$\mu = E(y) = \frac{db(\theta)}{d(\theta)} = b'(\theta)$$

$$\text{Var}(y) = \frac{d^2 b(\theta)}{d\theta^2} \alpha(\phi) = b''(\theta) \alpha(\phi) = \frac{d\mu}{d\theta} \alpha(\phi)$$

Επίσης, θα πρέπει να σημειώσουμε ότι και οι ροπογεννήτριες των κατανομών που ανήκουν στην εκθετική οικογένεια έχουν εκθετική μορφή, σύμφωνα με την κανονική μορφή που αναφέρθηκε παραπάνω (Wolpert, 2011). Πιο αναλυτικά, εφόσον ισχύει

$$f(x|\eta) = e^{\eta t(x) - A(\eta)} h(x)$$

τότε έχουμε

$$e^{A(\eta)} = \int_x e^{\eta t(x)} h(x) dx$$

Επομένως ισχύει ότι (Wolpert, 2011):

$$\begin{aligned} M_x(s) &= E[e^{st(x)}] \\ &= \int e^{st(x)} e^{\eta t(x) - A(\eta)} h(x) dx \\ &= e^{-A(\eta)} \int_x e^{(\eta+s)t(x)} h(x) dx \\ &= e^{A(\eta+s) - A(\eta)} \end{aligned}$$

Επίσης, αν μία τυχαία μεταβλητή μπορεί να γραφεί σύμφωνα με την κανονική μορφή της εκθετικής οικογένειας κατανομών, τότε ο λογάριθμος της συνάρτησης πιθανοφάνειας είναι της εξής μορφής (http://www.stat.tamu.edu/~suhasini/teaching613/exponential_family.pdf):

$$\mathcal{L}_T(\underline{X}; \theta) = \theta \sum_{t=1}^T X_t - T\kappa(\theta) + T \sum_{t=1}^T c(X_t)$$

Η εκτιμήτρια συνάρτηση πιθανοφάνειας της οικογένειας των εκθετικών κατανομών είναι (http://www.stat.tamu.edu/~suhasini/teaching613/exponential_family.pdf):

$$\hat{\theta}_T = \arg \max_{\theta \in \Theta} \left\{ \theta \sum_{t=1}^T X_t - T\kappa(\theta) + \sum_{t=1}^T c(X_t) \right\}$$

Από την παραπάνω σχέση προκύπτει ότι (http://www.stat.tamu.edu/~suhasini/teaching613/exponential_family.pdf):

$$\hat{\theta}_T = \mu^{-1} \left(\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T X_t \right)$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2. ΑΝΑΛΥΣΗ ΕΚΘΕΤΙΚΩΝ ΚΑΤΑΝΟΜΩΝ

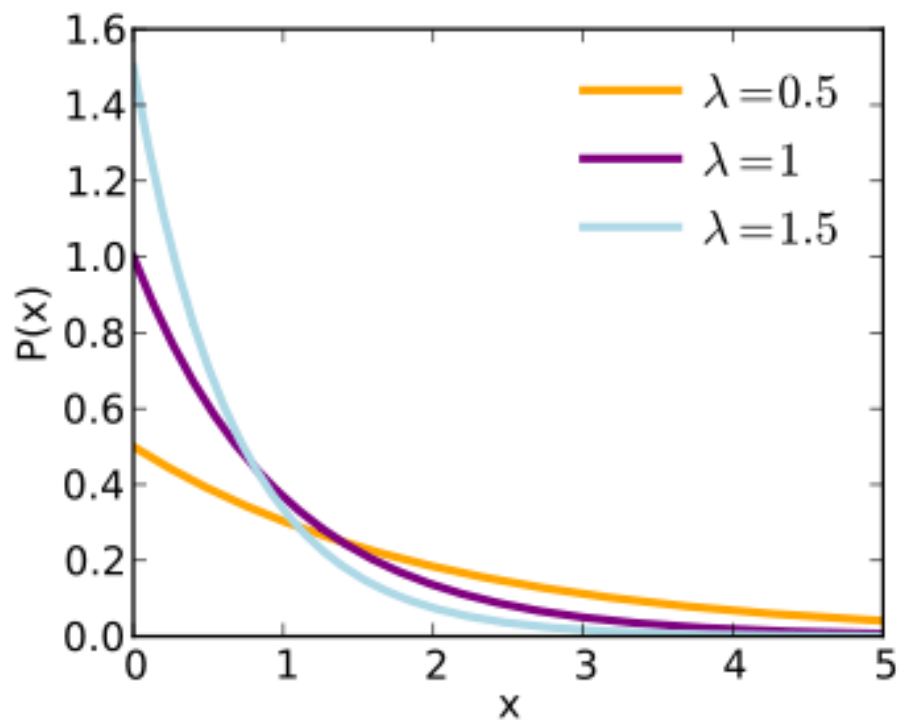
2.1 ΕΚΘΕΤΙΚΗ ΚΑΤΑΝΟΜΗ

2.1.1 Γενικά στοιχεία για την εκθετική κατανομή

Η εκθετική κατανομή έχει συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της μορφής:

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

Γράφημα 2. Συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της εκθετικής κατανομής

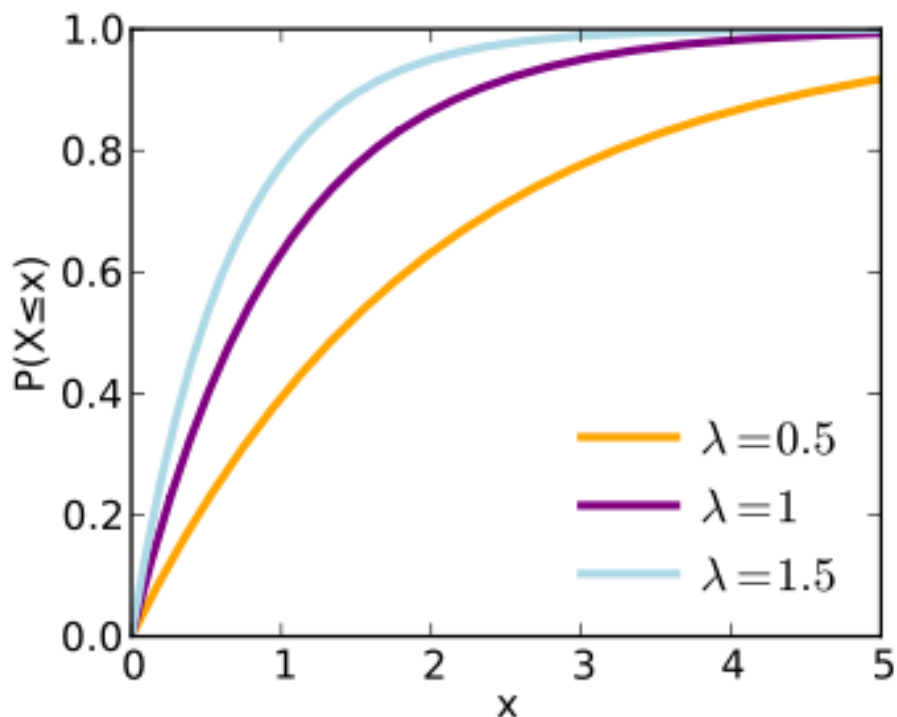


Πηγή: http://en.wikipedia.org/wiki/Exponential_distribution

Η αθροιστική συνάρτηση πιθανότητας έχει τη μορφή:

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(x)dx = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

Γράφημα 3. Αθροιστική συνάρτηση πιθανότητας της εκθετικής κατανομής



Πηγή: http://en.wikipedia.org/wiki/Exponential_distribution

Ο μέσος, η διακύμανση, η κύρτωση, η ασυμμετρία και η ροπογεννήτρια της εκθετικής κατανομής δίνονται στον παρακάτω πίνακα.

Μέσος	$1 / \lambda$
Διακύμανση	$1 / \lambda^2$
Ασυμμετρία	2
Κύρτωση	6
Ροπογεννήτρια	$(1 - \frac{t}{\lambda})^{-1}$

Αναφορικά με την ιδιότητα της εντροπίας, για την εκθετική κατανομή η συνάρτηση αυτή δίνεται από τον ακόλουθο τύπο (Balakrishnan και Nevzorov, 2003, σελ. 162):

$$H(V) = \int_a^{\infty} \frac{1}{\lambda} \exp\left\{-\frac{x-a}{\lambda}\right\} \left(\log \lambda + \frac{x-a}{\lambda}\right) dx = 1 + \log \lambda$$

Η μέγιστη τιμή της συνάρτησης αυτής είναι:

$$p(x) = \frac{1}{C} \exp\left(-\frac{x}{C}\right)$$

υπό τους εξής περιορισμούς:

α) $p(x) > 0$ για $x \geq 0$ και $p(x) = 0$ για $x < 0$

β) $\int_0^{\infty} xp(x)dx = C$ με C μία θετική σταθερά

Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας δύο παραμέτρων της εκθετικής κατανομής δίνεται από τη σχέση (Krishnammorthy, 2006, σελ. 179):

$$F(x, a, b) = 1 - \exp(-(x - a)/b) \Big|_{\text{με } x > a \text{ και } b > 0}$$

2.1.2 Ιδιότητες της εκθετικής κατανομής

Ορισμένες περιπτώσεις όπου η εκθετική κατανομή χρησιμοποιείται είναι για να εκφράσει (www.des.upatras.gr/amm/daskalaki/UsefulDistributions_2006.pdf):

- Το χρόνο αφίξεων διαφορετικών πελατών σε ένα κατάστημα
- Το χρόνο μίας τηλεφωνικής συνομιλίας
- Το χρόνο ζωής των κομματιών μίας ηλεκτρονικής συσκευής

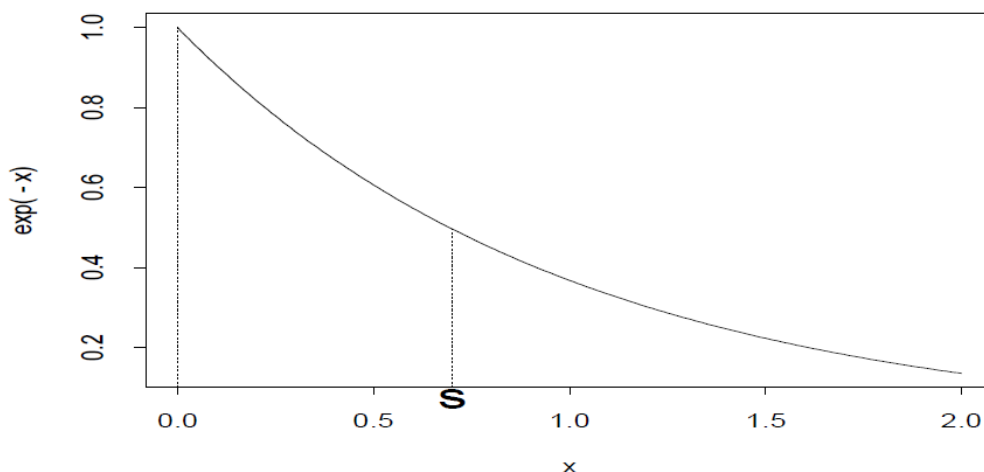
1. Η εκθετική κατανομή είναι η μοναδική συνεχής κατανομή που έχει την ιδιότητα της έλλειψης μνήμης (memoryless), σύμφωνα με την οποία ισχύει

$$P(X > s + t | X > t) = P(X > s)$$

Ακολουθεί η απόδειξη της εν λόγω ιδιότητας.

$$\begin{aligned} P(X > s + t | X > t) &= P(X > s) = \frac{P(X > s + t, X > t)}{P(X > t)} = \\ &= \frac{P(X > s + t)}{P(X > t)} = \\ &= \frac{e^{-\lambda(s+t)}}{e^{-\lambda t}} = \\ &= e^{-\lambda s} = \\ &= P(X > s) \end{aligned}$$

Γράφημα 4. Γραφική απεικόνιση της ιδιότητας της απώλειας μνήμης



Πηγή: www.mast.queensu.ca/~stat455/lecturenotes/set4.pdf

2. Σύμφωνα με μία άλλη ιδιότητα της εκθετικής κατανομής, οι χρόνοι αναμονής μεταξύ δύο διαδοχικών συμβάντων σε μία διαδικασία Poisson είναι εκθετικά κατανομημένοι. Αυτό σημαίνει ότι αν $N(t)$ με $t \geq 0$ είναι μία διαδικασία Poisson με μέσο ρυθμό ν , T_1 είναι ο χρόνος αναμονής μέχρι το πρώτο συμβάν και T_n είναι ο χρόνος αναμονής από το $n - 1$ μέχρι το n -οστό συμβάν όταν $n = 2, 3, \dots$, τότε οι τυχαίες μεταβλητές $T_1, T_2, \dots$ είναι ανεξάρτητες και ισόνομες με κοινή εκθετική κατανομή $E(\nu)$ (www.des.upatras.gr/amm/daskalaki/UsefulDistributions_2006.pdf).

3. Αν $X_1, \dots, X_n$ είναι ανεξάρτητες μεταβλητές που ακολουθούν την εκθετική κατανομή με $\exp(0, b)$, τότε η

$$\sum_{i=1}^n X_i \text{ κατανέμεται σύμφωνα με την Γάμμα } (n, b)$$

4. Μία ακόμη ιδιότητα της εκθετικής κατανομής είναι η εξής. Αν $X_1, \dots, X_n$ είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές με το X_i να έχει μία εκθετική κατανομή (λ_i) , τότε η κατανομή της ελάχιστης $(X_1, \dots, X_n)$ είναι επίσης εκθετική $(\lambda_1 + \dots + \lambda_n)$ με η πιθανότητα ότι η ελάχιστη τιμή θα είναι X_i είναι $\lambda_i / (\lambda_1 + \dots + \lambda_n)$. Η απόδειξη της εν λόγω ιδιότητας έχει ως εξής (www.mast.queensu.ca/~stat455/lecturenotes/set4.pdf):

$$\begin{aligned}
P(\min(X_1, \dots, X_n) > t) &= P(X_1 > t, \dots, X_n > t) \\
&= P(X_1 > t) \dots P(X_n > t) \\
&= e^{-\lambda_1 t} \dots e^{-\lambda_n t} \\
&= e^{-(\lambda_1 + \dots + \lambda_n)t}.
\end{aligned}$$

Η πιθανότητα ότι X_i είναι η ελάχιστη τιμή μπορεί να συμβεί αν υποθέσουμε ότι
www.mast.queensu.ca/~stat455/lecturenotes/set4.pdf:

$$\begin{aligned}
&P(X_i < X_j \text{ για } j \neq i) \\
&= \int_0^\infty P(X_i < X_j \text{ για } j \neq i | X_i = t) \lambda_i e^{-\lambda_i t} dt \\
&= \int_0^\infty P(t < X_j \text{ για } j \neq i) \lambda_i e^{-\lambda_i t} dt \\
&= \int_0^\infty \lambda_i e^{-\lambda_i t} \prod_{j \neq i} P(X_j > t) dt \\
&= \int_0^\infty \lambda_i e^{-\lambda_i t} \prod_{j \neq i} e^{-\lambda_j t} dt \\
&= \lambda_i \int_0^\infty e^{-(\lambda_1 + \dots + \lambda_n)t} dt \\
&= \lambda_i \left. \frac{-e^{-(\lambda_1 + \dots + \lambda_n)t}}{\lambda_1 + \dots + \lambda_n} \right|_0^\infty \\
&= \frac{\lambda_i}{\lambda_1 + \dots + \lambda_n}
\end{aligned}$$

5. Αν $Y \sim E(\lambda)$, τότε η συνάρτηση Laplace $\phi_Y(s) = Ee^{-sY}$ έχει την ακόλουθη μορφή
(Balakrishnan και Nevzorov, 2003, σελ. 159):

$$\phi_Y(s) = \frac{1}{\lambda} \int_0^\infty \exp\left(-\frac{\lambda s x + x}{\lambda}\right) dx = \frac{1}{1 + \lambda s}$$

Αν $V = \alpha + Y$, τότε $V \sim E(\alpha, \lambda)$ και κατά συνέπεια:

$$\phi_V(s) = Ee^{-sV} = e^{-as} Ee^{-sV} = \frac{e^{-as}}{1 + \lambda s}$$

2.1.3 Συνάρτηση πιθανοφάνειας

Η συνάρτηση πιθανοφάνειας για την παράμετρο λ , με δεδομένο ένα ανεξάρτητο καταναεμημένο δείγμα $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ είναι της μορφής (http://en.wikipedia.org/wiki/Exponential_distribution):

$$L(\lambda) = \prod_{i=1}^n \lambda \exp(-\lambda x_i) = \lambda^n \exp\left(-\lambda \sum_{i=1}^n x_i\right) = \lambda^n \exp(-\lambda n\bar{x}),$$

όπου

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

Η παράγωγος του λογαρίθμου της συνάρτησης πιθανοφάνειας είναι (http://en.wikipedia.org/wiki/Exponential_distribution):

$$\frac{d}{d\lambda} \ln L(\lambda) = \frac{d}{d\lambda} (n \ln(\lambda) - \lambda n\bar{x}) = \frac{n}{\lambda} - n\bar{x} \begin{cases} > 0 & \text{if } 0 < \lambda < 1/\bar{x}, \\ = 0 & \text{if } \lambda = 1/\bar{x}, \\ < 0 & \text{if } \lambda > 1/\bar{x}. \end{cases}$$

και άρα η εκτιμήτρια της συνάρτησης μέγιστης πιθανοφάνειας είναι:

$$\hat{\lambda} = \frac{1}{\bar{x}}.$$

2.1.4 Διάστημα εμπιστοσύνης

Το διάστημα εμπιστοσύνης σε $1 - \alpha$ για το b είναι το εξής (Krishnammorthy, 2006, σελ. 181):

$$\left(\frac{2n\hat{b}}{\chi_{2n-2, 1-\alpha/2}^2}, \frac{2n\hat{b}}{\chi_{2n-2, \alpha/2}^2} \right)$$

Επειδή ισχύει

$$\frac{\hat{a} - a}{\hat{b}} \sim \frac{1}{n-1} F_{2,2n-2}$$

τότε το διάστημα εμπιστοσύνης γράφεται και ως εξής:

$$\left(\hat{a} - \frac{\hat{b}}{n-1} F_{2,2n-2,1-\alpha/2}, \hat{a} - \frac{\hat{b}}{n-1} F_{2,2n-2,\alpha/2} \right)$$

2.1.5 Σχέσεις με άλλες κατανομές

1. Αν η μεταβλητή X ακολουθεί την Pareto κατανομή με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

$$\lambda \sigma^\lambda / X^{\lambda+1}, X > \sigma$$

τότε η $Y = \ln(X)$ ακολουθεί την εκθετική κατανομή (α, b) με $\alpha = \ln(\sigma)$ και $b = 1/\lambda$

2. Αν η X μεταβλητή ακολουθεί την γεωμετρική κατανομή με πιθανότητα p , τότε ισχύει

$$P(X \leq k | p) = P(Y \leq k+1)$$

όπου η μεταβλητή Y ακολουθεί την εκθετική κατανομή με μέσο

$$b^* = [-\ln(1-p)]^{-1}$$

2.2 GAMMA

2.2.1 Γενικά στοιχεία της Γάμμα κατανομής

Μία μεταβλητή X είναι μία Gamma μεταβλητή όταν η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας είναι της παρακάτω μορφής:

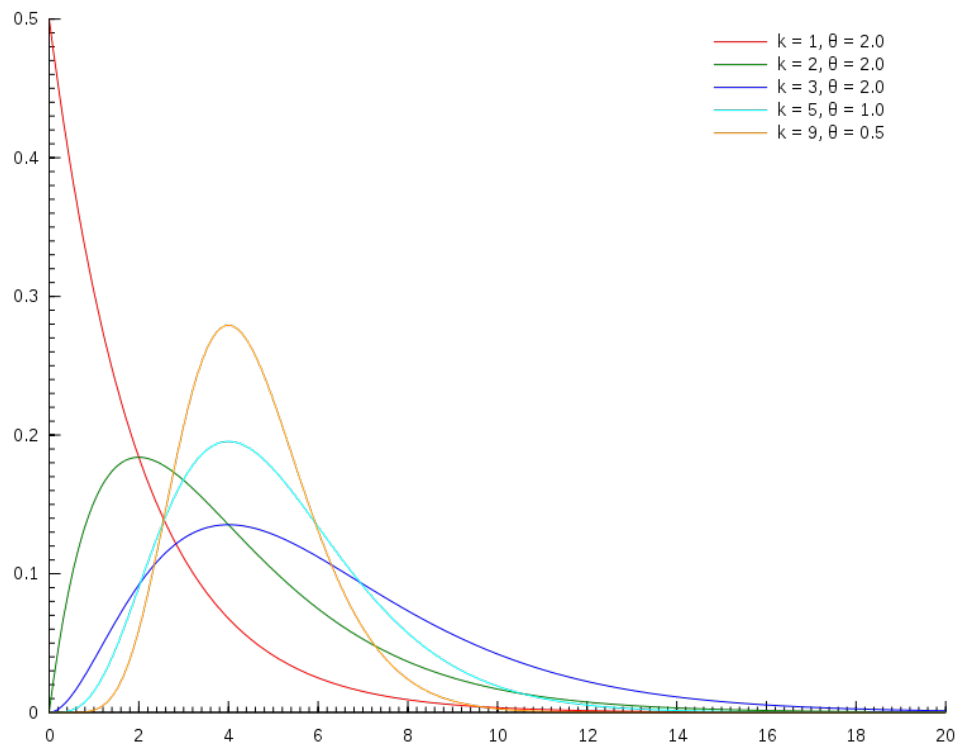
$$f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \lambda e^{-\lambda x} (\lambda x)^{\alpha-1}, \lambda > 0, \alpha > 0$$

όπου $\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} e^{-x} x^{\alpha-1} dx, \alpha > 0$ με

α = παράμετρος μορφής και

β = παράμετρος κλίμακας

Γράφημα 5. Συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της Γάμμα κατανομής



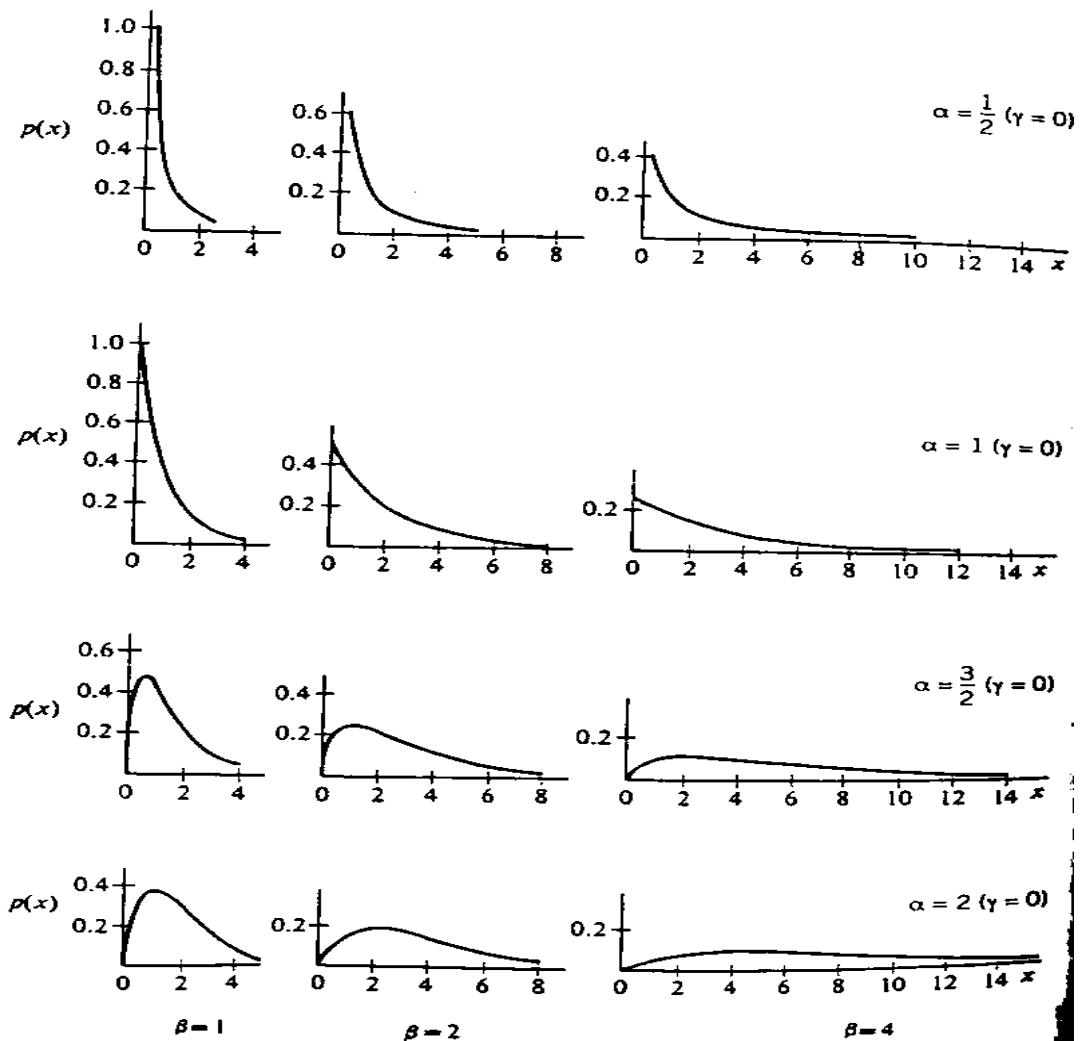
Πηγή: http://en.wikipedia.org/wiki/Gamma_distribution

Όταν $\alpha = 1$, τότε $\Gamma(1) = 1$ και η κατανομή γίνεται εκθετική με $\lambda = 1 / \beta$

Όταν $\alpha > 1$, τότε η κατανομή είναι μονοκόρυφη με κορυφή στο $x = \beta(\alpha-1)$

Όταν α είναι ακέραιος, τότε $\Gamma(\alpha) = (\alpha - 1)!$ και η κατανομή είναι γνωστή ως κατανομή Erlang (www.des.upatras.gr/amm/daskalaki/UsefulDistributions_2006.pdf).

Γράφημα 6. Διάφορες συναρτήσεις πυκνότητας πιθανότητας της Γάμμα κατανομής

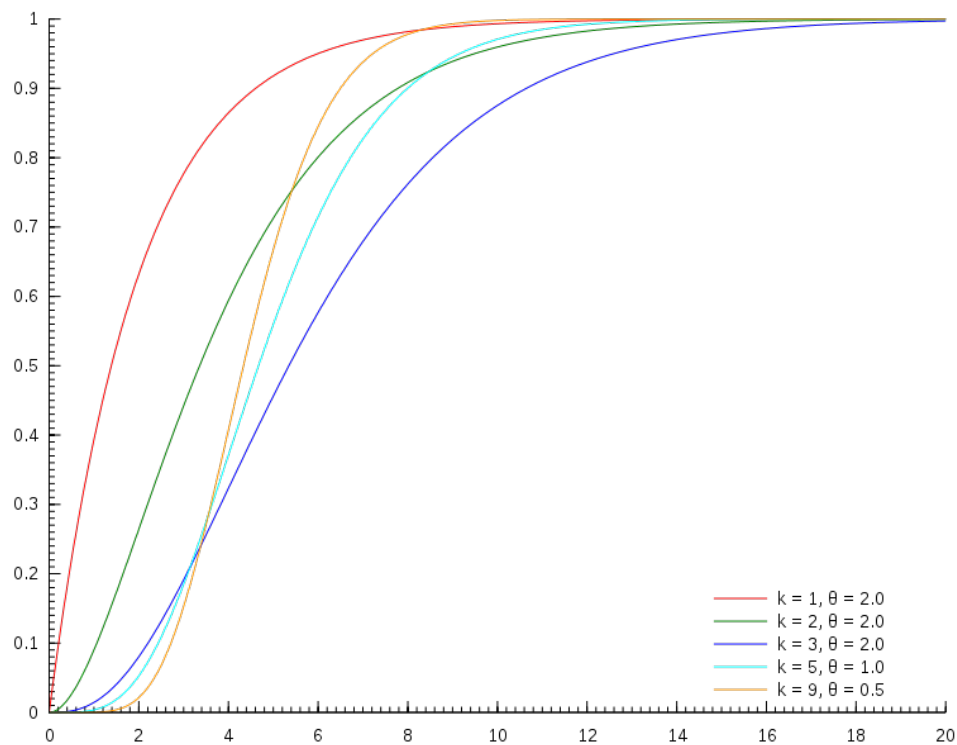


Πηγή: Johnson et al., 1994, σελ. 341

Η αθροιστική συνάρτηση πιθανότητας είναι της μορφής:

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} y^{\alpha-1} e^{-y} dy$$

Γράφημα 7. Αθροιστική συνάρτηση πιθανότητας της Γάμμα κατανομής



Πηγή: http://en.wikipedia.org/wiki/Gamma_distribution

Η αθροιστική συνάρτηση προκύπτει ως εξής. Αν στην αρχική μορφή αντικαταστήσουμε $y=\lambda x$, τότε έχουμε $dy = \lambda dx$ ή ότι $dx = (1/\lambda)dy$ και ότι $x = y/\lambda$ και άρα έχουμε την εξής σχέση (www.mast.queensu.ca/~stat455/lecturenotes/set4.pdf):

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \frac{\lambda^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\lambda x} dx &= \\ &= \int_0^{\infty} \frac{\lambda^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \left(\frac{y}{\lambda}\right)^{\alpha-1} e^{-\lambda y/\lambda} \frac{1}{\lambda} dy \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{\infty} y^{\alpha-1} e^{-y} dy = 1 \end{aligned}$$

Ο μέσος, η διακύμανση, η κύρτωση, η ασυμμετρία και η ροπογεννήτρια της Γάμμα κατανομής δίνονται στον παρακάτω πίνακα.

Μέσος	$\alpha\theta$
Διακύμανση	$\alpha\theta^2$

Ασυμμετρία	$2 / \sqrt{\alpha}$
Κύρτωση	$6 / \alpha$
Ροπογεννήτρια	$(1 - \theta t)^{-\alpha}$ για $t < 1 / \theta$

Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της Γάμμα κατανομής τριών παραμέτρων είναι της μορφής (Krishnammorthy, 2006, σελ. 187):

$$f(x|a,b,c) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)b^a} e^{-(x-c)/b} (x-c)^{a-1} \quad \text{με } \alpha > 0, b > 0, x > c$$

Η συνάρτηση η οποία συνδέει τη Γάμμα κατανομή με την Poisson είναι η εξής (Balakrishnan και Nevzorov, 2003, σελ. 180):

$$\begin{aligned} F_x(x) &= -\frac{1}{\Gamma(n)} x^{n-1} e^{-x} - \dots - \frac{1}{\Gamma(2)} x e^{-x} + \int_0^x e^{-t} dt \\ &= 1 - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{e^{-x} x^i}{i!} \end{aligned}$$

Αν X κατανέμεται σύμφωνα με την Γάμμα(α , 0, 1), τότε η συνάρτηση Laplace $\phi_x(s)$ της μεταβλητής X δίνεται από τον παρακάτω τύπο (Balakrishnan και Nevzorov, 2003, σελ. 181):

$$\begin{aligned} \phi_x(s) &= E e^{-sX} = \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-(1+s)x} dx \\ &= \frac{1}{(1+s)^\alpha} \end{aligned}$$

Δεδομένης της παραπάνω συνάρτησης, η χαρακτηριστική συνάρτηση της Γάμμα κατανομής είναι της μορφής (Balakrishnan και Nevzorov, 2003, σελ. 181):

$$f_x(t) = \phi x(-it) = \frac{1}{(1-it)_a}$$

ή αλλιώς

$$f_Y(t) = Ee^{itY} = \frac{e^{iat}}{(1-i\lambda t)^a}$$

Οι Johnson και Kotz (1972, όπως παρατίθενται στους Johnson et al., 1994, σελ. 389) μελέτησαν δυναμικές μετατροπές των μεταβλητών α και β της κατανομής Γάμμα, οι οποίες οδηγούν στις γενικευμένες Γάμμα κατανομές, κάτι το οποίο απεικονίζεται στο παρακάτω Γράφημα. Όπως μπορούμε να δούμε, οι περιοχές $\sqrt{\beta_1}, \beta_2$ αντιστοιχούν σε κατανομές $[\text{gamma}(\alpha)]^\lambda$.

Γράφημα 8. Δυναμικές μετατροπές της κατανομής Γάμμα

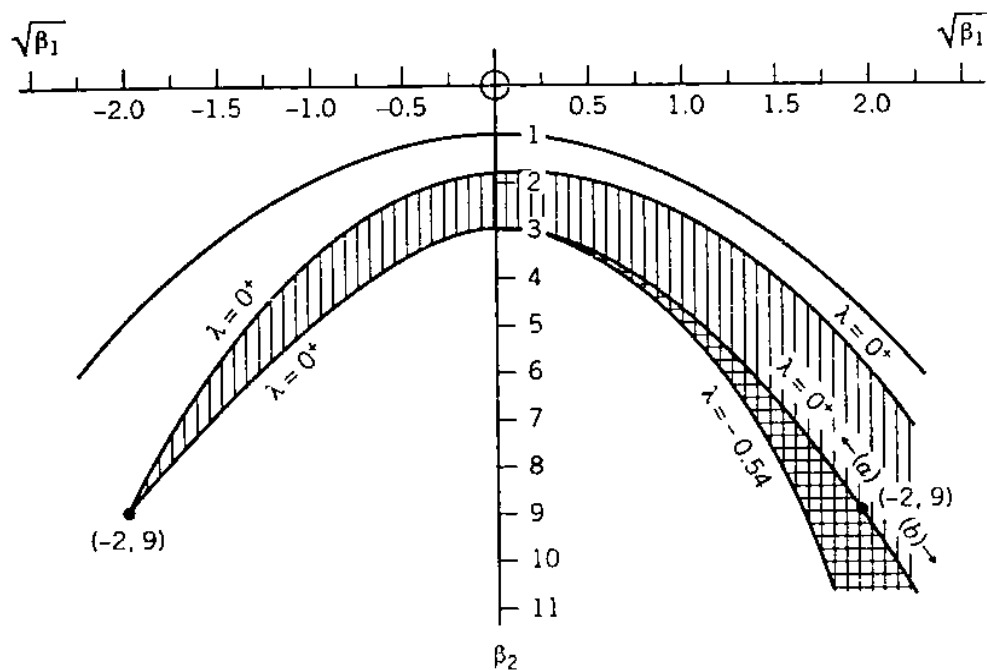
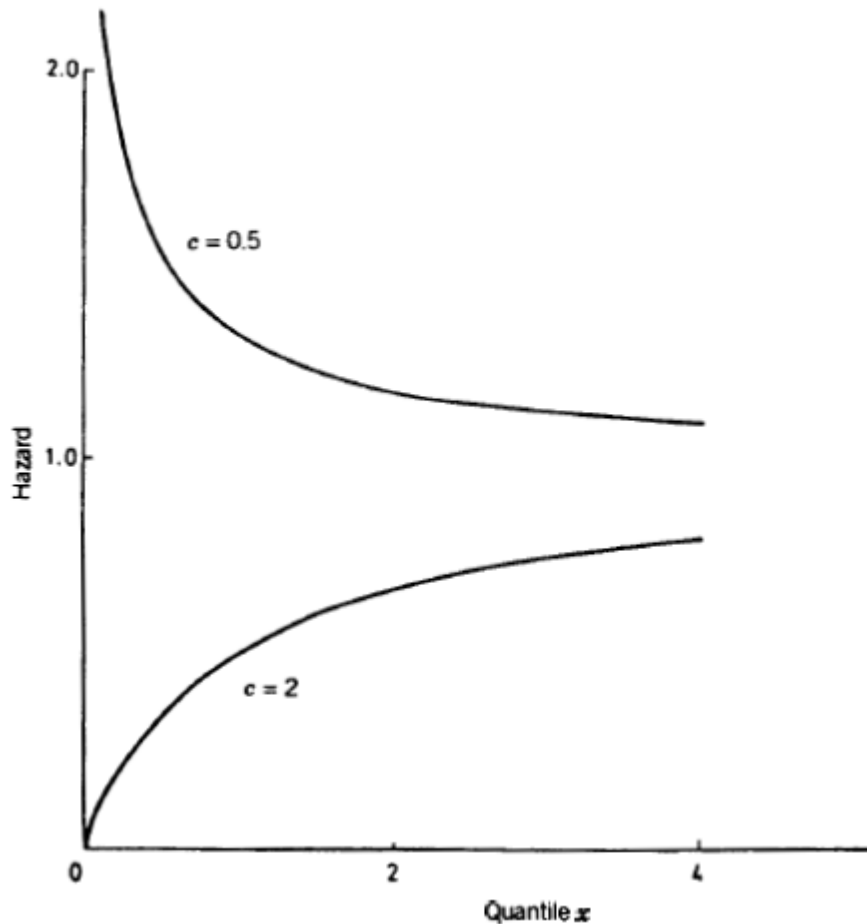


Figure 17.4 Region of Existence of $(\text{Gamma})^\lambda$ Distributions, Shaded; Region Where Two Distributions Exist, Cross-hatched.

Πηγή: Johnson et al., 1994, σελ. 390

Η συνάρτηση κινδύνου της Γάμμα κατανομής απεικονίζεται στο παρακάτω Γράφημα.

Γράφημα 9. Συνάρτηση κινδύνου της Γάμμα κατανομής



Πηγή: Evans et al., 2000, σελ. 102

2.2.2 Ιδιότητες της Γάμμα κατανομής

1. Έστω $N(t)$, $t \geq 0$ είναι μία διαδικασία Poisson ρυθμού ν και W_n είναι ο χρόνος αναμονής μέχρι την εμφάνιση του n - οστού συμβάντος. Τότε, η W_n έχει κατανομή Γάμμα με $\alpha = n$ και $\beta = 1/\nu$ (κατανομή Erlang) και ισχύει η παρακάτω σχέση (www.des.upatras.gr/amm/daskalaki/UsefulDistributions_2006.pdf):

$$f_{w_n}(t) = \begin{cases} \frac{\nu^n}{(n-1)!} t^{n-1} e^{-t\nu}, & t > 0 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

2. Μία ενδιαφέρουσα ιδιότητα της Γάμμα κατανομής είναι η ιδιότητα της αναδρομής (recursive property). Αυτό σημαίνει ότι για $\alpha > 1$ μπορούμε να ξεκινήσουμε να αξιολογήσουμε το ολοκλήρωμα που χαρακτηρίζει την εν λόγω κατανομή, ήτοι ισχύει ότι (www.mast.queensu.ca/~stat455/lecturenotes/set4.pdf):

$$\int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du$$

Έχουμε ότι $u = y^{\alpha-1}$ και $dv = e^{-y} dy$ τα οποία μας δίνουν $du = (\alpha - 1)y^{\alpha-2} dy$ και $v = -e^{-y}$.

Έτσι παίρνουμε την παρακάτω σχέση:

$$\begin{aligned} \Gamma(\alpha) &= \int_0^{\infty} y^{\alpha-1} e^{-y} dy \\ &= -y^{\alpha-1} e^{-y} \Big|_0^{\infty} + (\alpha - 1) \int_0^{\infty} y^{\alpha-2} e^{-y} dy \\ &= 0 + (\alpha - 1) \Gamma(\alpha - 1). \end{aligned}$$

Αν $\alpha = n$ με $n \geq 2$, τότε με την ιδιότητα της αναδρομής έχουμε τη σχέση:

$$\begin{aligned} \Gamma(n) &= (n-1)\Gamma(n-1) = \dots = (n-1)(n-2)\dots(2)(1)\Gamma(1) \\ &= (n-1)!\Gamma(1) \end{aligned}$$

Ωστόσο, ισχύει ότι

$$\Gamma(1) = \int_0^{\infty} e^{-y} dy = -e^{-y} \Big|_0^{\infty} = 1$$

Και για αυτό έχουμε $\Gamma(n) = (n-1)!$ Για $n \geq 2$. Όμως, εφόσον ισχύει $\Gamma(1) = 1 = 0!$ στην ουσία έχουμε $\Gamma(n) = (n-1)!$ για κάθε $n > 0$.

3. Σύμφωνα με μία άλλη ιδιότητα της συγκεκριμένης κατανομής, αν οι $F(x | a, 1)$ και $f(x | a+1, 1)$ υποδηλώνουν την αθροιστική συνάρτηση και τη συνάρτηση πυκνότητας

πιθανότητας της Γάμμα κατανομής αντίστοιχα, μίας μεταβλητής X με παραμέτρους a, b , τότε ισχύει ότι (Krishnammorthy, 2006, σελ. 191):

$$F(xa,1) = F(xa+1,1) + f(x|a+1,1)$$

4. Αν $X_1, \dots, X_k$ είναι ανεξάρτητες και τυχαίες μεταβλητές που ακολουθούν τη Γάμμα κατανομή με την ίδια παράμετρο κλίμακας, αλλά διαφορετική παράμετρο μορφής με $a_1, \dots, a_k$ αντίστοιχα, τότε η

$$\sum_{i=1}^k X_i \text{ κατανέμεται σύμφωνα με την Γάμμα } (\sum_{i=1}^k a_i, b)$$

2.2.3 Συνάρτηση πιθανοφάνειας

Η συνάρτηση πιθανοφάνειας της Γάμμα κατανομής είναι της μορφής (http://en.wikipedia.org/wiki/Gamma_distribution):

$$L(\kappa, \theta) = \prod_{i=1}^N f(x_i; k, \theta)$$

της οποίας η λογαριθμική συνάρτηση είναι:

$$\ell(k, \theta) = (k-1) \sum_{i=1}^N \ln(x_i) - \sum_{i=1}^N x_i/\theta - Nk \ln(\theta) - N \ln \Gamma(k).$$

Η εκτιμήτρια της συνάρτησης πιθανοφάνειας είναι:

$$\hat{\theta} = \frac{1}{kN} \sum_{i=1}^N x_i.$$

Αν αντικαταστήσουμε την εκτιμήτρια στη λογαριθμική συνάρτηση της συνάρτησης πιθανοφάνειας, έχουμε:

$$l = (k-1) \sum_{i=1}^N \ln(x_i) - Nk - Nk \ln\left(\frac{\sum_{i=1}^N x_i}{kN}\right) - N \ln(\Gamma(k))$$

Αν στην τελευταία συνάρτηση βρούμε τη μέγιστη τιμή, θέτοντας την παράγωγο ίση με το 0, τότε έχουμε

$$\ln(k) - \psi(k) = \ln\left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i\right) - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \ln(x_i)$$

όπου

$$\psi(k) = \frac{\Gamma'(\kappa)}{\Gamma(\kappa)}$$

και η οποία ονομάζεται συνάρτηση δίγαμμα.

2.2.4 Διάστημα εμπιστοσύνης

Το διάστημα εμπιστοσύνης $1 - \alpha$ (b_L , b_U) ικανοποιεί τις εξής σχέσεις (Krishnammorthy, 2006, σελ. 190):

$$P(S \leq S_o | b_U) = \alpha / 2$$

και

$$P(S \geq S_o | b_L) = \alpha / 2$$

Επομένως, δίνεται από τον τύπο

$$(b_L, b_U) = \left(\frac{S_o}{\text{gamma}^{-1}(1 - \alpha/2; na, 1)}, \frac{S_o}{\text{gamma}^{-1}(\alpha/2; na, 1)} \right)$$

2.2.5 Σχέσεις με άλλες κατανομές

1. Αν X και Y είναι ανεξάρτητες Γάμμα(n , 1) τυχαίες μεταβλητές, τότε ισχύει

$$\sqrt{n/2} \left(\frac{X - Y}{\sqrt{XY}} \right) \sim t_{2n}$$

2. Αν $\alpha = n/2$ και $b = 2$, τότε η Γάμμα κατανομή γίνεται chi – square κατανομή με $df = n$.

3. Αν $X_1, \dots, X_n$ είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές που ακολουθούν την εκθετική κατανομή με μέσο b , τότε ισχύει ότι η $\sum_{i=1}^n X_i$ κατανέμεται σύμφωνα με την Γάμμα (n , b)

4. Αν X και Y είναι ανεξάρτητες, τυχαίες μεταβλητές Γάμμα (n , 1), τότε η

$\sqrt{n/2}(\frac{X-Y}{\sqrt{XY}})$ κατανέμεται σύμφωνα με την t_{2n}

2.3 ΒΗΤΑ

2.3.1 Γενικά στοιχεία της Βήτα κατανομής

Μία μεταβλητή X είναι μία Βήτα μεταβλητή όταν η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας είναι της παρακάτω μορφής:

$$f(x) = \frac{1}{B(a, \beta)} x^{a-1} (1-x)^{\beta-1}$$

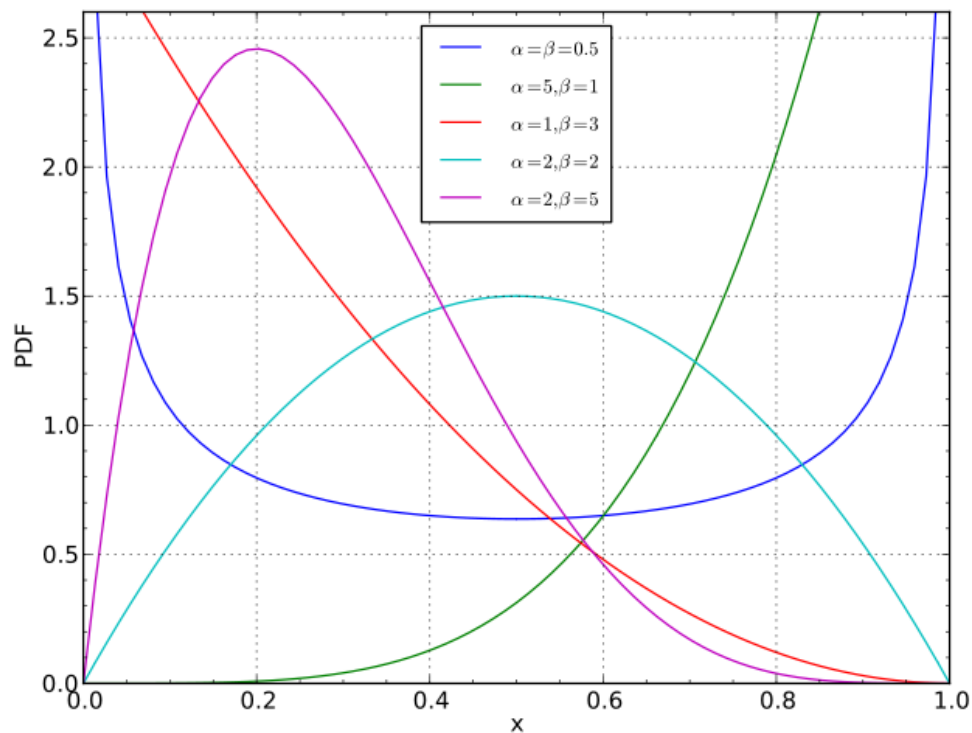
με $a > 0$, $\beta > 0$ και

$$B(a, \beta) = \int_0^1 x^{a-1} (1-x)^{\beta-1} dx$$

Πιο αναλυτικά, ισχύουν τα εξής:

$$\begin{aligned} f(x; a, \beta) &= \frac{x^{a-1} (1-x)^{\beta-1}}{\int_0^1 u^{a-1} (1-u)^{\beta-1} du} = \\ &= \frac{\Gamma(a + \beta)}{\Gamma(a)\Gamma(\beta)} x^{a-1} (1-x)^{\beta-1} \\ &= \frac{1}{B(a, \beta)} x^{a-1} (1-x)^{\beta-1} \end{aligned}$$

Γράφημα 10. Συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της Βήτα κατανομής

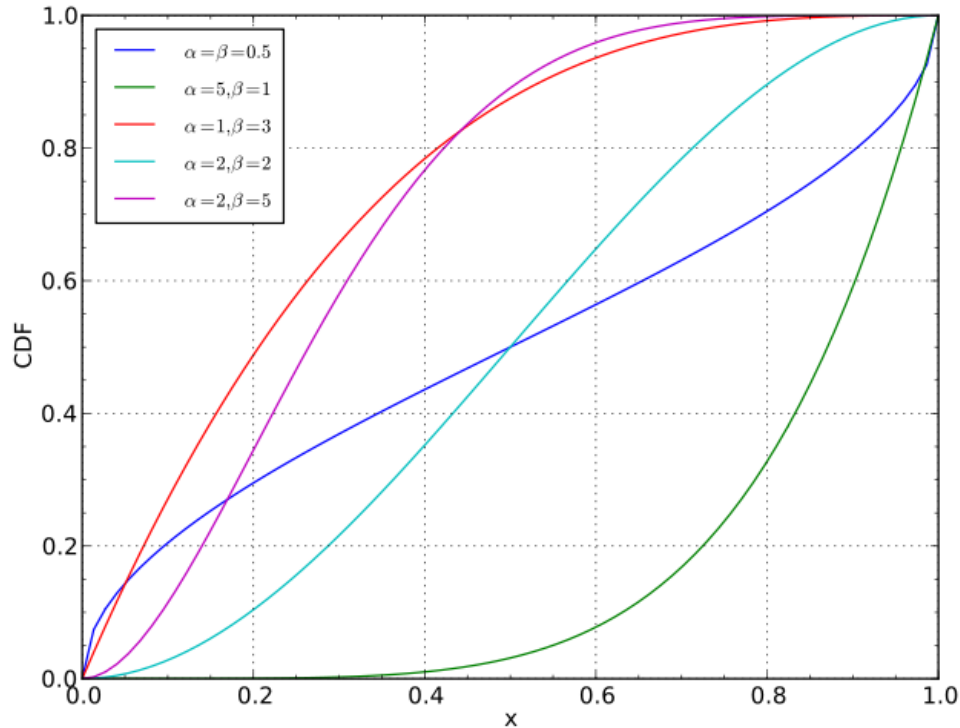


Πηγή: http://en.wikipedia.org/wiki/Beta_distribution

Η αθροιστική συνάρτηση πιθανότητας είναι της παρακάτω μορφής και απεικονίζεται στο Γράφημα που ακολουθεί:

$$F(x; \alpha, \beta) = \frac{B_x(\alpha, \beta)}{B(\alpha, \beta)} = I_x(\alpha, \beta)$$

Γράφημα 11. Αθροιστική συνάρτηση πιθανότητας της Βήτα κατανομής



Πηγή: http://en.wikipedia.org/wiki/Beta_distribution

Ιδιαίτερα χρήσιμη είναι η παρακάτω σχέση, η οποία συνδέει τις συναρτήσεις Βήτα και Γάμμα:

$$B(\alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha + \beta)}$$

Η παραπάνω σχέση μπορεί να γραφεί και στην παρακάτω εκθετική μορφή (Wolpert, 2011):

$$\begin{aligned} \frac{\Gamma(\alpha + \beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1} &= \exp[\alpha \log x - (\log \frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha + \beta)})] \frac{(1-x)^{\beta}}{x(1-x)\Gamma(\beta)} = \\ &= \exp[\beta \log(1-x) - (\log \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha + \beta)})] \frac{x^{\alpha}}{x(1-x)\Gamma(\alpha)} \end{aligned}$$

Ο μέσος, η διακύμανση, η κύρτωση, η ασυμμετρία και η ροπογεννήτρια της Βήτα κατανομής δίνονται στον παρακάτω πίνακα.

Μέσος	$\frac{\alpha}{\alpha + \beta}$
Διακύμανση	$\frac{\alpha\beta}{(\alpha + \beta)^2(\alpha + \beta + 1)}$

Ασυμμετρία	$\frac{2(\beta - \alpha)\sqrt{\alpha + \beta + 1}}{(\alpha + \beta + 2)\sqrt{\alpha\beta}}$
Κύρτωση	$\frac{6[\alpha^3 - \alpha^2(2\beta - 1) + \beta^2(\beta + 1) - 2\alpha\beta(\beta + 2)]}{\alpha\beta(\alpha + \beta + 2)(\alpha + \beta + 3)}$
Ροπογεννήτρια	$1 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\prod_{r=0}^{k-1} \frac{\alpha + r}{\alpha + \beta + r} \right) \frac{t^k}{k!}$

Σύμφωνα με τους Balakrishnan και Nevzorov (2003, σελ. 140), μία τυχαία μεταβλητή X έχει την Βήτα κατανομή, αν έχει συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας που είναι της μορφής:

$$\begin{aligned}
 p_Y(x) &= \frac{1}{h^{p+q-1} B(p, q)} (x-a)^{p-1} (h+a-x)^{q-1} \\
 &= \frac{\Gamma(p+q)}{h^{p+q-1} \Gamma(p) \Gamma(q)} (x-a)^{p-1} (h+a-x)^{q-1}
 \end{aligned}$$

Για την παραπάνω σχέση ισχύει ότι $a < x < a + h$

Μία άλλη έκφραση της Βήτα κατανομής δίνεται από τον εξής τύπο (Evans et al., 1993, σελ. 37):

$$\begin{aligned}
 B(\nu, \omega) &= 2 \int_0^{\pi/2} \sin^{2\nu-1} \theta \cos^{2\omega-1} \theta d\theta \\
 &= \int_0^{\infty} \frac{y^{\omega-1} dy}{(1+y)^{\nu-\nu}}
 \end{aligned}$$

2.3.2 Εκτιμήτριες της Βήτα κατανομής

Αν υποθέσουμε ότι ο μέσος και η διακύμανση του δείγματος είναι

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i$$

$$v = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2$$

Τότε οι εκτιμήτριες της Βήτα κατανομής είναι οι εξής:

$$\hat{\alpha} = \bar{x} \left(\frac{\bar{x}(1 - \bar{x})}{v} - 1 \right),$$

$$\hat{\beta} = (1 - \bar{x}) \left(\frac{\bar{x}(1 - \bar{x})}{v} - 1 \right).$$

(http://en.wikipedia.org/wiki/Beta_distribution)

Επίσης, αν $X \sim \text{Βήτα}(p, q)$, τότε η χαρακτηριστική της συνάρτηση είναι της μορφής (Balakrishnan και Nevzorov, 2003, σελ. 147):

$$f_x(t) = Ee^{itX} = \frac{1}{B(p, q)} \int_0^1 e^{itx} x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx$$

Ο Krysicki (1999, όπως παρατίθεται στους Balakrishnan και Nevzorov, 2003, σελ. 148) επισημαίνει ότι αν $X \sim \text{Βήτα}(p, q)$, τότε για $n = 2, 3, \dots$ Η μεταβλητή μπορεί να γραφεί στη μορφή

$$X \stackrel{d}{=} \left(\prod_{k=1}^n X_k \right)^{1/n}$$

όπου η X_k κατανέμεται σύμφωνα με την beta $(\frac{p+k-1}{n}, \frac{q}{n})$

Ακόμα, οι Johnson και Kotz (1990, όπως παρατίθεται στους Balakrishnan και Nevzorov, 2003, σελ. 148) έδειξαν ότι αν οι τυχαίες μεταβλητές X_0 και X_1 έχουν κοινή beta(p, q) κατανομή, τότε και η μεταβλητή

$$X \stackrel{d}{=} \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \prod_{i=0}^j X_j$$

έχει κατανομή beta(p, p+q).

Ενδιαφέρουσες είναι και οι σχέσεις που παρουσιάζει η Βήτα κατανομή με άλλες κατανομές. Για παράδειγμα, αν η τυχαία μεταβλητή V ακολουθεί τη διωνυμική $B(n,$

p) κατανομή και η τυχαία μεταβλητή X ακολουθεί τη Βήτα κατανομή $\text{beta}(m, n - m + 1)$, με $m \leq n$ και $0 < p < 1$, τότε (Balakrishnan και Nevzorov, 2003, σελ. 149):

$$P\{V \geq m\} = P\{X < p\}$$

Η χαρακτηριστική συνάρτηση της Βήτα κατανομής έχει την εξής μορφή (Krishnammorthy, 2006, σελ. 197):

$$\frac{\Gamma(\alpha + b)}{\Gamma(\alpha)} \sum_{\kappa=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha + \kappa)(it)^{\kappa}}{\Gamma(\alpha + \beta + \kappa)\Gamma(\kappa + 1)}$$

2.3.3 Ιδιότητες της Βήτα κατανομής

Αν $F(x | a, b)$ υποδηλώνει την αθροιστική συνάρτηση της Βήτα(a, b) που σημαίνει ότι $F(x | a, b) = P(X \leq x | a, b)$, τότε ισχύουν οι ακόλουθες σχέσεις (Krishnammorthy, 2006, σελ. 201):

- a. $F(x|a, b) = 1 - F(1 - x|b, a)$.
- b. $F(x|a, b) = xF(x|a - 1, b) + (1 - x)F(x|a, b - 1)$, $a > 1, b > 1$.
- c. $F(x|a, b) = [F(x|a + 1, b) - (1 - x)F(x|a + 1, b - 1)]/x$, $b > 1$.
- d. $F(x|a, b) = [aF(x|a + 1, b) + bF(x|a, b + 1)]/(a + b)$.
- e. $F(x|a, b) = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a+1)\Gamma(b)}x^a(1-x)^{b-1} + F(x|a + 1, b - 1)$, $b > 1$.
- f. $F(x|a, b) = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a+1)\Gamma(b)}x^a(1-x)^b + F(x|a + 1, b)$.
- g. $F(x|a, a) = \frac{1}{2}F(1 - 4(x - 0.5)^2|a, 0.5)$, $x \leq 0.5$.

2.3.4 Σχέσεις με άλλες κατανομές

1. Αν X και Y είναι τυχαίες ανεξάρτητες μεταβλητές που ακολουθούν την chi - square κατανομή, τότε η $\frac{X}{X + Y}$ κατανέμεται σύμφωνα με την beta ($m/2, n/2$).

2. Αν η t είναι μία τυχαία μεταβλητή που ακολουθεί την κατανομή student - t με $df = n$, τότε

$$P(|t| \leq x) = P(Y \leq x^2 / (n + x^2))$$

για κάθε $x > 0$ και με την Y να ακολουθεί την Βήτα($1/2, n/2$).

3. Όταν $\alpha = 1$ και $b = 1$, τότε η Βήτα(α, b) μετατρέπεται σε ομοιόμορφη κατανομή (0, 1)

4. Αν η μεταβλητή X ακολουθεί τη Βήτα($m/2, n/2$) τυχαία μεταβλητή, τότε η $\frac{nX}{m(1-X)}$ κατανέμεται σύμφωνα με την $F_{m,n}$

5. Αν η X τυχαία μεταβλητή ακολουθεί τη διωνυμική κατανομή με (n, p) , τότε για ένα δεδομένο k ισχύει ότι

$$P(X \geq k | n, p) = P(Y \leq p)$$

όπου η Y είναι μεταβλητή που ακολουθεί την Βήτα($k, n - k + 1$), ενώ παράλληλα

$$P(X \geq k | n, p) = P(W \geq p)$$

όπου η W είναι μεταβλητή που ακολουθεί την Βήτα($k + 1, n - k$).

6. Αν η τυχαία μεταβλητή X ακολουθεί την αρνητική διωνυμική κατανομή (r, p) , τότε

$$P(X \leq k | r, p) = P(W \leq p)$$

όπου η W είναι μία Βήτα τυχαία μεταβλητή με παραμέτρους r και $k+1$.

7. Αν οι X και Y είναι ανεξάρτητες Γάμμα μεταβλητές με την ίδια παράμετρο κλίμακας, b , αλλά διαφορετικές παραμέτρους μορφής, a , τότε η $\frac{X}{X+Y}$ κατανέμεται σύμφωνα με την $\text{beta}(a_1, a_2)$.

2.4 DIRICHLET

2.4.1 Γενικά στοιχεία της Dirichlet κατανομής

Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της Dirichlet κατανομής είναι της μορφής:

$$f(x_1, \dots, x_{k-1}; a_1, \dots, a_k) = \frac{1}{B(a)} \prod_{i=1}^K x_i^{a_i-1}$$

Ως μέλος της οικογένειας εκθετικών κατανομών, η Dirichlet μπορεί να γραφεί και στην εξής μορφή (http://johnwinn.org/Publications/thesis/Winn03_appendices.pdf):

$$Dir(p_1, \dots, p_k | bf_u) = \exp\left(\begin{bmatrix} u_1 - 1 \\ \dots \\ u_k - 1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \log p_1 \\ \dots \\ \log p_k \end{bmatrix} + \log \Gamma(U) - \sum_{i=1}^k \Gamma(u_i)\right)$$

Ο μέσος, η διακύμανση, η κύρτωση, η ασυμμετρία και η ροπογεννήτρια της Dirichlet κατανομής δίνονται στον παρακάτω πίνακα.

Μέσος	$\frac{a_i}{a_0}$
Διακύμανση	$\frac{a_i(a_0 - a_i)}{a_0^2(a_0 + 1)} = \frac{E(X_i)[1 - E(X_i)]}{(a_0 + 1)}$

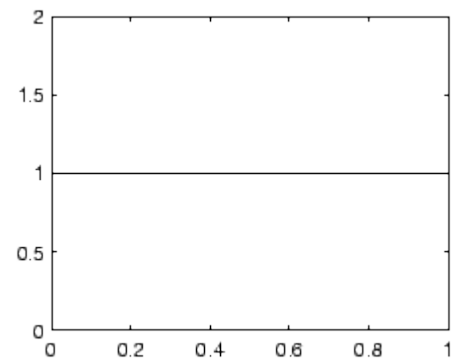
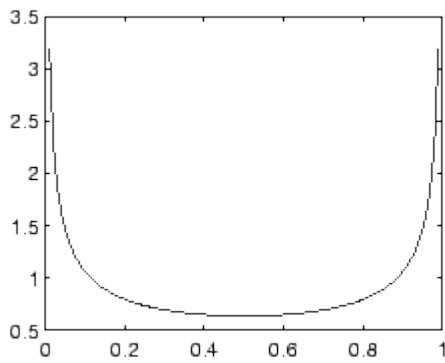
Η γενικευμένη μορφή της κατανομής Dirichlet έχει συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας που είναι της μορφής:

$$\left[\prod_{i=1}^{k-1} B(a_1, b_i)\right]^{-1} p_k^{b_{k-1}-1} \prod_{i=1}^{k-1} [p_i^{a_i-1} (\sum_{j=1}^k p_j)^{b_{i-1}-(a_1+b_i)}]$$

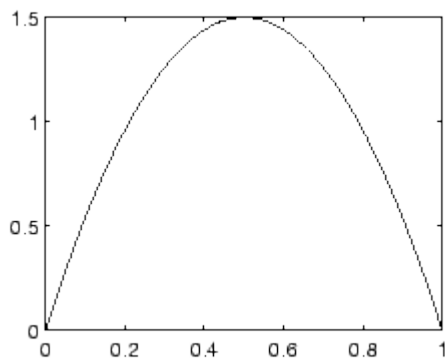
Όταν $a_i > 0$ τότε η κατανομή γίνεται non informative. Αυτό σημαίνει ότι όλα τα p_i είναι τα ίδια αν όλα τα a_i κλιμακώνονται με την ίδια πολλαπλασιαστική σταθερά. Οι διακυμάνσεις, ωστόσο, γίνονται μικρότερες καθώς οι παράμετροι a_i μεγαλώνουν. Σε αυτήν την περίπτωση, οι συναρτήσεις πυκνότητας πιθανότητας με συγκεκριμένες τιμές απεικονίζονται στα παρακάτω διαγράμματα.

$\alpha = 0,5$

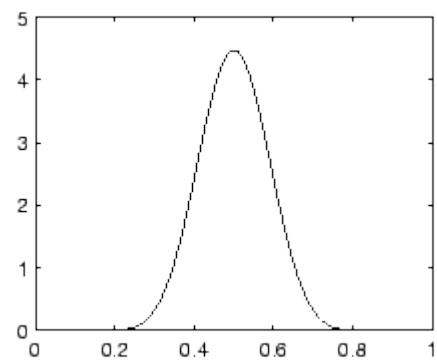
$\alpha = 1$



$\alpha = 2$



$\alpha = 16$



Πηγή: <http://users.ics.tkk.fi/ahonkela/dippa/node95.html>

Η κατανομή Dirichlet είναι μία γενικευμένη μορφή της κατανομής Βήτα και για πολλές μεταβλητές δηλώνει ότι οι πιθανότητες των N ενδεχομένων είναι x_i με δεδομένο ότι κάθε ενδεχόμενο έχει παρατηρηθεί ακριβώς $\alpha_i - 1$ φορές.

Είδαμε παραπάνω ότι από την Βήτα κατανομή με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

$$p_x(x) = \frac{\Gamma(\alpha + b)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(b)} x^{\alpha-1} (1-x)^{b-1} \quad \text{με } 0 < x < 1 \text{ και } \alpha, b > 0$$

μπορούμε να λάβουμε τη Βήτα κατανομή δευτέρου είδους, αν $Y = X / (1-X)$, οπότε και έχουμε

$$p_Y(y) = \frac{\Gamma(\alpha + b)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(b)} \cdot \frac{y^{\alpha-1}}{(1+y)^{\alpha+b}} \quad \text{με } y > 0 \text{ και } \alpha, b > 0$$

Ομοίως και στην περίπτωση της Dirichlet κατανομής μπορούμε να λάβουμε την Dirichlet κατανομή δευτέρου είδους. Έτσι, αν $X \sim D_n(\alpha_1, \dots, \alpha_{n+1})$ με $\alpha_k > 0$ ($k = 1, n+1$) και θέσουμε

$$Y_1 = \frac{X_1}{1 - X_1 - \dots - X_n}, \dots, Y_n = \frac{X_n}{1 - X_1 - \dots - X_n}$$

ή αλλιώς

$$X_1 = \frac{Y_1}{1 + Y_1 + \dots + Y_n}, \dots, X_n = \frac{Y_n}{1 + Y_1 + \dots + Y_n}$$

τότε, η εξής συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

$$p_{x_1, \dots, x_n}(x_1, \dots, x_n) = \frac{\Gamma(\alpha_1 + \dots + \alpha_{n+1})}{\Gamma(\alpha_1) \dots \Gamma(\alpha_{n+1})} x_1^{\alpha_1-1} \dots x_n^{\alpha_n-1} (1 - \sum_{i=1}^n x_i)^{\alpha_{n+1}-1}$$

με $0 \leq x_1, \dots, x_n \leq 1$ και $0 \leq \sum_{i=1}^n x_i \leq 1$

γίνεται ως εξής (Balakrishnan και Nevzorov, 2003, σελ. 275):

$$p_{y_1, \dots, y_n}(y_1, \dots, y_n) = \frac{\Gamma(\alpha_1 + \dots + \alpha_{n+1})}{\Gamma(\alpha_1) \dots \Gamma(\alpha_{n+1})} \cdot \frac{y_1^{\alpha_1-1} \dots y_n^{\alpha_n-1}}{(1 + y_1 + \dots + y_n)^{\alpha_1 + \dots + \alpha_{n+1}}}$$

με $y_1, \dots, y_n > 0$ και $\alpha_1, \dots, \alpha_{n+1} > 0$

2.5 LIOUVILLE

Η κατανομή Liouville είναι μία γενικευμένη μορφή της κατανομής Dirichlet, θέτοντας ότι (Balakrishnan και Nevzorov, 2003, σελ. 276):

$$\begin{aligned} & \int_{X_1+\dots+X_n < h} \dots \int f(x_1 + \dots + x_n) x_1^{a_1-1} \dots x_n^{a_n-1} dx_1 \dots dx_n \\ &= \frac{\Gamma(\alpha_1) \dots \Gamma(\alpha_n)}{\Gamma(\alpha_1 + \dots + \alpha_n)} \int_0^h f(t) t^{a_1+\dots+a_n-1} dt \end{aligned}$$

Πράγματι, αν θέσουμε $h = 1$ και $f(t) = (1-t)^{a_{n+1}-1}$, τότε η παραπάνω συνάρτηση παίρνει τη γενική μορφή της Dirichlet:

$$\begin{aligned} & \int_{A_n} \dots \int x_1^{a_1-1} \dots x_n^{a_n-1} \left(1 - \sum_{i=1}^n x_i\right)^{a_{n+1}-1} dx_1 \dots dx_n \\ &= \frac{\Gamma(a_1) \dots \Gamma(a_{n+1})}{\Gamma(a_1 + \dots + a_{n+1})} \end{aligned}$$

Αν $h \rightarrow \infty$ τότε έχουμε τη γενική μορφή Liouville

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty \dots \int_0^\infty f(x_1 + \dots + x_n) x_1^{a_1-1} \dots x_n^{a_n-1} dx_1 \dots dx_n \\ &= \frac{\Gamma(\alpha_1) \dots \Gamma(\alpha_n)}{\Gamma(\alpha_1 + \dots + \alpha_n)} \int_0^\infty f(t) t^{a_1+\dots+a_n-1} dt \end{aligned}$$

Από αυτήν προκύπτει η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της κατανομής Liouville που είναι:

$$p_{x_1, \dots, x_n}(x_1, \dots, x_n) = C f(x_1 + \dots + x_n) x_1^{a_1-1} \dots x_n^{a_n-1}$$

με $x_1, \dots, x_n > 0$ και $a_1, \dots, a_n > 0$

2.6 WEIBULL

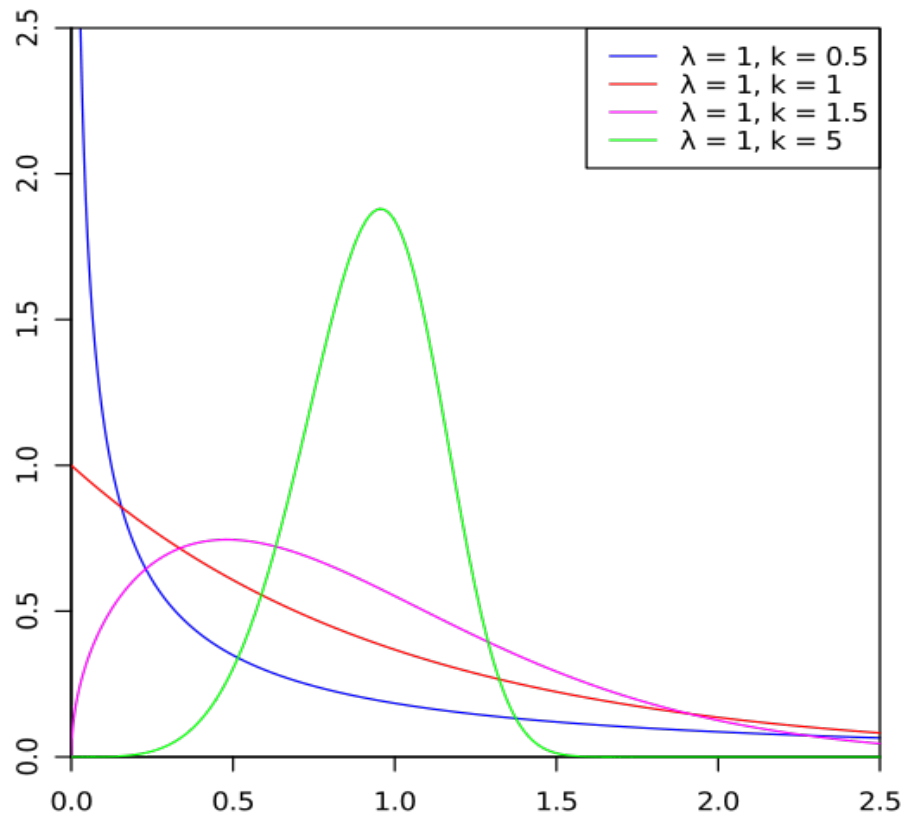
2.6.1 Γενικά στοιχεία της Weibull κατανομής

Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της Weibull κατανομής για δύο παραμέτρους είναι της μορφής:

$$f(x; k, \lambda) = \begin{cases} \frac{k}{\lambda} \left(\frac{x}{\lambda}\right)^{k-1} e^{-(x/\lambda)^k}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

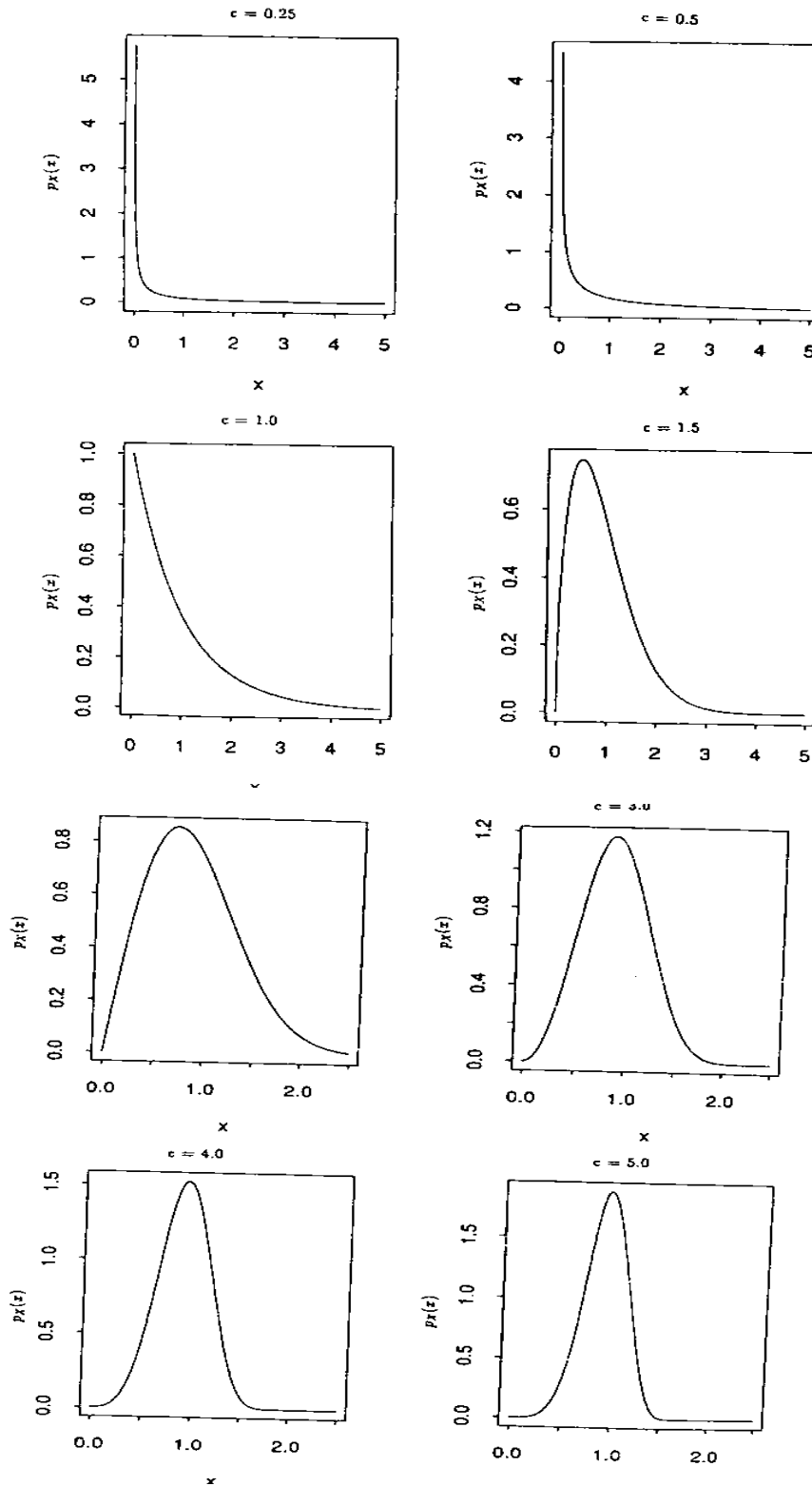
Όταν $\kappa = 1$, τότε η κατανομή είναι εκθετική με $\lambda = 1/\lambda$ (www.des.upatras.gr/amm/daskalaki/UsefulDistributions_2006.pdf).

Γράφημα 12. Συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της Weibull κατανομής



Πηγή: http://en.wikipedia.org/wiki/Weibull_distribution

Τα παρακάτω γραφήματα απεικονίζουν τη συνάρτηση πυκνότητας της Weibull κατανομής για διάφορα c (ή αλλιώς κ).



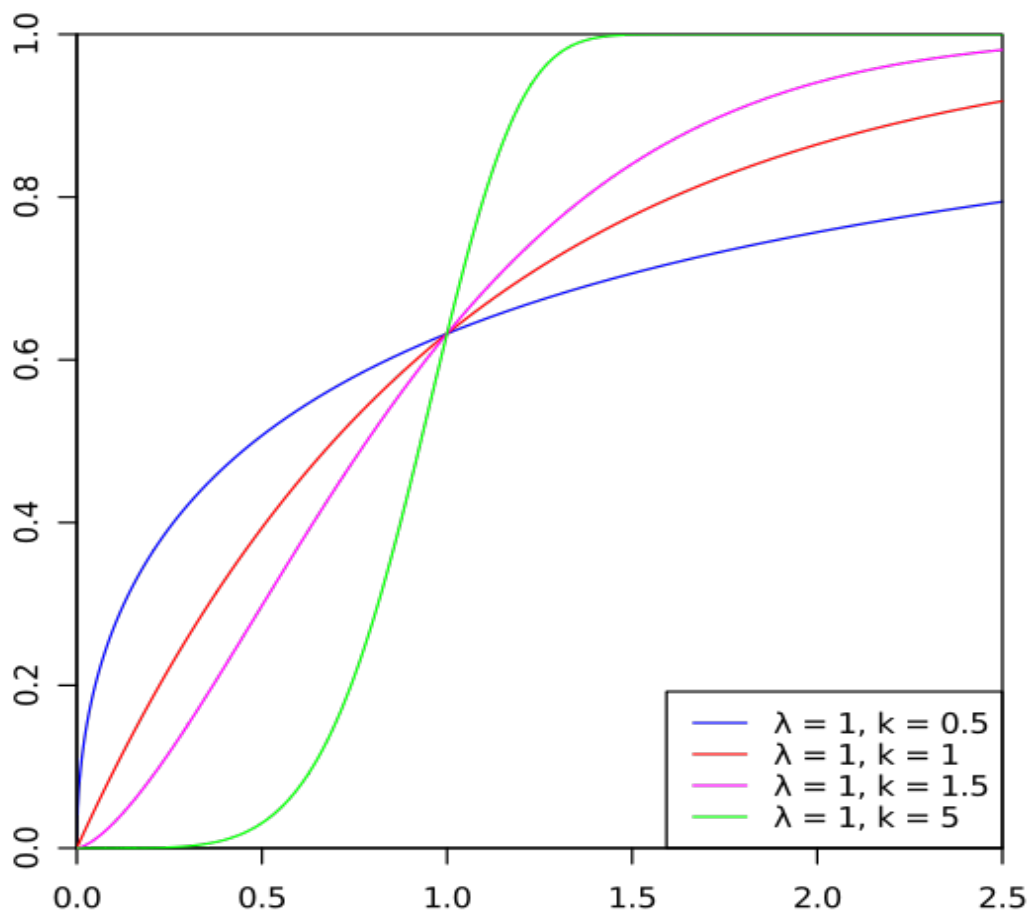
Πηγή: Johnson et al., 1994, σελ. 631 – 632

Η αθροιστική συνάρτηση κατανομής είναι της μορφής:

$$F(x; k, \lambda) = 1 - e^{-(x/\lambda)^k}$$

για $x \geq 0$ και $F(x; \kappa; \lambda) = 0$ για $x < 0$.

Γράφημα 13. Αθροιστική συνάρτηση της κατανομής Weibull



Πηγή: http://en.wikipedia.org/wiki/Weibull_distribution

Ο μέσος, η διακύμανση, η κύρτωση, η ασυμμετρία και η ροπογεννήτρια της Weibull κατανομής δίνονται στον παρακάτω πίνακα.

Μέσος	$\lambda \Gamma(1 + \frac{1}{\kappa})$
Διακύμανση	$\lambda^2 \Gamma(1+2/\kappa) - \mu^2$
Ασυμμετρία	$\frac{\Gamma(1+\frac{3}{\kappa})\lambda^3 - 3\mu\sigma^2 - \mu^3}{\sigma^3}$

Κύρτωση	$\frac{-6\Gamma_1^4 + 12\Gamma_2\Gamma_2 - 3\Gamma_2^2 - 4\Gamma_1\Gamma_3 + \Gamma_4}{[\Gamma_2 - \Gamma_1^2]^2}$
Ροπογεννήτρια	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n \lambda^n}{n!} \Gamma\left(1 + \frac{n}{k}\right) \text{ με } k \geq 1$

Στην περίπτωση τριών παραμέτρων η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της Weibull κατανομής δίνεται από τον τύπο (http://www.weibull.com/LifeDataWeb/weibull_probability_density_function.htm):

$$f(T) = \frac{\beta}{\eta} \left(\frac{T - \gamma}{\eta} \right)^{\beta-1} e^{-\left(\frac{T - \gamma}{\eta} \right)^{\beta}}$$

όπου $f(T) \geq 0$, $T \geq 0$; $\gamma, \beta > 0$, $\eta > 0$ και $-\infty < \gamma < \infty$ και

η = παράμετρος κλίμακας (scale parameter)

β = κλίση

γ = παράμετρος τοποθεσίας (location parameter)

Αν στην παραπάνω συνάρτηση θέσουμε $\gamma = 0$ και $\beta = c$ σταθερά, τότε προκύπτει η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας μίας παραμέτρου, της η , που δίνεται από τον τύπο

(http://www.weibull.com/LifeDataWeb/weibull_probability_density_function.htm):

$$f(T) = \frac{C}{\eta} \left(\frac{T}{\eta} \right)^{C-1} e^{-\left(\frac{T}{\eta} \right)^C}$$

Αν $0 < p < 1$, τότε η αντίστροφη συνάρτηση πιθανότητας τριών παραμέτρων παίρνει τη μορφή

$$F^{-1}(p|b, c, m) = m + b(-\ln(1-p))^{\frac{1}{c}}$$

Επίσης, η συνάρτηση επιβίωσης είναι της μορφής:

$$P(X > x) = \exp\{-(x/b)^c\}$$

2.6.2 Συνάρτηση πιθανοφάνειας και εκτιμήτριες της Weibull κατανομής

Αν υποθέσουμε ένα δείγμα παρατηρήσεων της Weibull κατανομής $X_1, \dots, X_n$ με γνωστό το m και $Z_i = X_i - m$, όπου m είναι μίας γνωστή παράμετρος τοποθεσίας, και $Y = \ln(Z_i)$, τότε η αμερόληπτη εκτιμήτρια της $\theta = (1/c)$ δίνεται από τον τύπο (Krishnammorthy, 2006, σελ. 266):

$$\hat{\theta} = \frac{\sqrt{6}}{\pi} \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2}{n-1}}$$

Επιπρόσθετα, η εκτιμήτρια κατανέμεται σύμφωνα με την κανονική κατανομή με διακύμανση $(1.1 / c^2 n)$. Όταν το m είναι γνωστό, η εκτιμήτρια της c της συνάρτησης πιθανοφάνειας είναι η λύση της εξίσωσης:

$$\hat{c} = \left[\sum_{i=1}^n \hat{Z}_i^{\hat{c}} Y_i / \sum_{i=1}^n \hat{Z}_i^{\hat{c}} - \bar{Y} \right]^{-1}$$

Τέλος, η εκτιμήτρια b δίνεται από την εξίσωση:

$$\hat{b} = \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \hat{Z}_i^{\hat{c}} \right)^{1/\hat{c}}$$

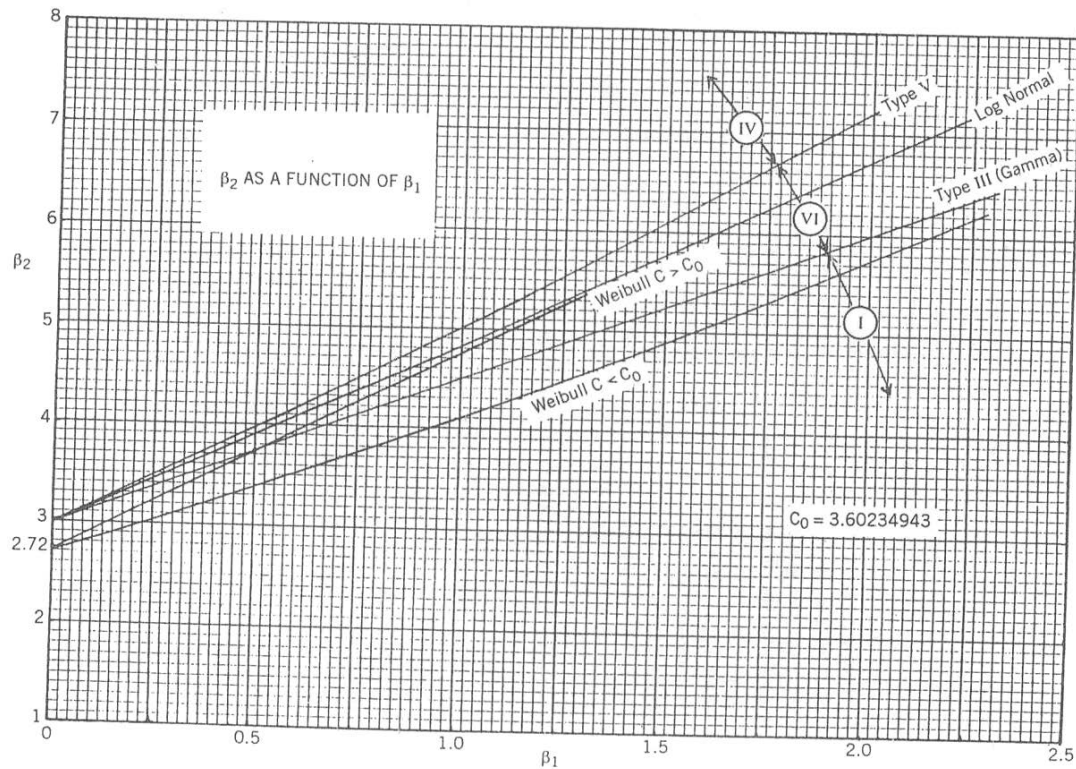
2.6.3 Ιδιότητες της Weibull κατανομής

1. Αν η X τυχαία μεταβλητή ακολουθεί την Weibull κατανομή με (b, c, m) , τότε ισχύει (Krishnammorthy, 2006, σελ. 269): η $(\frac{X-m}{b})^c$ κατανέμεται σύμφωνα με την $\exp(1)$. Αυτό σημαίνει ότι είναι η εκθετική κατανομή με μέσο $m = 1$.

2. Ισχύει ότι (Krishnammorthy, 2006, σελ. 269): η $1 - \exp[-(\frac{X-m}{b})^c]$ κατανέμεται σύμφωνα με την $U(0,1)$ και ως εκ τούτου ισχύει ότι η $X = m + b[-\ln(1-U)]^{\frac{1}{c}}$ κατανέμεται σύμφωνα με την Weibull (b,c,m) , όπου η U υποδηλώνει την ομοιόμορφη $(0,1)$ τυχαία μεταβλητή.

2.6.4 Σχέση της Weibull κατανομής με άλλες κατανομές

Η σχέση της κατανομής Weibull με άλλες κατανομές και πιο συγκεκριμένα με την Gamma και την log normal απεικονίζεται στο παρακάτω Γράφημα.



Πηγή: Johnson et al., 1994, σελ. 636

2.6.5 Weibull probability paper

Για την κατασκευή του οι Johnson et al. (1994, σελ. 677) χρησιμοποιούν την αρχική μορφή της αθροιστικής συνάρτησης κατανομής και επισημαίνουν ότι ισχύει:

$$\log \log \{1 - F_x(x)\} = -c \log \left(\frac{x - \xi_0}{a} \right) \quad \text{με } x > \xi_0$$

Η παραπάνω σχέση γράφεται και ως εξής:

$$\log \log \left\{ \frac{1}{1 - F_x(x)} \right\} = c \log(x - \xi_0) - c \log a \quad \text{με } x > \xi_0$$

Αν θέσουμε

$$\log \log \left\{ \frac{1}{1 - F_x(x)} \right\} = w \quad \text{και}$$

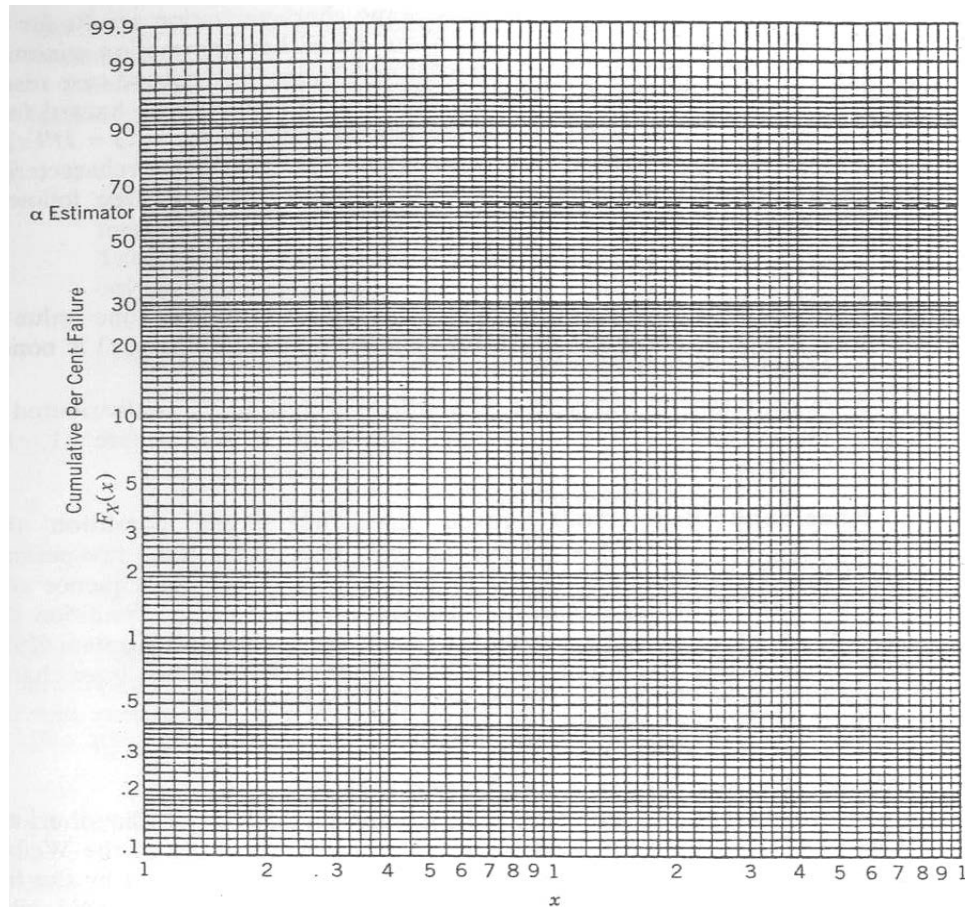
$$\log(x - \xi_0) = v$$

τότε έχουμε την εξής γραμμική σχέση:

$$w = cv - c \log a \quad \text{με } a > 0$$

Το Weibull probability paper απεικονίζεται στο παρακάτω Γράφημα.

Γράφημα 14. Weibull probability paper



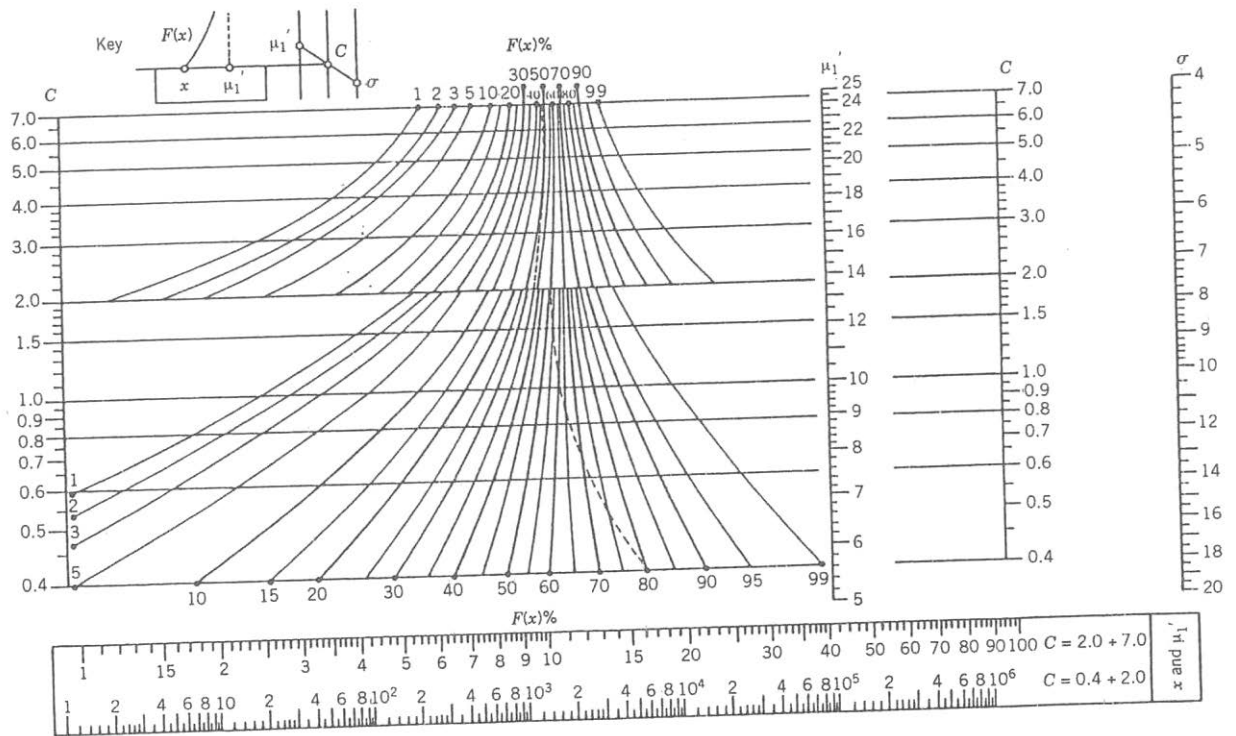
Πηγή: Johnson et al., 1994, σελ. 678

2.6.7 Νομόγραμμα της Weibull κατανομής

Ο Kotel'nikov (1964, όπως παρατίθεται στους Johnson et al., 1994, sel. 675) παρουσίασε ένα νομόγραμμα για την εύρεση του $F_X(x)$ δεδομένο του μέσου μ_1' και της διακύμανσης σ . Για την εύρεση του νομογράμματος, το οποίο απεικονίζεται στο πιο κάτω Γράφημα, χρησιμοποιήθηκε η παρακάτω μορφή της αθροιστικής συνάρτησης της Weibull κατανομής:

$$F_x(x) = 1 - \exp\left\{-\left[\frac{x\Gamma[1+(1/c)]}{\mu_1}\right]^c\right\}$$

Γράφημα 15. Νομόγραμμα της Weibull κατανομής



Πηγή: Johnson et al., 1994, σελ. 676

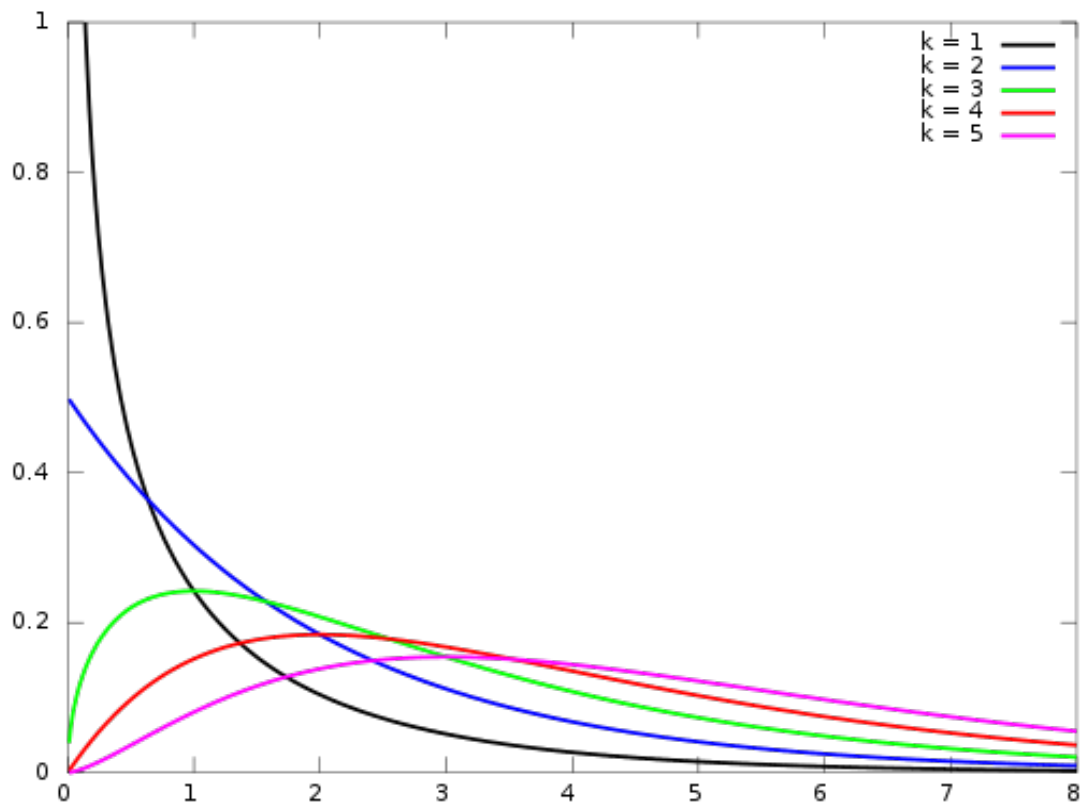
2.7 CHI – SQUARE

2.7.1 Γενικά στοιχεία της Chi – square κατανομής

Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της chi – square κατανομής, η οποία είναι ειδική περίπτωση της Γάμμα κατανομής, δίνεται από τον τύπο:

$$f(x; k) = \begin{cases} \frac{1}{2^{\frac{k}{2}} \Gamma(\frac{k}{2})} x^{\frac{k}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}}, & x \geq 0 \\ 0 & \end{cases}$$

Γράφημα 16. Συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της chi – square κατανομής

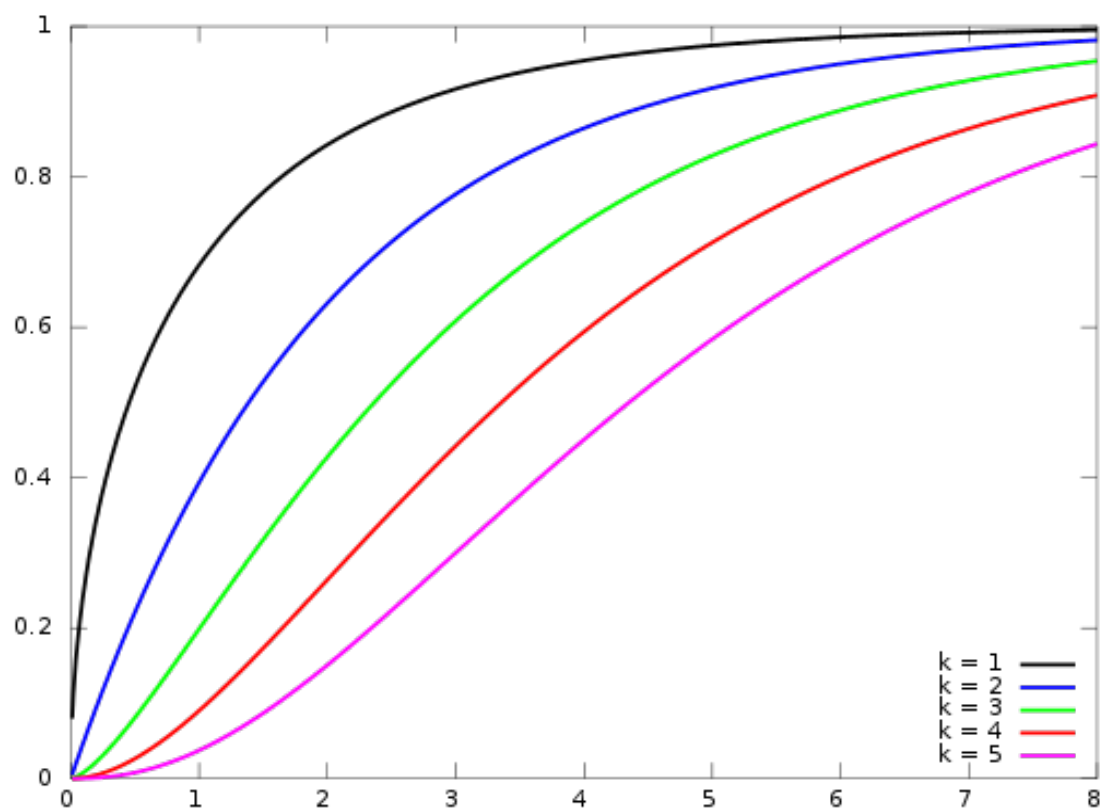


Πηγή: http://en.wikipedia.org/wiki/Chi-square_distribution

Η αθροιστική συνάρτηση της συγκεκριμένης κατανομής είναι της παρακάτω μορφής:

$$F(x; k) = \frac{\gamma(\frac{k}{2}, \frac{x}{2})}{\Gamma(k/2)} = P(\frac{k}{2}, \frac{x}{2})$$

Γράφημα 17. Αθροιστική συνάρτηση της chi – square κατανομής



Πηγή: http://en.wikipedia.org/wiki/Chi-square_distribution

Ο μέσος, η διακύμανση, η κύρτωση, η ασυμμετρία και η ροπογεννήτρια της Chi - square κατανομής δίνονται στον παρακάτω πίνακα.

Μέσος	κ
Διακύμανση	2κ
Ασυμμετρία	$\frac{\sqrt{8}}{k}$
Κύρτωση	$12 / \kappa$
Ροπογεννήτρια	$(1 - 2t)^{-\frac{\kappa}{2}}$

Η χαρακτηριστική συνάρτηση της chi - square δίνεται από τον τύπο (Balakrishnan και Nevzorov, 2003, σελ. 239):

$$f_{x^2}(t) = Ee^{itx^2} = Ee^{itx_n^2} Ee^{itx_m^2} = (1-2it)^{-\frac{n+m}{2}}$$

Σύμφωνα με την παραπάνω συνάρτηση, η μεταβλητή X έχει chi – square κατανομή, με $n+m$ βαθμούς ελευθερίας. Από την άλλη, αν X_n^2 και X είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές, με την X να έχει μία τυχαία κατανομή και $X^2 = X_n^2 + X$ να έχει την chi – square κατανομή με $(n+m)$ βαθμούς ελευθερίας, τότε η χαρακτηριστική συνάρτηση της X είναι της μορφής (Balakrishnan και Nevzorov, 2003, σελ. 239):

$$f_x(t) = \frac{f_{x^2}(t)}{f_{x_n^2}(t)} = \frac{(1-2it)^{-\frac{n+m}{2}}}{(1-2it)^{-\frac{n}{2}}} = (1-2it)^{-\frac{m}{2}}$$

Αυτό σημαίνει ότι η μεταβλητή X κατανέμεται σύμφωνα με την X_m^2 .

Η κατανομή chi – square ονομάζεται από ορισμένους συγγραφείς και ως κατανομή της διακύμανσης, γιατί η διακύμανση από ένα τυχαίο δείγμα της κανονικής κατανομής ακολουθεί την κατανομή chi – square. Πιο συγκεκριμένα, αν $X_1, \dots, X_n$ είναι ένα τυχαίο δείγμα από την κανονική κατανομή με μέσο μ και διακύμανση σ^2 , τότε ισχύει (Krishnammorthy, 2006, σελ. 157):

$$H \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{\sigma^2} = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \text{ κατανέμεται σύμφωνα με την } X_{n-1}^2$$

2.7.2 Ιδιότητες της chi – square κατανομής

Η κατανομή chi – square παρουσιάζει τις παρακάτω ιδιότητες (Krishnammorthy, 2006, σελ. 158):

1. Αν $X_1, \dots, X_k$ είναι ανεξάρτητες chi – square μεταβλητές με βαθμούς ελευθερίας

$n_1, \dots, n_k$, τότε ισχύει ότι η $\sum_{i=1}^k X_i$ κατανέμεται σύμφωνα με την X_m^2 όπου

$$m = \sum_{i=1}^k n_i$$

2. Αν $F(x|n)$ υποδηλώνει την συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της X_n^2 τότε ισχύουν οι παρακάτω σχέσεις:

$$\alpha) F(x|n+2) = F(x|n) - \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{n/2} e^{-\frac{x}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}$$

$$\beta) F(x|2n) = 1 - 2 \sum_{k=1}^n f(x|2k)$$

$$\gamma) F(x|2n+1) = 2\Phi(\sqrt{x}) - 1 - 2 \sum_{k=1}^n x|2k+1$$

$$\delta) F(x|n) = \frac{1}{\Gamma(n/2)} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i (x/2)^{(n/2)+i}}{i! \Gamma\left(\frac{n}{2}+i\right)}$$

2.7.3 Σχέσεις με άλλες κατανομές

Η κατανομή chi – square συνδέεται με άλλες κατανομές ως εξής (Krishnammorthy, 2006, σελ. 159):

1. Αν X και Y είναι ανεξάρτητες chi – square τυχαίες μεταβλητές με βαθμούς ελευθερίας m και n αντίστοιχα, τότε η $\frac{X/m}{Y/n}$ κατανέμεται σύμφωνα με την $F_{m,n}$, όπου η $\frac{X}{X+Y}$ κατανέμεται σύμφωνα με την $\text{beta}(m/2, n/2)$.

2. Αν $X_1, \dots, X_k$ είναι ανεξάρτητες chi – square μεταβλητές με βαθμούς ελευθερίας $n_1, \dots, n_k$, και ορίσουμε ότι

$$W_i = \frac{X_1 + \dots + X_i}{X_1 + \dots + X_k} \quad \text{με } i = 1, 2, \dots, k-1$$

τότε οι τυχαία μεταβλητή $W_1, \dots, W_{k-1}$ είναι ανεξάρτητη και η W_i κατανέμεται σύμφωνα με την

$$\text{beta}\left(\frac{m_1 + \dots + m_i}{2}, \frac{m_{i+1}}{2}\right) \quad \text{με } i = 1, 2, \dots, k-1$$

3. Η Γάμμα κατανομή με παράμετρο μορφής α και παράμετρο κλίμακας b αποτελεί μία chi – square κατανομή με $df = n$ όταν $\alpha = n/2$ και $b = 2$. Τότε ισχύει ότι η gamma $(n/2, 2)$ κατανέμεται σύμφωνα με την X_n^2

4. Αν X_n^2 μία τυχαία μεταβλητή με ζυγούς βαθμούς ελευθερίας $n < \infty$ τότε θα ισχύει η παρακάτω σχέση:

$$P(X_n^2 > x) = \sum_{k=0}^{(n/2)-1} \frac{e^{-x/2} \left(\frac{x}{2}\right)^k}{k!}$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3. ΑΝΑΛΥΣΗ ΜΗ ΕΚΘΕΤΙΚΩΝ ΚΑΤΑΝΟΜΩΝ ΠΟΥ ΜΠΟΡΟΥΝ ΝΑ ΛΑΒΟΥΝ ΕΚΘΕΤΙΚΗ ΜΟΡΦΗ

Υπάρχουν ορισμένες κατανομές που δεν είναι άμεσα εκθετικές, αλλά μπορούν να λάβουν μία τέτοια μορφή. Μία από αυτές είναι και η κατανομή Gaussian, ή αλλιώς η κανονική κατανομή, η αντίστροφη συνάρτηση Gaussian, αλλά και η Reyleigh. Καθώς η παρούσα εργασία εστιάζει ως επί το πλείστον στις κατανομές εκείνες που λόγω της μορφής που εξαρχής έχουν ανήκουν στην εκθετική οικογένεια κατανομών και όχι επειδή μπορούν να γραφούν και σε εκθετική μορφή, οι κατανομές που αναφέρονται στο παρόν κεφάλαιο δεν αναλύονται διεξοδικά.

3.1 GAUSSIAN ΚΑΤΑΝΟΜΗ

Η κατανομή Gaussian είναι της μορφής:

$$P(x) = N(x|\mu, \gamma^{-1})$$

$$= \sqrt{\frac{\gamma}{2\pi}} \exp\left[-\frac{\gamma}{2}(x - \mu)^2\right]$$

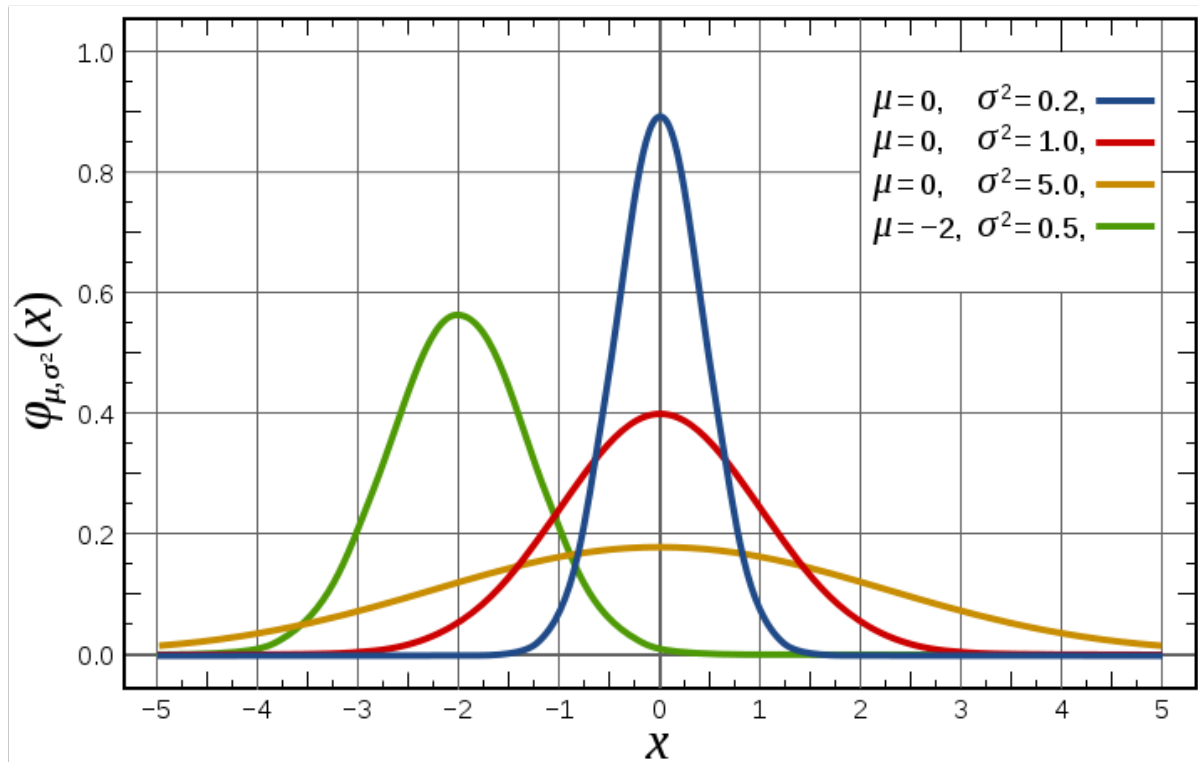
Ως μέλος της εκθετικής οικογένειας κατανομών, η παραπάνω σχέση μπορεί να γραφεί στην εξής κανονική μορφή (http://johnwinn.org/Publications/thesis/Winn03_appendices.pdf):

$$N(x|\mu, \gamma^{-1}) = \exp\left(\left\{\begin{bmatrix} \gamma\mu \\ -\frac{\gamma}{2} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} x \\ x^2 \end{bmatrix} + \frac{1}{2}(\log \gamma - \gamma\mu^2 - \log 2\pi)\right\}\right)$$

Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας είναι της μορφής (http://en.wikipedia.org/wiki/Normal_distribution):

$$f(x; \mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-(x-\mu)^2/(2\sigma^2)} = \frac{1}{\sigma} \phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$

Γράφημα 18. Συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της Gaussian κατανομής

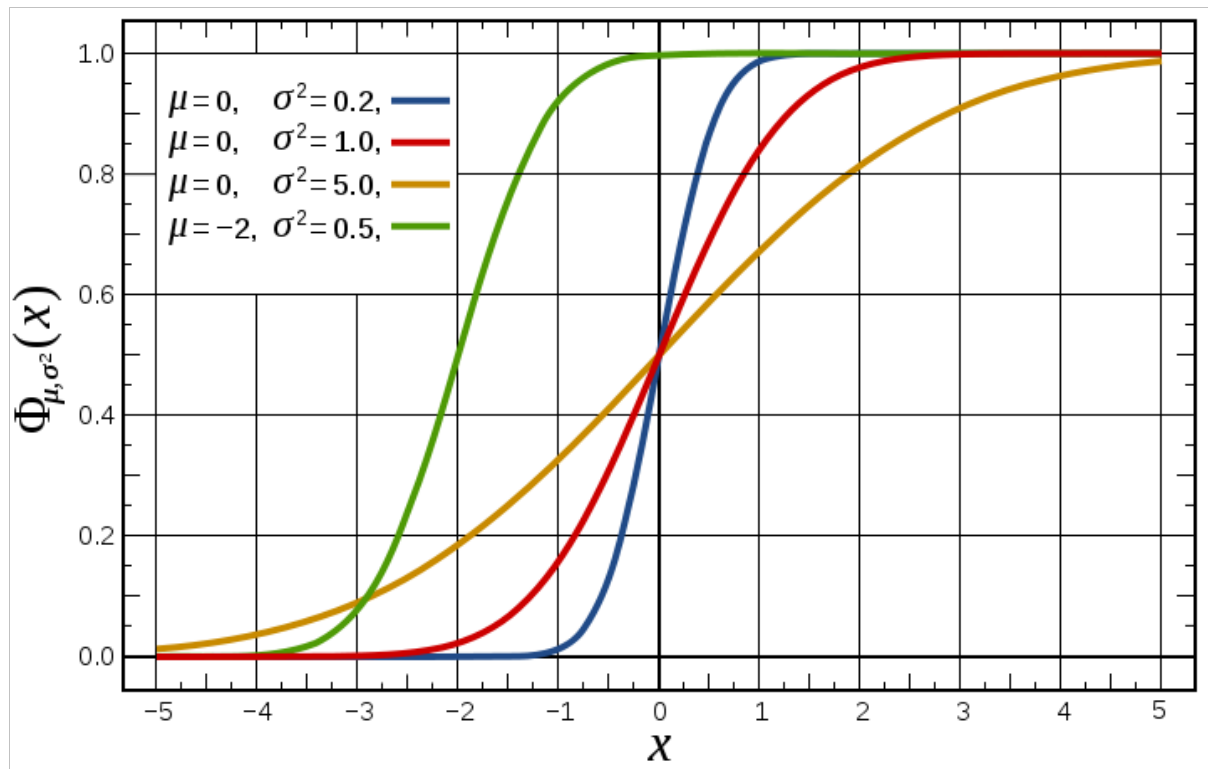


Πηγή: http://en.wikipedia.org/wiki/File:Normal_Distribution_PDF.svg

Η αθροιστική συνάρτηση πιθανότητας της Gaussian κατανομής είναι της μορφής (http://en.wikipedia.org/wiki/Normal_distribution):

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-t^2/2} dt = \frac{1}{2} \left[1 + \operatorname{erf}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) \right]$$

Γράφημα 19. Αθροιστική συνάρτηση πιθανότητας της Gaussian κατανομής



Πηγή: http://en.wikipedia.org/wiki/File:Normal_Distribution_PDF.svg

Ο μέσος, η διακύμανση, η κύρτωση, η ασυμμετρία και η ροπογεννήτρια της Gaussian κατανομής δίνονται στον παρακάτω πίνακα.

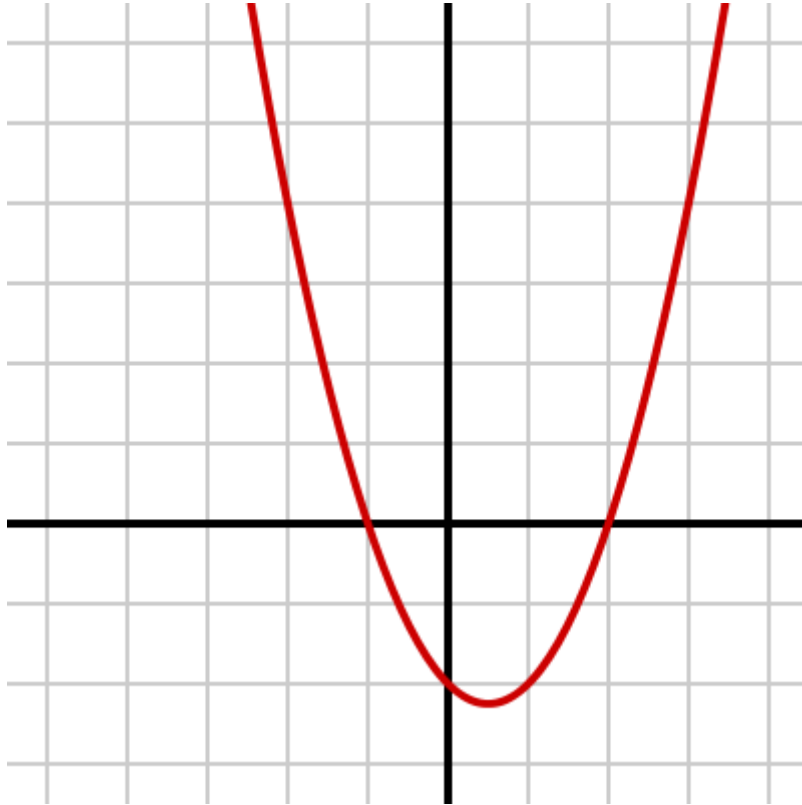
Μέσος	μ
Διακύμανση	σ^2
Ασυμμετρία	0
Κύρτωση	0
Ροπογεννήτρια	$\exp\{\mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2\}$

Αυτό που θα πρέπει να σημειωθεί είναι ότι η Gaussian κατανομή απορρέει από την «εκθετικοποίηση» της γνωστής τετραγωνικής (quadratic), ή αλλιώς πολωνυμικής, συνάρτησης και η οποία μας δίνει:

$$f(x) = e^{ax^2+bx+c}$$

Η quadratic συνάρτηση $f(x) = ax^2 + bx + c$ απεικονίζεται στο παρακάτω Γράφημα.

Γράφημα 20. Γραφική απεικόνιση της πολωνυμικής συνάρτησης



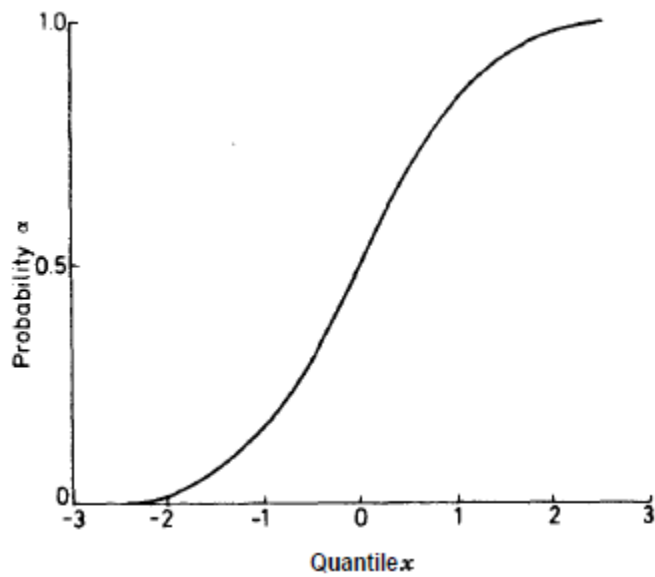
Πηγή: <http://en.wikipedia.org/wiki/File:Polynomialdeg2.svg>

Η χαρακτηριστική συνάρτηση της Gaussian κατανομής για μέσο μ και διακύμανση σ^2 είναι της μορφής (http://en.wikipedia.org/wiki/Normal_distribution):

$$\phi(t; \mu, \sigma^2) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2}(x-\mu)^2 / \sigma^2} dx = e^{i\mu t - \frac{1}{2}\sigma^2 t^2}$$

Η συνάρτηση κινδύνου της κατανομής Gaussian απεικονίζεται στο παρακάτω Γράφημα.

Γράφημα 21. Συνάρτηση κινδύνου της Gaussian κατανομής



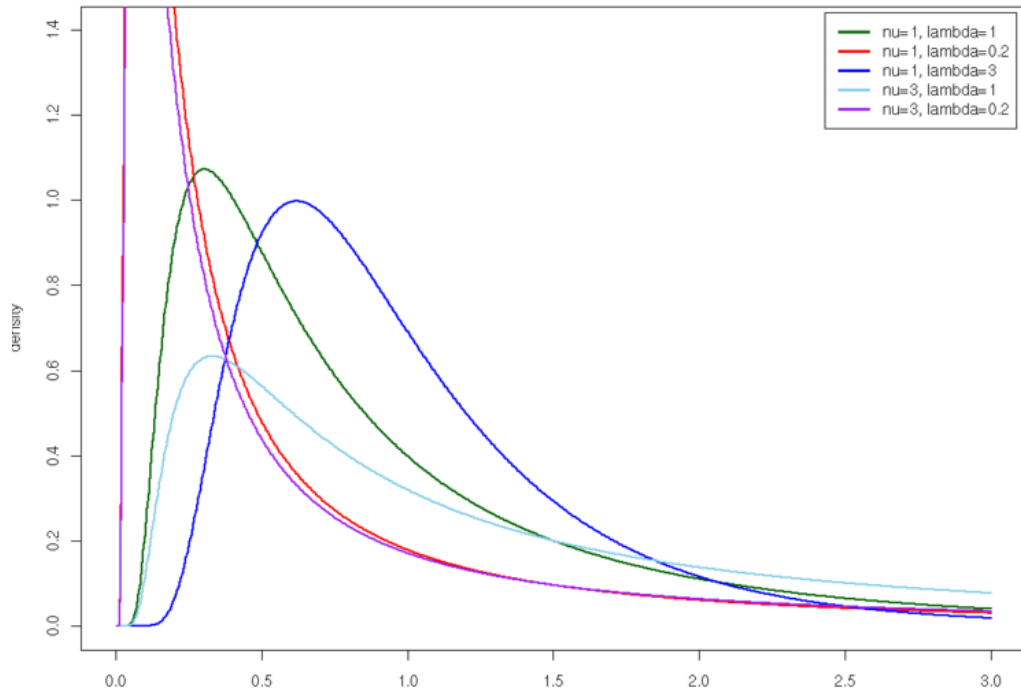
Πηγή: Evans et al., 2000, σελ. 148

3.2 ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ GAUSSIAN (INVERSE GAUSSIAN DISTRIBUTION – WALD)

Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της αντίστροφης συνάρτησης Gaussian είναι της μορφής (Johnson et al., 1994, σελ. 261):

$$p_x(x|\mu, \lambda) = \left[\frac{\lambda}{2\pi x^3}\right]^{1/2} \exp\left\{-\frac{\lambda}{2\mu^2 x}(x - \mu)^2\right\} = \left[\frac{\lambda}{2\pi x^3}\right]^{1/2} \exp\left\{-\frac{\lambda}{2\mu}\left(\frac{x}{\mu} - 2 + \frac{\mu}{x}\right)\right\}$$

Γράφημα 22. Συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της αντίστροφης Gaussian κατανομής



Πηγή: http://en.wikipedia.org/wiki/File:PDF_invGauss.png

Εναλλακτικά, η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της εν λόγω κατανομής μπορεί να γραφεί και στις ακόλουθες τρεις μορφές (Johnson et al., 1994, σελ. 261):

$$p_x(x|\mu, \phi) = \left[\frac{\mu\phi}{2\pi x^3} \right]^{1/2} e^{\phi} \exp\left\{ -\frac{1}{2}\phi \left(\frac{x}{\mu} + \frac{\mu}{x} \right) \right\} \text{ όταν IG}(\mu, \phi\mu)$$

$$p_x(x|\phi, \lambda) = \left[\frac{\lambda}{2\pi x^3} \right]^{1/2} e^{\phi} \exp\left\{ -\frac{1}{2} \left(\frac{\phi^2 x}{\lambda} + \frac{\lambda}{x} \right) \right\} \text{ όταν IG}(\lambda/\phi, \lambda)$$

$$p_x(x|\alpha, \lambda) = \left[\frac{\lambda}{2\pi x^3} \right]^{1/2} \exp\left[-\frac{\lambda}{2} \left\{ -\alpha x - (2\alpha)^{1/2} + \frac{1}{2x} \right\} \right] \text{ όταν IG}(\alpha^2/2, \lambda)$$

Η αθροιστική συνάρτηση κατανομής δίνεται από τον τύπο (Johnson et al., 1994, σελ. 262):

$$F_x(x|\mu, \lambda) = \Phi\left\{ \sqrt{\frac{\lambda}{x}} \left(\frac{x}{\mu} - 1 \right) \right\} + e^{2\lambda/\mu} \Phi\left\{ -\sqrt{\frac{\lambda}{x}} \left(\frac{x}{\mu} + 1 \right) \right\}$$

Ο μέσος, η διακύμανση, η κύρτωση, η ασυμμετρία και η ροπογεννήτρια της Gaussian κατανομής δίνονται στον παρακάτω πίνακα.

Μέσος	μ
Διακύμανση	μ^3 / λ
Ασυμμετρία	$3(\mu/\lambda)^{1/2}$
Κύρτωση	$15\mu / \lambda$
Ροπογεννήτρια	$\frac{\lambda}{\mu} \{1 - (1 - \frac{2\mu^2 t}{\lambda})^{1/2}\}$

Η χαρακτηριστική συνάρτηση της αντίστροφης Gaussian κατανομής έχει ως εξής (Johnson et al., 1994, σελ. 263):

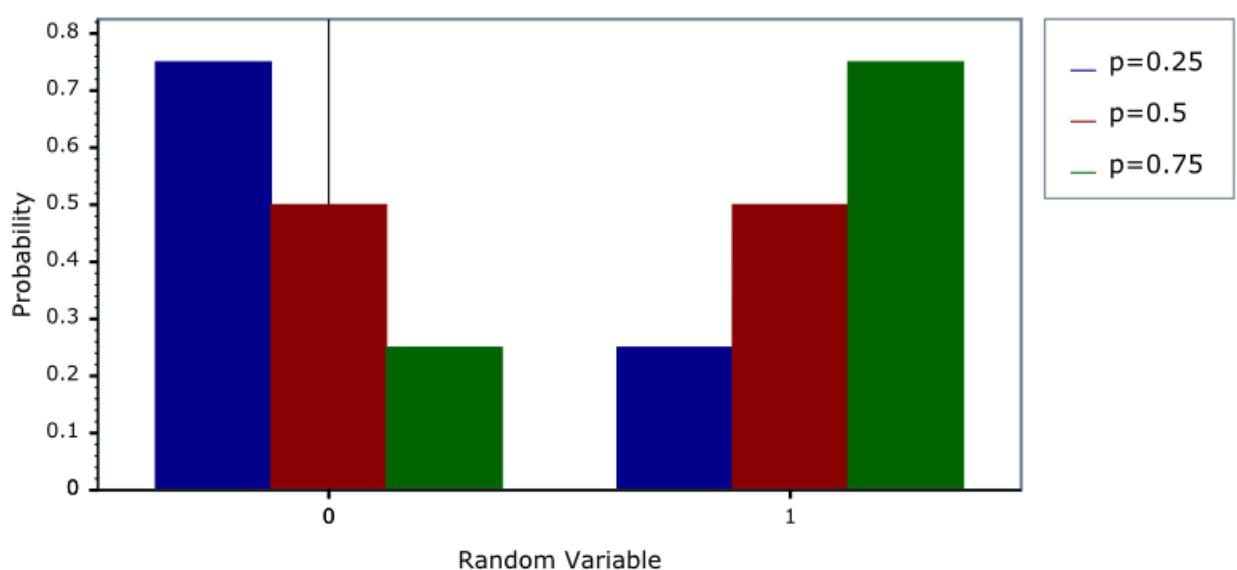
$$\exp\left[\frac{\lambda}{\mu} \left\{1 - \left(1 - \frac{2i\mu^2 t}{\lambda}\right)^{1/2}\right\}\right]$$

3.3 BERNOULLI

Η Bernoulli μπορεί επίσης να γραφεί σε εκθετική μορφή. Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της Bernoulli είναι της μορφής (http://en.wikipedia.org/wiki/Bernoulli_distribution):

$$f(k; p) = \begin{cases} q = 1 - p, & k = 0 \\ p, & k = 1 \end{cases}$$

Γράφημα 23. Συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της Bernoulli



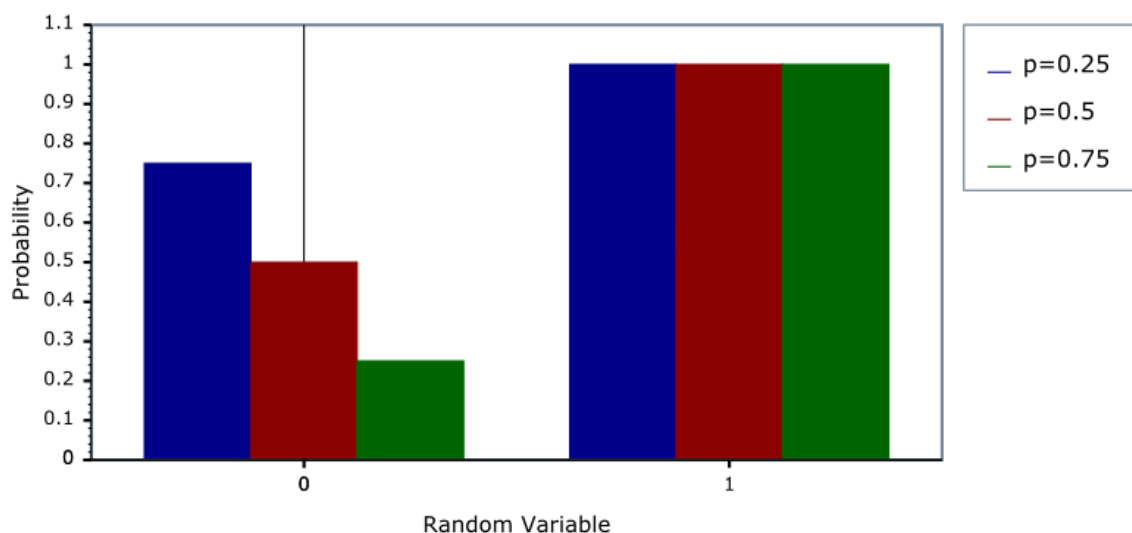
Πηγή:

http://www.boost.org/doc/libs/1_38_0/libs/math/doc/sf_and_dist/html/math_toolkit/dist/dist_ref/dists/bernoulli_dist.html

Η αθροιστική συνάρτηση πιθανότητας είναι της μορφής (http://en.wikipedia.org/wiki/Bernoulli_distribution):

$$f(k; p) = \begin{cases} q = 1 - p, & k = 0 \\ p, & k = 1 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Γράφημα 24. Αθροιστική συνάρτηση πιθανότητας της Bernoulli



Πηγή:

http://www.boost.org/doc/libs/1_38_0/libs/math/doc/sf_and_dist/html/math_toolkit/dist/dist_ref/dists/bernoulli_dist.html

Η παραπάνω κατανομή μπορεί να γραφεί σε εκθετική μορφή αν στην συνάρτηση της παρακάτω μορφής, η οποία είναι κοινή μορφή για όλες τις κατανομές που ανήκουν στην εκθετική οικογένεια κατανομών ή μπορούν να γραφούν ως τέτοιες,

$$p(y|\eta) = h(y) \exp\{\eta^T T(y) - A(\eta)\}$$

ορίσουμε ότι ισχύουν τα παρακάτω (<http://pages.cs.wisc.edu/~andrzejelmm1/exp-family-glms.pdf>):

1. $T(y)=y$ (sufficient statistic)
2. $h(y)=1$ (base measure)

$$3. \quad \eta(\theta) = \log \frac{\theta}{1-\theta} \text{ (natural parameter)}$$

$$4. \quad A[\eta(\theta)] = \log(1 + \exp[\eta(\theta)]) = \log(1 + \frac{\theta}{1-\theta}) = -\log(1-\theta) \text{ (log - partition function)}$$

Επομένως έχουμε (<http://pages.cs.wisc.edu/~andrzejel/mml/exp-family-glms.pdf>):

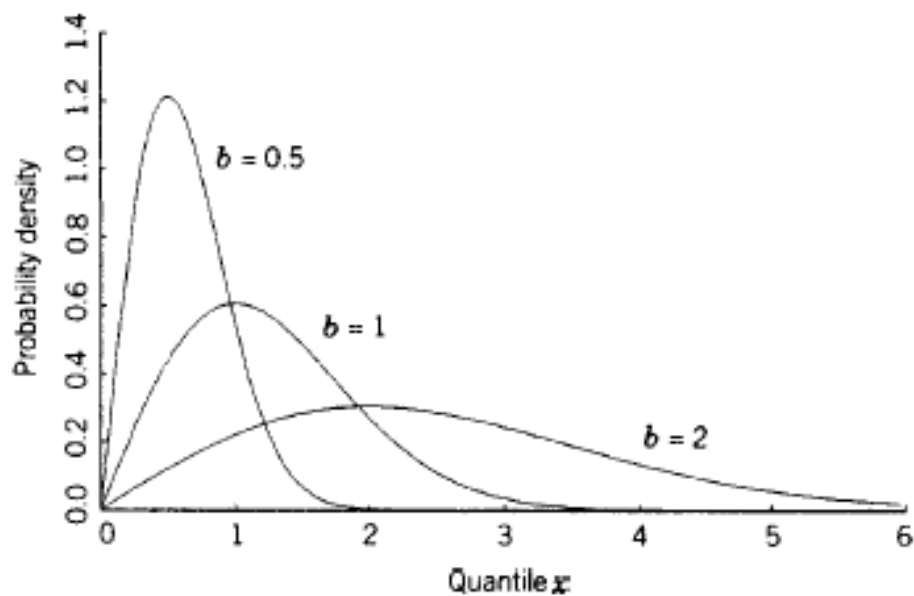
$$\begin{aligned} p(y|\theta) &= \theta^y (1-\theta)^{1-y} \\ &= \exp\{y \log \theta + (1-y) \log(1-\theta)\} \\ &= \exp\{y \log \frac{\theta}{1-\theta} + \log(1-\theta)\} \end{aligned}$$

3.4 REYLEIGH ΚΑΤΑΝΟΜΗ

Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας είναι (Evans et al., 2000, σελ. 167):

$$1 - \exp\left[-\frac{x^2}{2b^2}\right]$$

Γράφημα 25. Συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της Reyleigh κατανομής

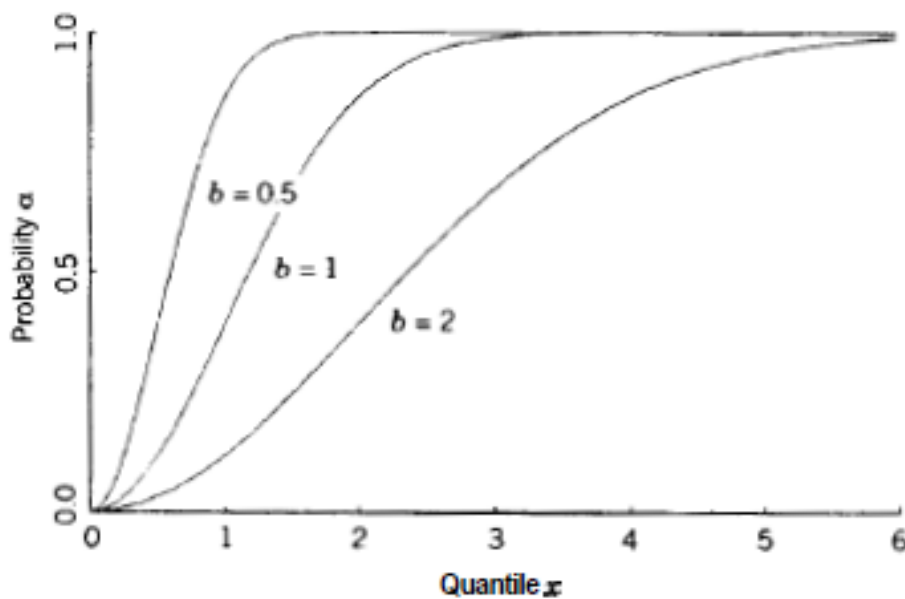


Πηγή: Evans et al., 2000, σελ. 168

Η αθροιστική συνάρτηση πιθανότητας είναι (Evans et al., 2000, σελ. 167):

$$\left(\frac{x}{b^2}\right) \exp\left[-\frac{x^2}{2b^2}\right]$$

Γράφημα 26. Αθροιστική συνάρτηση πιθανότητας της Reyleigh κατανομής



Πηγή: Evans et al., 2000, σελ. 169

Ο μέσος, η διακύμανση, η κύρτωση και η ασυμμετρία απεικονίζονται στον παρακάτω πίνακα.

Μέσος	$b\left(\frac{\pi}{2}\right)^{1/2}$
Διακύμανση	$(2 - \pi/2)b^2$
Ασυμμετρία	$\frac{2(\pi - 3)\pi^{1/2}}{(4 - \pi)^{3/2}}$
Κύρτωση	$\frac{(32 - 3\pi^2)}{(4 - \pi)^2}$

3.5 ΆΛΛΕΣ ΚΑΤΑΝΟΜΕΣ

Υπάρχουν και άλλες κατανομές που ανήκουν στην εκθετική οικογένεια κατανομών. Σύμφωνα με τους Johnson et al. (1994, σελ. 551) αυτές είναι οι εξής:

1. Extreme value form

Αν η $Y = e^{-X}$ ακολουθεί μία εκθετική κατανομή της παρακάτω μορφής

$p_x(x) = \sigma^{-1} \exp\left(-\frac{x}{\sigma}\right)$ με $x, \sigma > 0$, τότε η X κατανέμεται σύμφωνα με την extreme

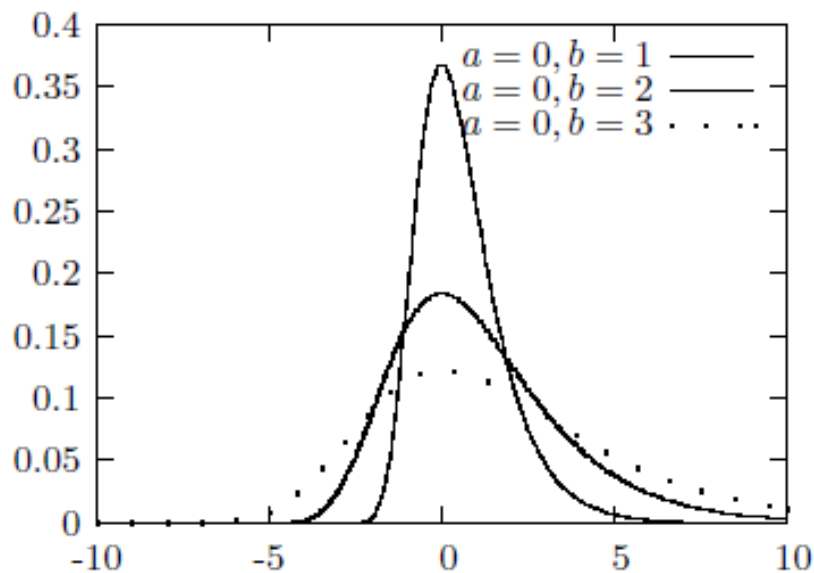
value form, της οποίας η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας και η αθροιστική συνάρτηση κατανομής αντίστοιχα είναι οι εξής

(http://en.wikipedia.org/wiki/Generalized_extreme_value_distribution):

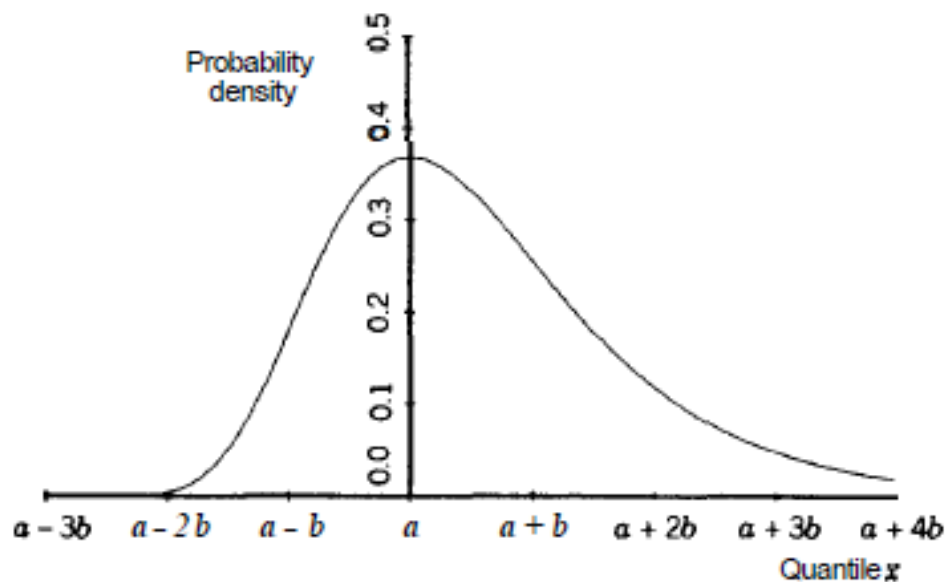
Συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας:

$$f(x; \mu, \sigma, \xi) = \frac{1}{\sigma} \left[1 + \xi \left(\frac{x - \mu}{\sigma} \right) \right]^{(-1/\xi) - 1} \exp \left\{ -1 + \xi \left(\frac{x - \mu}{\sigma} \right) \right\}^{-1/\xi} \}$$

Γράφημα 27. Συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της κατανομής extreme value



Πηγή: Krishnamoorthy, 2006, σελ. 270

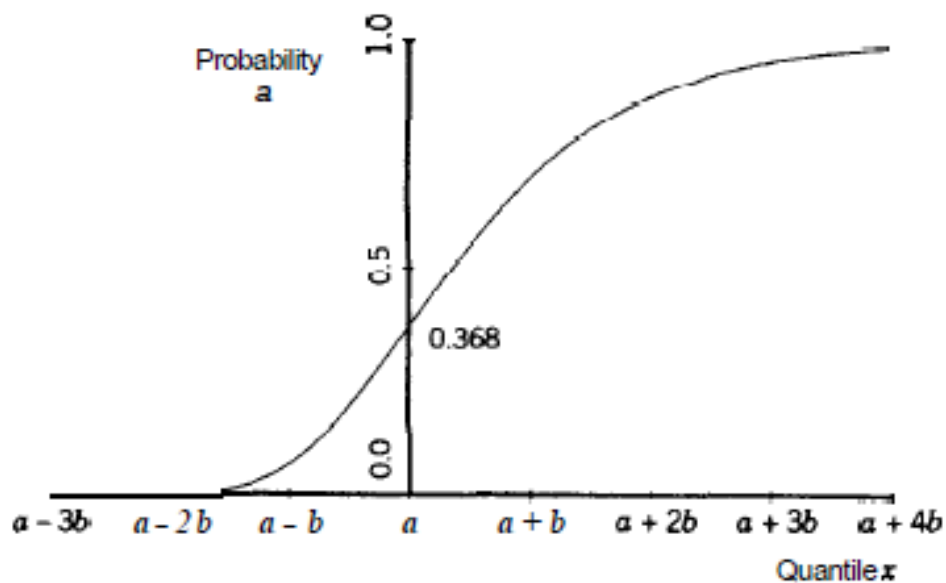


Πηγή: Evans et al., 2000, σελ. 87

Η αθροιστική συνάρτηση κατανομής είναι της μορφής:

$$F(x; \mu, \sigma, \xi) = \exp \left\{ -1 + \xi \left(\frac{x - \mu}{\sigma} \right) \right\}^{-1/\xi} \}$$

Γράφημα 28. Αθροιστική συνάρτηση της extreme value κατανομής



Πηγή: Evans et al., 2000, σελ. 87

Η χαρακτηριστική συνάρτηση της κατανομής extreme value είναι (Krishnamoorthy, 2006, σελ. 270):

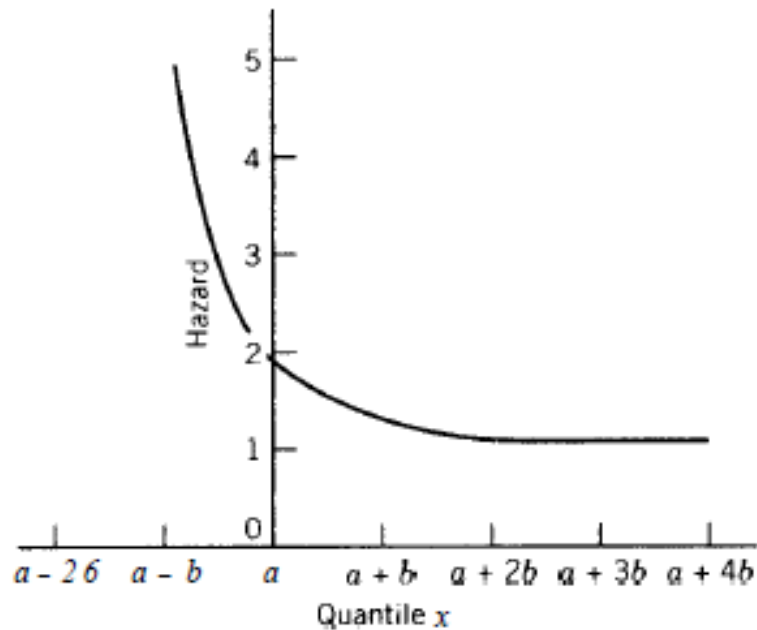
$$\exp(iat)\Gamma(1 - ibt)$$

Η αντίστροφη συνάρτηση επιβίωσης και η συνάρτηση κινδύνου της κατανομής extreme value είναι οι εξής (Krishnamoorthy, 2006, σελ. 270):

Αντίστροφη συνάρτηση επιβίωσης: $a - b \ln[-\ln(1 - p)]$

Συνάρτηση κινδύνου:
$$\frac{\exp[-(x - a)/b]}{b\{\exp[\exp(-(x - a)/b)] - 1\}}$$

Γράφημα 29. Συνάρτηση κινδύνου της extreme value



Πηγή: Evans et al., 2000, σελ. 88

Οι εκτιμήτριες της κατανομής extreme value είναι οι εξής (Krishnamoorthy, 2006, σελ. 270):

$$\hat{a} = -\hat{b} \ln \left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \exp(-X_i/\hat{b}) \right]$$

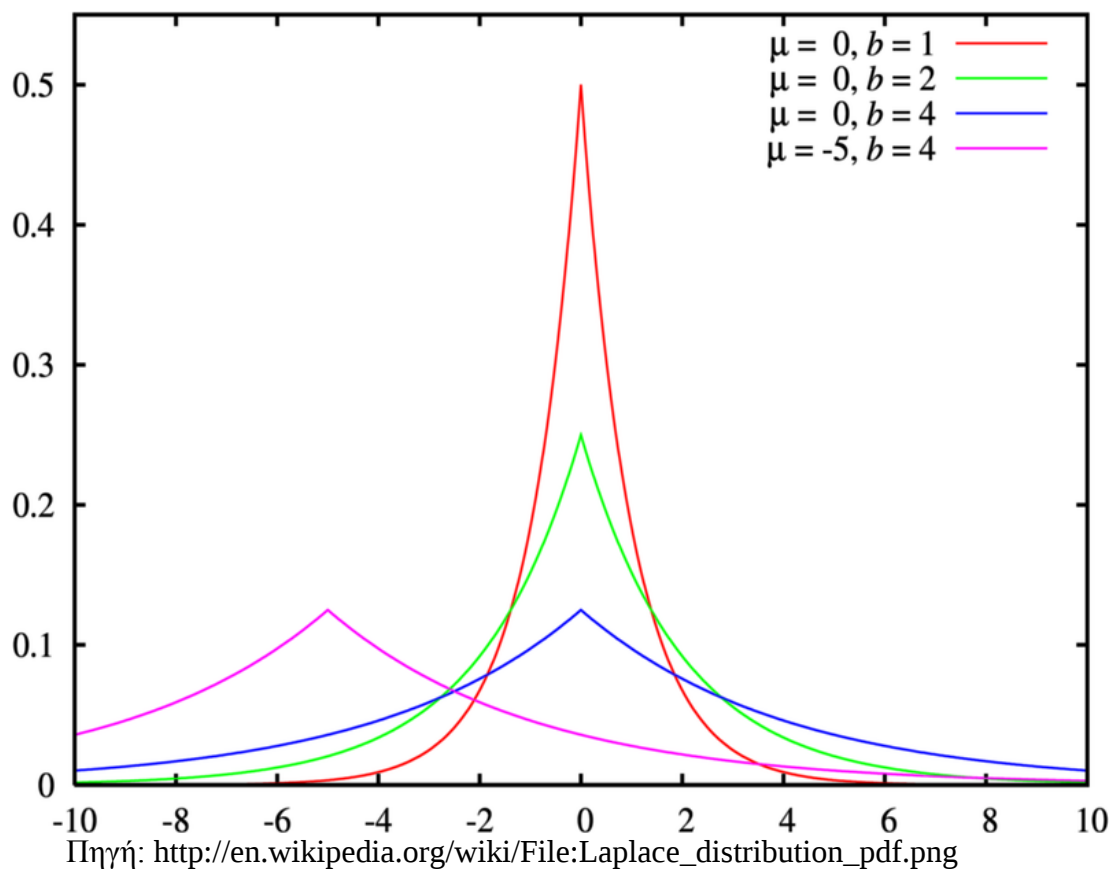
$$\hat{b} = \bar{X} + \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n X_{(j)} \left[\sum_{i=j}^n \frac{1}{i} \right]$$

2. Διπλή εκθετική κατανομή (double ή bilateral exponential distribution)

Η κατανομή αυτή είναι γνωστή και ως πρώτος νόμος λάθους του Laplace (Laplace's first law of error), όπου η κατανομή Laplace's second law of error είναι η κανονική κατανομή. Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της εν λόγω κατανομής είναι της μορφής (Johnson et al., 1994, σελ. 552):

$$p_x(x) = (2\sigma)^{-1} \exp\left(-\frac{|x-\theta|}{\sigma}\right) \quad \text{με } \sigma > 0$$

Γράφημα 30. Συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της διπλής εκθετικής κατανομής



3. Γενική Γάμμα ή Γενική Erlang κατανομή (General Gamma)

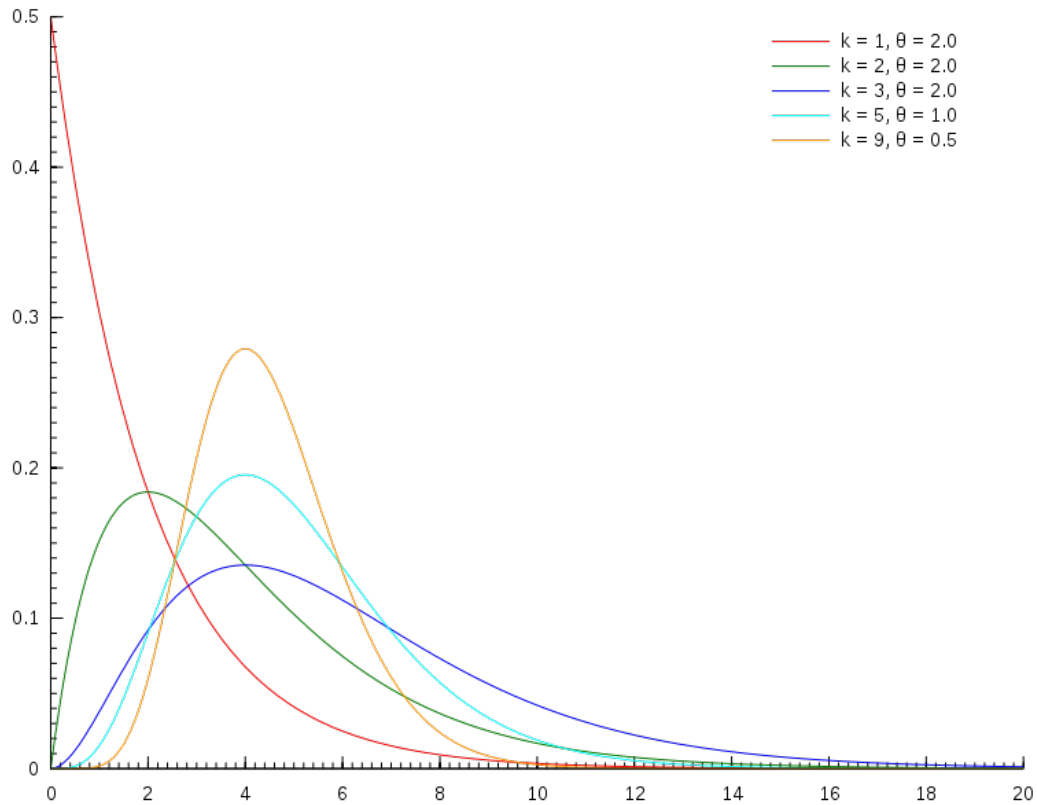
Αν $X_1, X_2, \dots, X_n$ είναι ανεξάρτητες εκθετικές μεταβλητές, τότε η γραμμική συνάρτηση

$$Y = \sum_{j=1}^n \lambda_j X_j \quad \text{με } \lambda_j \neq \lambda_k$$

έχει την εξής συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας:

$$p_Y(y) = \sum_{j=1}^n \left(\prod_{k \neq j} (\lambda_j - \lambda_k)^{-1} \right) \lambda_j^{n-2} e^{-y/\lambda_j}$$

Γράφημα 31. Συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της κατανομής Erlang

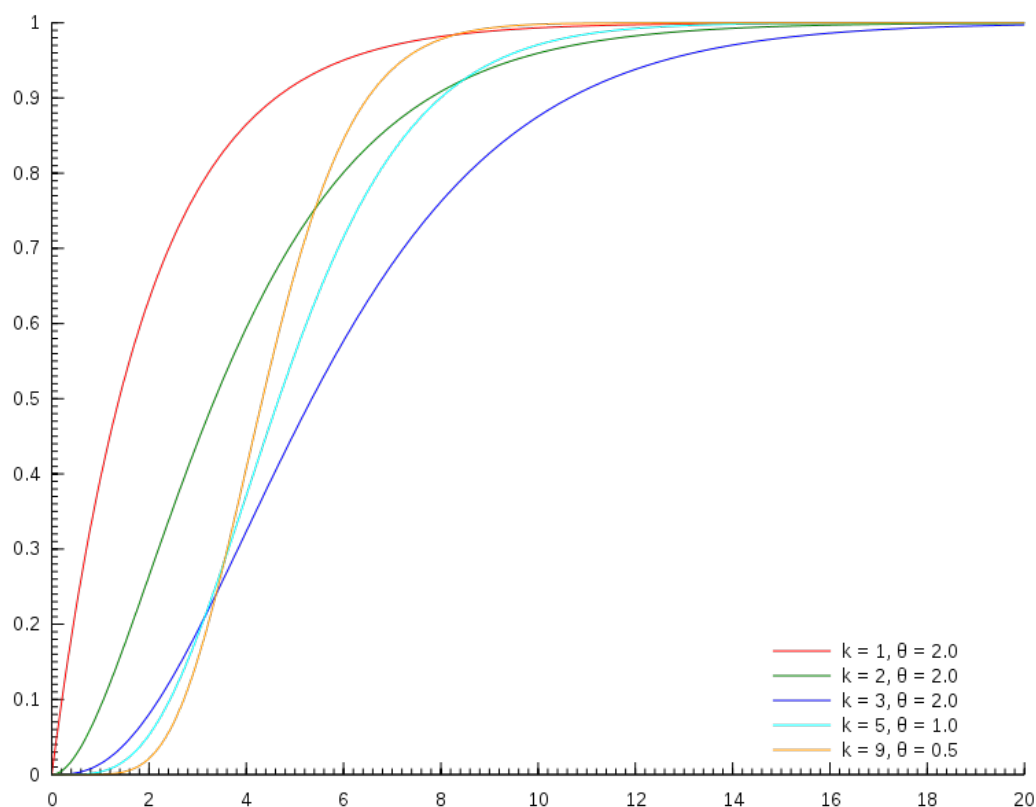


Πηγή: http://en.wikipedia.org/wiki/Erlang_distribution

Η αθροιστική συνάρτηση πιθανότητας της κατανομής Erlang είναι:

$$F(x; k, \lambda) = \frac{\gamma(k, \lambda x)}{(k-1)!}$$

Γράφημα 32. Αθροιστική συνάρτηση της κατανομής Erlang



Πηγή: http://en.wikipedia.org/wiki/Erlang_distribution

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4. ΕΚΘΕΤΙΚΟΠΟΙΗΜΕΝΗ ΕΚΘΕΤΙΚΗ ΚΑΤΑΝΟΜΗ

Η εκθετικοποιημένη εκθετική κατανομή ανήκει και αυτή στην εκθετική οικογένεια κατανομών. Έχει δύο παραμέτρους, μία παράμετρο κλίμακας (scale) και μία παράμετρο μορφής (shape) που είναι όμοιες με τις παραμέτρους της Γάμμα και της Weibull κατανομής. Ο λόγος για τον οποίο θα αναφερθεί συνοπτικά αυτή η οικογένεια κατανομών είναι ότι μοιράζεται πολλές κοινές ιδιότητες με τις δύο προαναφερθείσες κατανομές και για αυτόν τον λόγο συχνά αναφέρεται και ως εναλλακτική της Γάμμα ή της Weibull κατανομής (Gupta και Kundu, 2001, σελ. 117).

Όπως μπορεί κανείς να διαπιστώσει από το παρακάτω Γράφημα, η εκθετικοποιημένη εκθετική κατανομή δύο παραμέτρων αντιπροσωπεύει τις παραμέτρους κλίμακας και Γράφηματος όπως μία κατανομή Γάμμα ή Weibull. Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας ποικίλει ανάλογα με την παράμετρο μορφής, ενώ το ποσοστό αποτυχίας (failure rate) αυξάνεται ή μειώνεται με βάση επίσης την παράμετρο μορφής.

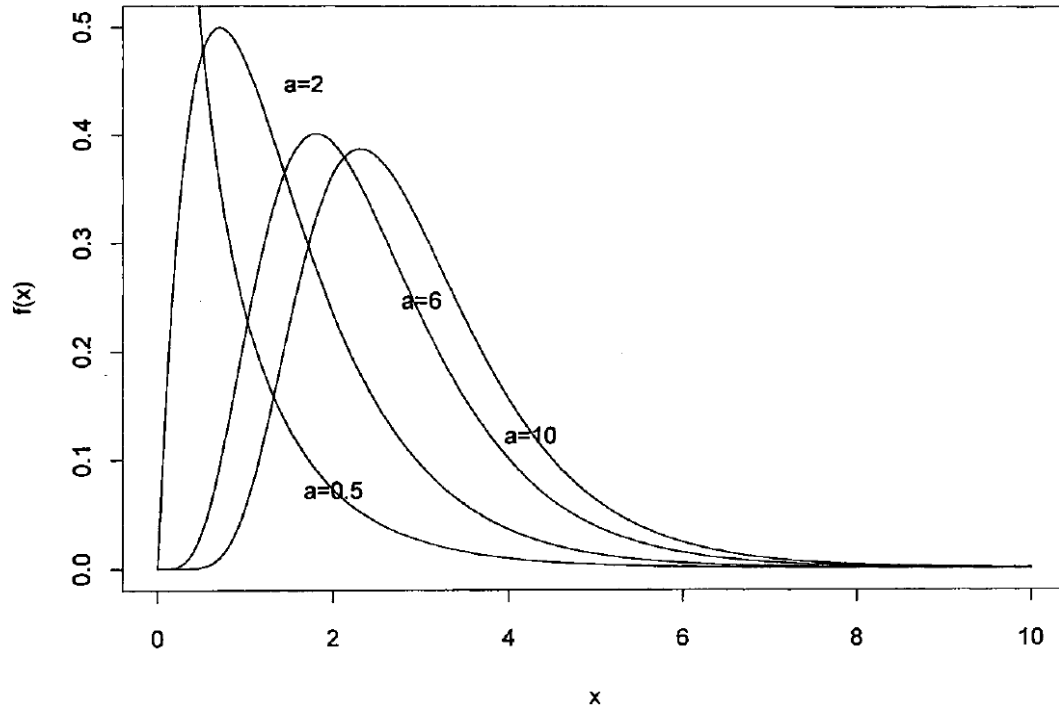
Η συνάρτηση κατανομής είναι της μορφής:

$$F_E(x, a, \lambda) = (1 - e^{-\lambda x})^a \quad \text{με } a, \lambda, x > 0$$

Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας είναι της μορφής:

$$f_E(x, a, \lambda) = a\lambda(1 - e^{-\lambda x})^{a-1} e^{-\lambda x}$$

Γράφημα 33. Συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της εκθετικοποιημένης εκθετικής κατανομής



Πηγή: Gupta και Kundu, 2001, σελ. 119

Η συνάρτηση επιβίωσης είναι της μορφής:

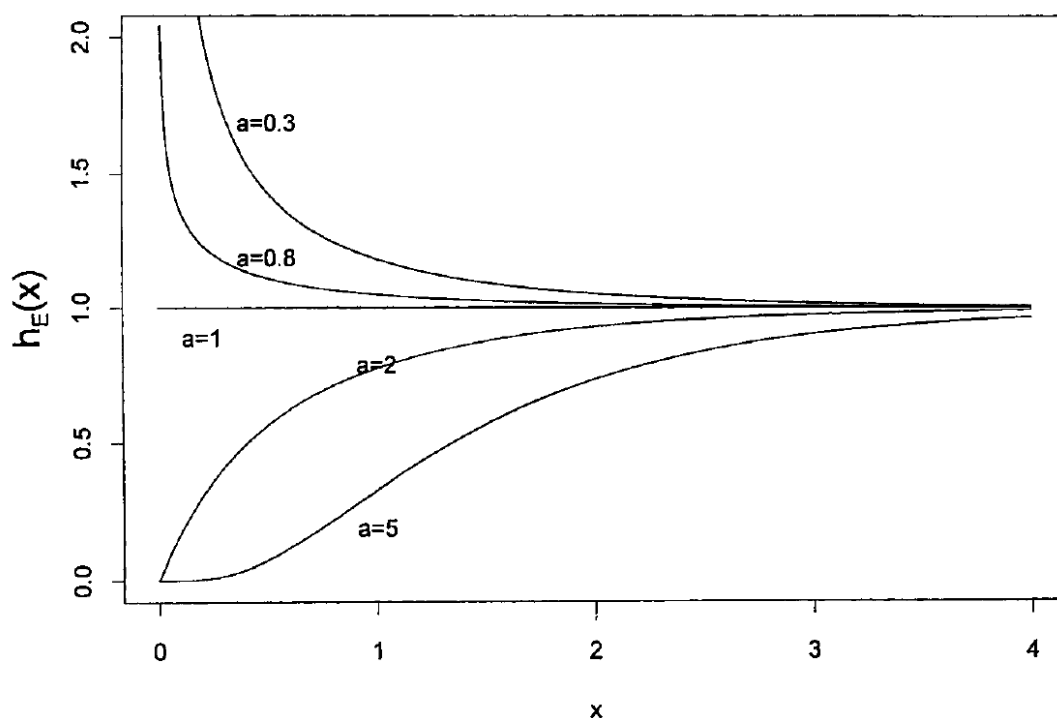
$$S_E(x, a, \lambda) = 1 - (1 - e^{-\lambda x})^a$$

Η συνάρτηση κινδύνου (hazard function), που απεικονίζεται στο παρακάτω Γράφημα, είναι της μορφής:

$$h_E(x, \alpha, \lambda) = \frac{\alpha \lambda (1 - e^{-\lambda x})^{\alpha-1} e^{-\lambda x}}{1 - (1 - e^{-\lambda x})^\alpha}$$

όπου α είναι η παράμετρος μορφής και λ είναι η παράμετρος κλίμακας. Όταν $\alpha = 1$ τότε η εκθετικοποιημένη εκθετική κατανομή αντιπροσωπεύει την εκθετική οικογένεια κατανομών (Gupta και Kundu, 2001, σελ. 119).

Γράφημα 34. Συνάρτηση κινδύνου



Πηγή: Gupta και Kundu, 2001, σελ. 120

Ο παρακάτω πίνακας απεικονίζει τις διαφορετικές συναρτήσεις κινδύνου στις τρεις κατανομές που εξετάζονται στο παρόν κεφάλαιο. Όπως μπορούμε να παρατηρήσουμε, η συνάρτηση κινδύνου της εκθετικοποιημένης εκθετικής κατανομής συμπεριφέρεται όπως και η αντίστοιχη της Γάμμα κατανομής.

Παράμετρος	Γάμμα	Weibull	Εκθετικοποιημένη εκθετική
$\alpha = 1$	Σταθερή	Σταθερή	Σταθερή
$\alpha > 1$	Αυξάνεται από το 0 στο λ	Αυξάνεται από το 0 στο ∞	Αυξάνεται από το 0 στο λ
$\alpha < 1$	Μειώνεται από το ∞ στο λ	Μειώνεται από το ∞ στο 0	Μειώνεται από το ∞ στο λ

Πηγή: Gupta και Kundu, 2001, σελ. 121

Η ροπογεννήτρια, ο μέσος και η διακύμανση της εκθετικοποιημένης εκθετικής κατανομής μπορούν να γραφούν σε όρους της Γάμμα κατανομής (Gupta και Kundu, 2001, σελ. 122). Η αρχική συνάρτηση της εκθετικοποιημένης εκθετικής κατανομής είναι της μορφής:

$$E(x^k) = \alpha \lambda \int_0^{\infty} x^k (1 - e^{-\lambda x})^{\alpha-1} e^{-\lambda x} dx$$

Η ροπογεννήτρια, ο μέσος και η διακύμανση γράφονται ως εξής:

Μέσος	$E(x) = \frac{1}{\lambda} [\psi(\alpha + 1) - \psi(1)]$
Διακύμανση	$Var(x) = \frac{1}{\lambda^2} [\psi'(1) - \psi'(\alpha + 1)]$
Ροπογεννήτρια	$M(x) = E(e^{tx}) = \alpha \lambda \int_0^{\infty} x^k (1 - e^{-\lambda x})^{\alpha-1} e^{(t-\lambda)x} dx$

Πηγή: Gupta και Kundu, 2001, σελ. 122

όπου $\psi(\cdot)$ είναι η συνάρτηση digamma.

Τέλος, η συνάρτηση πιθανοφάνειας της εν λόγω κατανομής είναι η εξής (Gupta και Kundu, 2001, σελ. 123):

$$L(a, \lambda) = n \ln a + n \ln \lambda + (\alpha - 1) \sum_{i=1}^n \ln(1 - e^{-\lambda x_i}) - \lambda \sum_{i=1}^n x_i$$

ΕΠΙΛΟΓΟΣ

Η εκθετική οικογένεια κατανομών, η οποία μπορεί να είναι μίας ή περισσοτέρων παραμέτρων, περιλαμβάνει μεταξύ άλλων τις εξής κατανομές: Bernoulli, διωνυμική, Poisson, γεωμετρική, Γάμμα, αντίστροφη Gaussian, Dirichlet και Wishart (Evans et al., 2002, σελ. 82).

Όλες οι κατανομές που εξετάστηκαν στην παρούσα εργασία, εκθετική, Γάμμα, Βήτα, Dirichlet, Liouville, Weibull, Chi – square ανήκουν άμεσα στην εκθετική οικογένεια κατανομών. Ωστόσο, υπάρχουν και άλλες, όπως η Gaussian, η αντίστροφη Gaussian, η Bernoulli, η Reyleigh, η extreme value, η διπλή εκθετική, η Erlang, οι οποίες αν και δεν ανήκουν άμεσα στην εκθετική οικογένεια κατανομών, μπορούν να λάβουν εκθετική μορφή.

Τέλος, η παρούσα εργασία παρουσίασε σύντομα την εκθετικοποιημένη εκθετική κατανομή, η οποία ανήκει στην εκθετική οικογένεια κατανομών, αλλά παράλληλα συνιστά μία νέα γενιά εκθετικών κατανομών, που έχουν στοιχεία τόσο από τη Γάμμα όσο και από τη Weibull κατανομή.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. Θαλασσίας, Μ. (2011). *Γενικευμένα γραμμικά μοντέλα & Παραγοντικοί Σχεδιασμοί*. Εθνικό Μετσόβειο Πολυτεχνείο. Διαθέσιμο στην ιστοσελίδα dspace.lib.ntua.gr
2. Balakrishnan, N., Nevzorov, V.B. (2003). *A primer on statistical distributions*. New York: John Wiley & Sons
3. Clark, D.R., Thayer, C.A. (2004). A Primer on the Exponential Family of Distributions. Διαθέσιμο στην ιστοσελίδα <http://www.casact.org/pubs/dpp/dpp04/04dpp117.pdf>
4. Craig, P. (2009). Handout on exponential family populations and canonical conjugate prior distributions. Διαθέσιμο στην ιστοσελίδα <http://maths.dur.ac.uk/stats/courses/bayesstats/efcp.pdf>

5. Evans, M., Hastings, N., Peacock, B. (2000). *Statistical distributions*. New York: John Wiley & Sons
6. Goordazi, H., Jafarpour, S. (2009). Exponential family and generalized linear models. Διαθέσιμο στην ιστοσελίδα <http://www.cs.princeton.edu/courses/archive/spr09/cos513/scribe/lecture11.pdf>
7. Gupta, R.D., Kundu, D. (2001). Exponentiated Exponential Family: An Alternative to Gamma and Weibull Distributions. *Biometrical Journal*, 43, σελ. 117 – 130
8. Johnson, N.L., Kotz, S., Balakrishnan, N. (1994). *Continuous univariate distributions*. New York: John Wiley & Sons
9. Krishnammorthy, K. (2006). *Handbook of statistical distributions with applications*. New York: Chapman & Hall/CRC
10. Wolpert, R.L. (2011). Exponential Families. Διαθέσιμο στην ιστοσελίδα <http://www.isds.duke.edu/courses/Spring11/sta114/lec/expofam.pdf>

Διαδίκτυο

11. «The Exponential Distribution». Διαθέσιμο στην ιστοσελίδα <http://www.mast.queensu.ca/~stat455/lecturenotes/set4.pdf>
12. «Uniform and Exponential Distributions». Διαθέσιμο στην ιστοσελίδα <http://hegyvari.web.elte.hu/Uniform%20and%20exponential%20distribution.pdf>
13. «The exponential family of distributions». Διαθέσιμο στην ιστοσελίδα http://www.stat.tamu.edu/~suhasini/teaching613/exponential_family.pdf
14. <http://www.cs.columbia.edu/~jebara/4771/tutorials/lecture12.pdf>
15. <http://eclass.uoa.gr/modules/document/file.php/MATH262/541.%20%CE%A3%CF%84%CE%B1%CF%84%CE%B9%CF%83%CF%84%CE%B9%CE%BA%CE%AE%20%CE%99/E.O.K.pdf>
16. http://www.stat.tamu.edu/~suhasini/teaching613/exponential_family.pdf
17. http://en.wikipedia.org/wiki/Exponential_distribution
18. http://en.wikipedia.org/wiki/Gamma_distribution

19. http://en.wikipedia.org/wiki/Beta_distribution
20. http://en.wikipedia.org/wiki/Weibull_distribution
21. http://www.weibull.com/LifeDataWeb/weibull_probability_density_function.htm
22. http://en.wikipedia.org/wiki/Chi-square_distribution
23. http://en.wikipedia.org/wiki/Normal_distribution
24. <http://en.wikipedia.org/wiki/File:Polynomialdeg2.svg>
25. http://en.wikipedia.org/wiki/File:PDF_invGauss.png
26. http://en.wikipedia.org/wiki/Bernoulli_distribution
27. http://www.boost.org/doc/libs/1_38_0/libs/math/doc/sf_and_dist/html/math_to_olkits/dist/dist_ref/dists/bernoulli_dist.html
28. <http://pages.cs.wisc.edu/~andrzejelmm1/exp-family-glms.pdf>
29. http://en.wikipedia.org/wiki/File:Laplace_distribution_pdf.png
30. http://en.wikipedia.org/wiki/Erlang_distribution
31. www.des.upatras.gr/amm/daskalaki/UsefulDistributions_2006.pdf
32. www.mast.queensu.ca/~stat455/lecturenotes/set4.pdf
33. http://johnwinn.org/Publications/thesis/Winn03_appendices.pdf
34. <http://users.ics.tkk.fi/ahonkela/dippa/node95.html>