

**Θέματα εξετάσεων περιόδου
Μαΐου - Ιουνίου
στα Μαθηματικά Κατεύθυνσης
Τάξη - Β΄ Λυκείου**

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1^ο

Α. Αν α, β, γ ακέραιοι ώστε α/β και α/γ , να δείξετε ότι $\alpha/(\beta + \gamma)$. Μονάδες 13

Β. α. Δώστε τον ορισμό της παραβολής. Μονάδες 6

β. Η εξίσωση της εφαπτομένης της παραβολής $\psi^2 = 2px$, στο σημείο της (χ_1, ψ_1) είναι Μονάδες 6

Θέμα 2^ο

Αν $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{\beta}| = 3$ και $(\vec{a}, \vec{\beta}) = \frac{\pi}{3}$ να υπολογίσετε την τιμή του $\chi \in \mathbb{R}$ ώστε τα

διανύσματα $\vec{a} - \vec{\beta}$ και $\chi \cdot \vec{a} + \vec{\beta}$ να είναι κάθετα. Μονάδες 25

Θέμα 3^ο

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με κορυφές Α(2, 6), Β(1, 1) και Γ(3, 2). Να βρείτε:

α. Την εξίσωση της ΒΓ και την εξίσωση της ευθείας του ύψους ΑΔ. Μονάδες 12

β. Το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ. Μονάδες 13

Θέμα 4^ο

Δίνεται η έλλειψη με εξίσωση $9\chi^2 + 16\psi^2 = 144$. Να βρείτε

α. Το μήκος του μεγάλου και του μικρού άξονα, καθώς και τις εστίες Ε, Ε΄ της έλλειψης.

Μονάδες 9

β. Την εξίσωση της εφαπτομένης της έλλειψης που είναι παράλληλη με την ευθεία

$$\epsilon: 9\chi + 16\psi = 0.$$

Μονάδες 8

γ. Την εξίσωση του κύκλου που έχει κέντρο την εστία Ε και εφάπτεται της ευθείας

$$\epsilon: 9\chi + 16\psi = 0$$

Μονάδες 8

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1^ο

Α. Έστω α, β, γ ακέραιοι αριθμοί. Να αποδείξετε ότι:

a. Αν α/β και β/α τότε $\alpha = \beta$ ή $\alpha = -\beta$.

b. α/β και α/γ τότε $\alpha/(\beta + \gamma)$.

Μονάδες 13

Β₁. Να μεταφέρετε στο τετράδιό σας τις παρακάτω προτάσεις ορθά συμπληρωμένες.

a. Ο κύκλος $x^2 + y^2 = \rho^2$ έχει κέντρο..... και στο σημείο του $M(x_1, y_1)$ εφαπτομένη
την
Μονάδες 2

b. Η έλλειψη με εξίσωση $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ έχει εστίες τα σημεία $E(\dots\dots\dots)$ και $E'(\dots\dots\dots)$

και $\beta = \dots\dots\dots$

Μονάδες 2

c. Η υπερβολή με εξίσωση $\frac{y^2}{\alpha^2} - \frac{x^2}{\beta^2} = 1$ έχει ως ασύμπτωτες τις ευθείες με εξισώσεις

και και εστίες τα σημεία $E(\dots\dots\dots)$ και $E'(\dots\dots\dots)$

Μονάδες 2

Β₂. Αν $7/(\alpha+3)$ και $7/(24-\beta)$ να δείξετε ότι : $7/(\alpha+\beta)$

Μονάδες 2

Θέμα 2^ο

Αν ισχύουν : $|\vec{\alpha}| = 1, |\vec{\beta}| = 2$ $\widehat{(\vec{\beta}, \vec{\alpha})} = \frac{\pi}{3}$ να βρεθούν :

a. Το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$.

Μονάδες 7

b. Αν $\vec{\delta} = (\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta})\vec{\beta} + 2\vec{\alpha} - 3\vec{\beta}$ να βρεθεί το διάνυσμα $\vec{\delta}$ ως γραμμικός συνδυασμός των
 $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$, καθώς και το $|\vec{\delta}|$.

Μονάδες 10

c. Ναδειχθεί ότι : $\vec{\delta} \perp \vec{\alpha}$.

Μονάδες 8

Θέμα 3^ο

Δίνονται ο κύκλος $C_1 : x^2 + y^2 + 6x + 1 = 0$ και η παραβολή $C_2 : y^2 = -4x$.

a. Για τον κύκλο C_1 να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα του και για την παραβολή C_2 την
εστία και την διευθετούσα της.

Μονάδες 7

b. Να βρείτε τα κοινά σημεία Α και Β των C_1 και C_2 .

Μονάδες 9

c. Να βρείτε τις εφαπτομένες ε_1 και ε_2 της C_2 στα Α και Β αντίστοιχα και να αποδείξετε ότι οι
 ε_1 και ε_2 εφάπτονται και στον κύκλο C_1

Μονάδες 9

ΘΕΜΑ 4^ο

Δίνεται η εξίσωση:

$$\lambda\chi - 2\lambda\psi + 3\chi + 6\lambda - \psi - 2 = 0 \text{ με } \lambda \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

a. Να δείξετε ότι η (1) είναι εξίσωση ευθείας για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 7

b. Να δείξετε ότι όλες οι ευθείες που ορίζει η εξίσωση (1) διέρχονται από σταθερό σημείο
για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$

Μονάδες 8

c. Να βρεθεί ο $\lambda > 0$ ώστε οι ευθείες που ορίζει η εξίσωση (1) να σχηματίζουν με τους άξονες
συντεταγμένων τρίγωνο με εμβαδόν $E = 2$ τ.μ

Μονάδες 10

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1^ο

Α. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ που είναι παράλληλα προς τον άξονα $\psi'\psi$ και έχουν συντελεστές διεύθυνσης λ_1 και λ_2 αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta} \Leftrightarrow \lambda_1 \cdot \lambda_2 = -1$.

Μονάδες 15

Β. Έστω δύο σημεία E και E' ενός επιπέδου. Τι ονομάζεται υπερβολή με εστίες E και E' στο συγκεκριμένο επίπεδο.

Μονάδες 10

Θέμα 2^ο

Δίνονται τα σημεία $A(-1, 0)$, $B(3, 0)$, $\Gamma(-3, 4)$. Να βρείτε:

a. Την εξίσωση του ύψους AD .

Μονάδες 13

b. Την εξίσωση της διαμέσου BM .

Μονάδες 12

Θέμα 3^ο

a. Αν $11/(\alpha + 2)$ και $11/(35 - \beta)$, να δείξετε ότι $11/(\alpha + \beta)$

Μονάδες 13

b. Αν $\alpha = 7\kappa - 5$ να βρεθεί το υπόλοιπο της διαίρεσης του α με το 7 ($\kappa \neq 1$)

Μονάδες 12

Θέμα 4^ο

Δίνεται η εξίσωση: $\chi^2 + \psi^2 - 4\chi + 4\psi + 3 = 0$ (1)

a. Να δείξετε ότι η (1) παριστάνει εξίσωση κύκλου (c) του οποίου να βρεθεί το κέντρο και η ακτίνα του.

Μονάδες 8

b. Να δείξετε ότι το σημείο $M(1, -3)$ είναι εσωτερικό σημείο του κύκλου (c) και να βρεθεί η εξίσωση της χορδής του η οποία να έχει μέσο το σημείο $M(1, -3)$

Μονάδες 8

c. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης του κύκλου (c) που άγεται από το σημείο $N(0, -6)$

Μονάδες 9

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1^ο

A. Να χαρακτηρίσετε ως **σωστή (Σ)** ή **λάθος (Λ)** τις επόμενες προτάσεις. Μονάδες 8

- ♦ Αν $\vec{a} \neq 0$ και $\lambda > 0$ τότε $\lambda \vec{a} \uparrow \vec{a}$
- ♦ Αν $\vec{a} \cdot \vec{\beta} = \vec{a} \cdot \vec{\gamma}$ και $\vec{a} \neq 0$ τότε $\vec{\beta} = \vec{\gamma}$
- ♦ Αν $\vec{a} \cdot \vec{\beta} = 0$ τότε $\vec{a} = 0$ ή $\vec{\beta} = 0$
- ♦ Για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ η εξίσωση $(\lambda-2)x + (\lambda^2-4)y + (\lambda+2) = 0$
- ♦ Κάθε ευθεία που διέρχεται από το σημείο $A(1, 3)$ έχει εξίσωση $y + 3 = \lambda(x-1)$, $\lambda \in \mathbb{R}$
- ♦ Οι ευθείες $\psi = -2x$ και $2x + \psi - 3 = 0$ είναι παράλληλες
- ♦ Η εξίσωση $2x^2 = 2y^2 + 4x + 8y - 10 = 0$ παριστάνει εξίσωση κύκλου.
- ♦ Ο κύκλος $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 1$ εφάπτεται του άξονα $y'y$.

B. Μονάδες 2 + 2 + 3

2. Η εκκεντρότητα της έλλειψης $\frac{x^2}{k^2} + \frac{y^2}{4k^2} = 1$

$\alpha: \varepsilon = \sqrt{3}$, $\beta: \varepsilon = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\gamma: \varepsilon = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $\delta: \varepsilon = \frac{1}{2}$, $\varepsilon: \varepsilon = 2$.

3. Η εφαπτομένη της παραβολής $y^2 = 2px$ στο σημείο $A(2p, 2p)$ έχει εξίσωση:

$\alpha: x+2y+2p=0$, $\beta: x-2y+2p=0$, $\gamma: x+2y-2p=0$, $\delta: x-2y-2p=0$, $\varepsilon: 2py=2p(x+2p)$

4. Η εξίσωση της υπερβολής με εστίες αυτές της έλλειψης $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ και $\varepsilon=2$ είναι:

$\alpha: \frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{16} = 1$, $\beta: \frac{x^2}{12} - \frac{y^2}{4} = 1$, $\gamma: \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$, $\delta: \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$, $\varepsilon: \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$.

Γ. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση της εφαπτομένης του κύκλου $x^2 + y^2 = \rho^2$ στο σημείο $A(x_1, y_1)$ είναι $xx_1 + yy_1 = \rho^2$ Μονάδες 10

Θέμα 2^ο

Αν για τα διανύσματα \vec{a} , $\vec{\beta}$ ισχύουν οι σχέσεις, $(\vec{a}, \vec{\beta}) = \frac{2\pi}{3}$, $(\vec{a} - 2\vec{\beta}) \perp (\vec{a} + 2\vec{\beta})$ και $|\vec{a} - 3\vec{\beta}| = 19\sqrt{19}$ να υπολογίσετε τα μέτρα των διανυσμάτων \vec{a} και $\vec{\beta}$. Μονάδες 25

Θέμα 3^ο

A. Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας που τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $A(0, 1)$ και είναι παράλληλη προς το διάνυσμα $\vec{u} = (4, 2)$. Μονάδες 10

B. Αν M είναι το σημείο τομής της παραπάνω ευθείας με τον άξονα $x'x$, να βρείτε την εξίσωση της μεσοκάθετης του τμήματος AM. Μονάδες 15

Θέμα 3^ο

Έστω οι γραμμές C_1, C_2 με εξισώσεις $C_1: \frac{y^2}{k^2} - \frac{x^2}{\lambda^2} = 1$, $C_2: \frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{100} = 1$. Αν η C_1 διέρχεται

από τα σημεία $A(0, \sqrt{8})$ και $B(1, 3)$, να βρείτε:

- Τις τιμές των k, λ , τις εξισώσεις των ασύμπτωτων και την εκκεντρότητα της υπερβολής.
- Την εξίσωση της έλλειψης που έχει τις ίδιες εστίες με την υπερβολή και είναι όμοια με την έλλειψη C_2 .
- Τις κορυφές του ορθογωνίου βάσης της υπερβολής
- Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της υπερβολής στο σημείο της $A(-1, -3)$ εφάπτεται

του κύκλου με εξίσωση $x^2 + y^2 = \frac{32}{5}$

Μονάδες 10 + 3 × 5

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1^ο

A. Αν $\vec{\alpha} = (\chi_1, \psi_1)$ και $\vec{\beta} = (\chi_2, \psi_2)$ να αποδείξετε την ιδιότητα:

$\vec{\alpha} \perp \vec{\beta} \Leftrightarrow \lambda_{\vec{\alpha}} \cdot \lambda_{\vec{\beta}} = -1$ εφόσον τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ δεν είναι παράλληλα προς τον $\psi'\psi$.

Μονάδες 10

B. Να δώσετε τον ορισμό της παραβολής.

Μονάδες 9

Γ. Να συμπληρώσετε τις προτάσεις

a. Η εξίσωση $\chi^2 + \psi^2 + A\chi + B\psi + \Gamma = 0$ παριστάνει κύκλο όταν

b. Η εφαπτομένη της παραβολής $\psi^2 = 2\rho\chi$ στο σημείο της $M(\chi_1, \psi_1)$ έχει εξίσωση

c. Η εξίσωση $A\chi + B\psi + \Gamma = 0$ παριστάνει ευθεία όταν

Μονάδες 6

Θέμα 2^ο

Αν $|\vec{\alpha}| = 2$, $|\vec{\beta}| = 3$ και $\widehat{(\vec{\alpha}, \vec{\beta})} = \frac{\pi}{3}$, να υπολογίσετε τη γωνία των διανυσμάτων:

$$\vec{u} = 3\vec{\alpha} - \vec{\beta} \text{ και } \vec{v} = -3\vec{\alpha} + 2\vec{\beta}$$

Μονάδες 25

Θέμα 3^ο

a. Δίνεται τρίγωνο ABΓ με κορυφές A(3, 2), B(-1, 0) και Γ(-3, 4)

Μονάδες 8

b. Την εξίσωση του ύψους πουάγεται από την κορυφή B.

Μονάδες 8

c. Το εμβαδόν του τριγώνου ABΓ

Μονάδες 9

Θέμα 4^ο

Κύκλος με κέντρο την αρχή των αξόνων O, διέρχεται από το σημείο A(1, $\sqrt{3}$)

a. Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου.

Μονάδες 5

b. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης του κύκλου που είναι παράλληλη προς την ευθεία OA.

Μονάδες 10

c. Αν ο κύκλος τέμνει τον άξονα $\chi'\chi$ στα σημεία E' και E, να βρείτε την εξίσωση της έλλειψης που έχει εστίες τα σημεία E' και E και μεγάλο άξονα 8.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1^ο

A. Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη του κύκλου $\chi^2 + \psi^2 = \rho^2$ στο σημείο $A(\chi_1, \psi_1)$ είναι:

$$\chi\chi_1 + \psi\psi_1 = \rho^2$$

Μονάδες 10

B. Τι ονομάζεται εσωτερικό διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$;

Μονάδες 5

Γ.

1. Ο κύκλος (C): $\chi^2 + \psi^2 - 2\chi + 4\psi - 7 = 0$ έχει κέντρο:

$$\alpha: (1, 2), \quad \beta: (1, -2) \quad \gamma: (-1, 2) \quad \delta: (-2, 4)$$

2. Αν για μία ευθεία (ε): $\alpha\chi + \beta\psi + \gamma = 0$ είναι $d(K, \varepsilon)$ τότε η (ε) εφάπτεται στον κύκλο με κέντρο K και ακτίνα ρ . Σ ☐ ή Λ ☐

3. Ο κύκλος με εξίσωση $(\chi-2)^2 + (\psi-2)^2 = 9$ έχει το κέντρο του στην ευθεία $\psi = \chi$

Σ ☐ ή Λ ☐

4. Οι κύκλοι με εξισώσεις $(\chi-2)^2 + (\psi+3)^2 = 16$ και $\chi^2 + \psi^2 - 4\chi + 6\psi + 7 = 0$ είναι ομό-κεντροι. Σ ☐ ή Λ ☐

5. Ο κύκλος $(\chi-1)^2 + (\psi-1)^2 = 1$ είναι μοναδιαίος

Σ ☐ ή Λ ☐

Μονάδες 10

Θέμα 2^ο

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ με $\widehat{(\vec{\alpha}, \vec{\beta})} = \frac{\pi}{6}$, $|\vec{\alpha}| = \sqrt{2}$ και $|\vec{\beta}| = 2\sqrt{2}$ να βρεθούν:

$$\alpha. \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = \dots \quad \beta. \vec{\alpha}^2 + \vec{\beta}^2 = \dots \quad \gamma. (\vec{\alpha} + \vec{\beta})^2 = \dots \quad \delta. |\vec{\alpha} + \vec{\beta}| = \dots$$

$$(2\vec{\alpha} + 3\vec{\beta}) \cdot (4\vec{\alpha} - 5\vec{\beta}) = \dots$$

Μονάδες 25

Θέμα 3^ο

Δίνεται η εξίσωση $(\chi + \psi - 5) + \lambda(2\chi + \psi - 7) = 0$ όπου $\lambda \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι:

a. Η παραπάνω εξίσωση παριστάνει ευθεία για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 10

b. Η ευθεία με εξίσωση τη δοσμένη διέρχεται από σταθερό σημείο για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 15

Θέμα 4^ο

Δίνεται η παραβολή με εξίσωση $\psi^2 = 16\chi$. Να βρείτε:

a. Την εξίσωση της εφαπτομένης της στο σημείο $A(1, 4)$

Μονάδες 10

b. Το σημείο που η εφαπτομένη τέμνει τον άξονα $\chi'\chi$.

Μονάδες 5

c. Την εξίσωση της εφαπτομένης της παραβολής που είναι κάθετη στο διάνυσμα $\vec{u} = (1, 2)$

Μονάδες 10

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1^ο

Α. Έστω α, β, γ ακέραιοι αριθμοί. Να αποδείξετε τις επόμενες ιδιότητες:

a. Αν α / β και β / α , τότε $\alpha = \beta$ ή $\alpha = -\beta$

b. Αν α / β και α / γ , τότε $\alpha / (\beta + \gamma)$

Μονάδες: 12

Β. Έστω δύο σημεία E και E' ενός επιπέδου. Τι ονομάζεται *έλλειψη* με εστίες τα σημεία E και E' στο συγκεκριμένο επίπεδο;

Μονάδες: 5

Γ. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος**, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

a. Αν $\vec{a} \perp \vec{\beta}$ τότε $\vec{a} \cdot \vec{\beta} = 0$ και αντιστρόφως.

b. Η εξίσωση της μορφής $\chi^2 + \psi^2 + A\chi + B\psi + \Gamma = 0$ με $A^2 + B^2 - 4\Gamma < 0$ παριστάνει κύκλο.

c. Η εκκεντρότητα ϵ της υπερβολής είναι μικρότερη της μονάδας.

d. Δύο ευθείες είναι παράλληλες όταν έχουν ίσους συντελεστές διεύθυνσης.

Μονάδες 8

Θέμα 2^ο

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{a} = (2, 5)$ και $\vec{\beta} = (1, 3)$

Α. Να βρείτε το μέτρο του διανύσματος $\vec{\gamma} = 3\vec{a} - 4\vec{\beta}$

Μονάδες 12

Β. Να βρείτε τον αριθμό $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε το διάνυσμα $\vec{\delta} = (\lambda^2 + \lambda, \lambda)$ να είναι παράλληλο στο \vec{a}

Μονάδες 13

Θέμα 3^ο

Έστω α άρτιος ακέραιος και β περιττός ακέραιος

Α. Να αποδείξετε ότι ο $\frac{2\alpha^2 + \beta^2 - 1}{8}$ είναι ακέραιος.

Μονάδες 12

Β. Να αποδείξετε ότι ο αριθμός $A = (\alpha^2 + 12) \cdot (\beta^2 - 1)$ είναι πολλαπλάσιο του 32.

Μονάδες 13

Θέμα 4^ο

Δίνεται η εξίσωση $\chi^2 + \psi^2 - 4\psi + 3 = 0$

Α. Ναδειχθεί ότι η παραπάνω εξίσωση παριστάνει κύκλο, του οποίου να βρεθεί το κέντρο και η ακτίνα.

Μονάδες 6

Β. Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας $\psi = \lambda\chi$, ώστε να αποτελεί εφαπτομένη του κύκλου.

Μονάδες 8

Γ. Να βρεθεί η εξίσωση της υπερβολής $\frac{\chi^2}{\alpha^2} - \frac{\psi^2}{\beta^2} = 1$, που έχει ως ασύμπτωτες τις ευθείες του προηγούμενου ερωτήματος, όταν $\beta^2 = \alpha^2 + 2$

Μονάδες 11

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1^ο

Α. Αν \vec{a}, \vec{v} είναι δύο διανύσματα του επιπέδου με $\vec{a} \neq \vec{0}$ και η προβολή του \vec{v} στο \vec{a} συμβολίζεται με $\text{προβ}_{\vec{a}} \vec{v}$, τότε να αποδείξετε ότι $\vec{a} \cdot \vec{v} = \vec{a} \cdot \text{προβ}_{\vec{a}} \vec{v}$

Μονάδες 10

α. Να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα του κύκλου που έχει εξίσωση:

$$x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 = 0$$

Μονάδες 5

β. Η παραβολή που έχει εστία E (0, 4) και κορυφή το O (0, 0), έχει εξίσωση

Α. $y^2 = 8x$ Β. $y^2 = -8x$ Γ. $y^2 = 16x$

Δ. $x^2 = 16y$ Ε. $x^2 = 8y$

Μονάδες 5

γ. Πότε η εξίσωση $Ax + By + \Gamma = 0$ παριστάνει ευθεία;

Μονάδες 2

δ. Δίνονται τα σημεία A(4, -2) και B(-1, 4). Να βρείτε τις συντεταγμένες του \overrightarrow{AB} .

Μονάδες 3

Θέμα 2^ο

α. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda = -\sqrt{3}$ και απέχει από την αρχή των αξόνων απόσταση ίση με 3 μονάδες. Μονάδες 15

β. Αν A και B είναι τα σημεία τομής της ευθείας με τους θετικούς ημιάξονες να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου OAB. Μονάδες 10

Θέμα 3^ο

Δίνεται η έλλειψη $x^2 + 4y^2 = 4$.

Να βρείτε τα μήκη των αξόνων, τις εστίες και την εκκεντρότητα της έλλειψης.

Μονάδες 25

Θέμα 4^ο

Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτόμενων του κύκλου $x^2 + y^2 = 10$ οι οποίες είναι:

α. Παράλληλες στην ευθεία $x + y = 0$

Μονάδες 8

β. Διέρχονται από το σημείο (0, 10)

Μονάδες 9

γ. Κάθετες στην ευθεία $x + y = 0$.

Μονάδες 8

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1^ο

A₁. Να γράψετε την εξίσωση του κύκλου που έχει κέντρο K(x₀, y₀) και ακτίνα ρ.
Μονάδες 2

A₂. Πότε η εξίσωση $x^2 + y^2 + Ax + By + \Gamma$ παριστάνει κύκλο;

Ποιο είναι το κέντρο του και ποια η ακτίνα του ;

Μονάδες 3

A₃. Να αποδείξετε ότι η εφαπτόμενη ε του κύκλου c: $x^2 + y^2 = \rho^2$ σε ένα σημείο του A(x₁, y₁) έχει εξίσωση $xx_1 + yy_1 = \rho^2$

Μονάδες 8

B₁. Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

Δίνεται κύκλος $x^2 + y^2 = 10$ και το σημείο του M(1, -3). Η εφαπτομένη του κύκλου στο σημείο M έχει εξίσωση :

A. $x + 3y = 10$ B. $5x - y = 8$, Γ. $x - 3y = 10$, Δ. $3x + 2y = 3$ E. $-\frac{1}{2}x + y = 5$

Μονάδες 3

B₂. Στη στήλη Α δίνονται οι εξισώσεις κωνικών τομών και στη στήλη Β η ονομασία τους και οι εστίες τους. Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα της στήλης Α και δίπλα σε κάθε γράμμα τον αριθμό της στήλης Β που αντιστοιχεί στη σωστή εξίσωση.

Στήλη Α

Στήλη Β

α. $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{2} = 1$

1. Έλλειψη με E'(0, -√5) E(0, √5)

2. Έλλειψη με E'(√5, 0) E(-√5, 0)

β. $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$

3. Υπερβολή με E'(0, -√5) E(0, √5)

Μονάδες 9

γ. $y^2 = 8x$

4. Υπερβολή με E'(√5, 0) E(-√5, 0)

5. Παραβολή με E(2, 0)

6. Παραβολή με E(0, 2)

Θέμα 2^ο

A. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας την ένδειξη Σωστό ή Λάθος δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α. Το εσωτερικό γινόμενο δυο διανυσμάτων δίνεται από τη σχέση:

$$\vec{a} \cdot \vec{\beta} = |\vec{a}| \cdot |\vec{\beta}| \cdot \sin(\widehat{\vec{a}, \vec{\beta}})$$

β. Ο κύκλος $x^2 + y^2 = 4$ και η ευθεία $y = 2x$ εφάπτονται.

γ. Ευθεία ε: $Ax + By + \Gamma = 0$ και σημείο M(x₀, y₀) τότε η απόσταση του M από την ευθεία ε

$$\text{δίνεται από τη σχέση: } d(M_0, \varepsilon) = \frac{|Ax_0 + By_0 + \Gamma|}{A^2 + B^2}$$

Μονάδες 15

B. Αν α περιττός ακέραιος ναδειχθεί ότι: i) $\alpha^2 = 4\rho + 1$ ii) $\frac{\alpha^2 + (\alpha+2)^2 + (\alpha+4)^2 + 1}{12}$ είναι ακέραιος αριθμός
Μονάδες 10

Θέμα 3^ο

Να βρείτε την εξίσωση ευθείας η οποία διέρχεται από το σημείο A(-2, 3) και είναι κάθετη στην ευθεία $2x - 3y = 0$. Ποιο είναι το σημείο τομής των δύο ευθειών; Μονάδες 25

Θέμα 4^ο

Αν $|\vec{a}| = |\vec{\beta}| = 1$ και $\left(\widehat{\vec{a}, \vec{\beta}}\right) = \frac{2\pi}{3}$, και τα διανύσματα $\vec{u} = 2\vec{a} + 4\vec{\beta}$ και $\vec{v} = \vec{a} - \vec{\beta}$. Να

υπολογίσετε i) $\vec{a} \cdot \vec{\beta} = ?$, ii) $\vec{u} \cdot \vec{v} = ?$, iii) $|\vec{v}| = ?$ Μονάδες 10 + 10 + 5

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1^ο

Α. Δίνεται κύκλος $x^2 + y^2 = \rho^2$ και ένα σημείο του $A(x_1, y_1)$. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση της εφαπτομένης του κύκλου στο σημείο Α είναι $xx_1 + yy_1 = \rho^2$.

Μονάδες 10

Β. Τι ονομάζεται έλλειψη με εστίες τα σημεία Ε και Ε' του επιπέδου;

Μονάδες 5

Γ. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση :

α. Οι αριθμοί $2n$ και $2n + 2$ είναι διαδοχικοί άρτιοι για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

β. Κάθε ακέραιος αριθμός κ μπορεί να πάρει την μορφή

$$\kappa = 3\rho \text{ ή } \kappa = 3\rho + 1 \text{ ή } \kappa = 3\rho + 2, \quad \rho \in \mathbb{Z}.$$

γ. Η εκκεντρότητα της έλλειψης $4x^2 + y^2 = 4$ είναι $\varepsilon = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

δ. Υπάρχουν $x \in \mathbb{R}$ τέτοια ώστε τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (x + 1, 3)$ $\vec{\beta} = (x, 1)$ να είναι κάθετα.

ε. Αν οι ευθείες $y = -\frac{\kappa}{3}x + 1$ και $y = -\lambda x + 2$ είναι παράλληλες, τότε $\kappa = 3\lambda$.

Μονάδες 10

Θέμα 2^ο

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ με $(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \frac{\pi}{3}$. Αν $|\vec{\alpha}| = 2$ και $|\vec{\beta}| = 4$ να βρεθούν:

$$\alpha) \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}, \quad \beta) \vec{\alpha}^2 + \vec{\beta}^2, \quad \gamma) (\vec{\alpha} + \vec{\beta})^2, \quad \delta), |\vec{\alpha} + \vec{\beta}| \quad \varepsilon) (2\vec{\alpha} + 3\vec{\beta}) \cdot (4\vec{\alpha} - 5\vec{\beta})$$

Μονάδες 25

Θέμα 3^ο

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με κορυφές $A(2, 2)$ $B(-1, -1)$ και $\Gamma(3, -\frac{1}{2})$.

Α. Να βρεθεί η εξίσωση του ύψους ΑΔ.

Μονάδες 15

Β. Να βρεθεί το μήκος του ΑΔ.

Μονάδες 10

Θέμα 4^ο

Α. Να βρείτε την εξίσωση της παραβολής που έχει άξονα συμμετρίας τον $x'x$ και διέρχεται από το σημείο $A(1, 3)$.

Β. Να βρεθεί η εφαπτομένη της παραβολής στο σημείο Α

Γ. Να βρεθεί το εμβαδόν του τριγώνου που σχηματίζεται από την παραπάνω εφαπτομένη, την διευθετούσα της παραβολής και τον άξονα $x'x$

Μονάδες 8 + 5 + 12

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1^ο

A. Αν α, β ακέραιοι αριθμοί να δείξετε ότι ισχύει η ιδιότητα:

$$\text{Αν } \alpha / \beta \text{ και } \beta / \alpha \text{ τότε } \alpha = \beta \text{ ή } \alpha = -\beta$$

Μονάδες 10

B. Να σημειώσετε αν είναι **σωστή (Σ)** ή **λάθος (Λ)** καθεμιά από τις παρακάτω προτάσεις

i. Αν $\vec{\alpha} = (\chi_1, \psi_1)$ και $\vec{\beta} = (\chi_2, \psi_2)$ δύο διανύσματα του επιπέδου, τότε το εσωτερικό τους

$$\text{γινόμενο ισούται με: } \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = \chi_1 \chi_2 - \psi_1 \psi_2$$

ii. Η ευθεία με εξίσωση $A\chi + B\psi + \Gamma = 0$ είναι παράλληλη στο διάνυσμα $\vec{\delta} = (B, -A)$

iii. Οι ασύμπτωτες της υπερβολής με εξίσωση $\frac{\chi^2}{\alpha^2} - \frac{\psi^2}{\beta^2} = 1$ είναι οι $\psi = \frac{\alpha}{\beta}\chi$ και $\psi = -\frac{\alpha}{\beta}\chi$

iv. Η εξίσωση της έλλειψης με εστίες τα σημεία $E'(-\gamma, 0)$, $E(\gamma, 0)$ και σταθερό άθροισμα $2a$

$$\text{είναι } \frac{\chi^2}{\alpha^2} + \frac{\psi^2}{\beta^2} = 1 \text{ με } \beta^2 = a^2 - \gamma^2$$

v. Η εφαπτομένη της παραβολής $\psi^2 = 2\rho\chi$ στο σημείο $M(\chi_1, \psi_1)$ έχει εξίσωση $\psi\psi_1 = \rho(\chi + \chi_1)$

Μονάδες $5 \times 3 = 15$

Θέμα 3^ο

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ με $|\vec{\alpha}| = 2$, $|\vec{\beta}| = 2\sqrt{2}$ και $\widehat{(\vec{\alpha}, \vec{\beta})} = \frac{\pi}{4}$

1. Να βρείτε το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$

Μονάδες 8

2. Να δείξετε ότι $|2\vec{\alpha} - \vec{\beta}| = \sqrt{8}$

Μονάδες 8

3. Να υπολογίσετε την γωνία των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$, $\vec{\nu} = 2\vec{\alpha} - \vec{\beta}$

Μονάδες 9

Θέμα 3^ο

Δίνεται η εξίσωση $(\mu - 1)\chi + (\mu^2 - 1)\psi - \mu^2 + 1 = 0$ (1)

1. Για ποιες τιμές του πραγματικού αριθμού μ η παραπάνω εξίσωση παριστάνει ευθεία;

Μονάδες 12

2. Για ποιες τιμές του μ η ευθεία αυτή είναι παράλληλη στην ευθεία με εξίσωση

$$\chi + 5\psi + 2005 = 0$$

Μονάδες 13

Θέμα 4^ο

Δίνεται η εξίσωση $\chi^2 - 6\chi + \psi^2 + 2\psi + 1 = 0$

1. Να δείξετε ότι παριστάνει κύκλο και να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα του.

Μονάδες 9

2. Να δείξετε ότι το $M(4, -2)$ είναι εσωτερικό σημείο του κύκλου

Μονάδες 8

3. Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το M και τέμνει τον κύκλο στα σημεία A, B ώστε το M να είναι το μέσο του AB .

Μονάδες 8

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1^ο

A. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο γραπτό σας την ένδειξη **Σωστό ή Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α. Αν ο αριθμός k είναι ακέραιος τότε ο αριθμός $k \cdot (k^2 + 1)$ είναι άρτιος. Μονάδες 5

β. Η υπερβολή με εξίσωση $\frac{\psi^2}{36} - \frac{\chi^2}{64} = 1$ έχει εκκεντρότητα $\varepsilon = \frac{4}{3}$. Μονάδες 5

B. Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί στην σωστή απάντηση.

1. Αν ο αριθμός k είναι ακέραιος, το υπόλοιπο της διαίρεσης του αριθμού $A = 2005k - 1989$ με τον 2005 είναι:

α. 1989

γ. 2005

ε. -19

β. 16

δ. -16

Μονάδες 5

2. Η παραβολή με διευθετούσα $x = -2$ και εστία στον άξονα $x'x$ έχει εξίσωση:

α. $\psi^2 = 6\chi$ **β.** $\psi^2 = 8\chi$ **γ.** $\psi^2 = -4\chi$ **δ.** $\psi^2 = -2\chi$ Μονάδες 5

3. Στην έλλειψη με εξίσωση $x^2 + 4y^2 = 4$ το μήκος του μεγάλου άξονα είναι:

α. 2, **β.** $\frac{1}{2}$, **γ.** 4, **δ.** 8, Μονάδες 5

Θέμα 2^ο

A. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (x_1, y_1)$ και $\vec{\beta} = (x_2, y_2)$ τα οποία δεν είναι παράλληλα προς τον άξονα $y'y$ και έχουν συντελεστές διεύθυνσης λ_1 και λ_2 αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

$\vec{\alpha} \perp \vec{\beta} \Leftrightarrow \lambda_1 \cdot \lambda_2 = -1$ Μονάδες 10

B. Δίνονται τα σημεία $A(1, 2)$, $B(4, 1)$ και το σημείο $\Gamma(x_0, y_0)$ το οποίο ανήκει στην ευθεία

(ε): $2x + y = 14$. Να βρεθούν οι συντεταγμένες του σημείου Γ ώστε $\widehat{BAG} = 90^\circ$

Θέμα 3^ο Μονάδες 15

Δίνονται τα σημεία $A(5, -2)$, $B(11, 0)$ και $\Gamma(-1, 6)$. Να βρείτε:

α. την εξίσωση του ύψους AD του τριγώνου $AB\Gamma$ Μονάδες 8

β. την εξίσωση της διαμέσου BE του τριγώνου $AB\Gamma$ Μονάδες 8

γ. το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$ Μονάδες 9

Θέμα 4^ο

Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 - 8x + 6y = 0$ (1)

α. Ναδειχθεί ότι η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο του οποίου να βρείτε το κέντρο του κ και την ακτίνα του ρ .

β. Ναδειχθεί ότι ο κύκλος διέρχεται από την αρχή των αξόνων $O(0, 0)$

γ. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτόμενης του κύκλου στο σημείο του $O(0, 0)$

δ. Έστω τα σημεία $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$ με x_1, x_2, y_1, y_2 ανήκουν στο \mathbb{R} και ικανοποιούν τις ισότητες $x_1^2 + y_1^2 = 8x_1 - 6y_1$ και $x_2^2 + y_2^2 = 8x_2 - 6y_2$.

Να βρείτε την μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της παράστασης $\Pi = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2$

Μονάδες 7 + 4 + 7 + 7

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1^ο

Α. Να αποδειχθεί ότι η εφαπτομένη του κύκλου $x^2 + y^2 = \rho^2$ στο σημείο του $A(x_1, y_1)$ έχει εξίσωση : $x_1x + y_1y = \rho^2$.
Μονάδες 9

Β. i) Να δοθεί ο ορισμός του εσωτερικού γινομένου $\vec{a} \cdot \vec{\beta}$ δύο διανυσμάτων \vec{a} και $\vec{\beta}$.
Μονάδες 5

ii) Να συμπληρωθούν τα κενά.

α. $\vec{a} \perp \vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{\beta} = \dots\dots\dots$

β. $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{\beta} = \dots\dots\dots$

γ. $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{\beta} = \dots\dots\dots$

δ. $\vec{a} = (x_1, y_1), \vec{\beta} = (x_2, y_2) \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{\beta} = \dots\dots\dots$ Μονάδες 4

Γ) Να συμπληρωθούν τα κενά του πίνακα.

Κωνική τομή	Εστίες	Εξίσωση εφαπτομένης	Εκκεντρότητα	Ασύμπτωτες
$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1, \alpha > \beta > 0$				
$\frac{y^2}{\alpha^2} - \frac{x^2}{\beta^2} = 1, \alpha, \beta > 0$				

Μονάδες 7

Θέμα 2^ο

Α. Για τα διανύσματα $\vec{a}, \vec{\beta}$ ισχύει: $|\vec{a}| = 1, |\vec{\beta}| = 2$ και $\widehat{(\vec{a}, \vec{\beta})} = \frac{\pi}{3}$. Έστω τα διανύσματα $\vec{u} = 2\vec{a} + 3\vec{\beta}, \vec{v} = \vec{a} - 2\vec{\beta}$. Να υπολογισθούν :

α. Το εσωτερικό γινόμενο $\vec{a} \cdot \vec{\beta}$

β. Το μέτρο του διανύσματος \vec{u}

γ. Το εσωτερικό γινόμενο $\vec{u} \cdot \vec{v}$.
Μονάδες 15

Β. Αν ο αριθμός α είναι ακέραιος, τότε και ο αριθμός $\frac{\alpha \cdot (\alpha^2 + 1)}{2}$ είναι ακέραιος.
Μονάδες 10

Θέμα 3^ο

Δίνονται οι εξισώσεις $\lambda x - y + 1 = 0$ (1) και $(\lambda + 1)x - (1 - \lambda)y + 4 = 0$ (2).

α. Να δείξετε ότι οι εξισώσεις (1) και (2) παριστάνουν ευθείες, τις (ϵ_1) και (ϵ_2) αντίστοιχα, για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.
Μονάδες 5

β. Να υπολογισθεί το $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε η (ϵ_2) να είναι κάθετη στην ευθεία $\zeta: x - 3y + 4 = 0$.
Μονάδες 5

γ. Να δείξετε ότι οι ϵ_1 και ϵ_2 τέμνονται για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.
Μονάδες 7

δ. Να δείξετε ότι η ϵ_2 διέρχεται από σταθερό σημείο για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$. Μονάδες 8

Θέμα 4^ο

Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 - 2\lambda^2x + 2\lambda y - 2\lambda^3 = 0$ (1).

α. Για ποιες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο; Μονάδες 8

β. Να δείξετε ότι τα κέντρα των παραπάνω κύκλων βρίσκονται σε μια παραβολή.
Μονάδες 8

γ. Αν η ευθεία $x - 2y + 1 = 0$ εφάπτεται της παραβολής στο σημείο $K(x_0, y_0)$, να βρείτε την ακτίνα του κύκλου που έχει κέντρο το σημείο $K(x_0, y_0)$.
Μονάδες 9

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1^ο

A. Αν α, β, γ ακέραιοι με $\alpha \neq 0$, να δείξετε ότι αν α / β και α / γ τότε $\alpha / (\beta + \gamma)$.

Μονάδες 11

B. Να κάνετε τη σωστή αντιστοίχιση

1. $\chi^2 - \psi^2 = 9$	
2. $\frac{\chi^2}{2} + \frac{\psi^2}{3} = 1$	A. κύκλος
3. $\frac{\psi^2}{5} - \frac{\chi^2}{6} = 1$	B. έλλειψη
4. $\psi^2 = \chi$	Γ. παραβολή
5. $(\chi - 1)^2 + \psi^2 = 1$	Δ. υπερβολή
6. $\psi^2 = 4\chi^2$	E. ευθείες

Μονάδες 6

Γ. να απαντήσετε με **Σωστό (Σ)** ή **Λάθος (Λ)** στις παρακάτω προτάσεις :

a. Αν $\vec{\alpha} = (x_1, \psi_1)$ και $\vec{\beta} = (x_2, \psi_2)$ τότε $\vec{\alpha} // \vec{\beta} \Leftrightarrow \det(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = 1$. Μονάδες 2

b. Η καμπύλη $\psi^2 = 4\chi$ έχει εστία E(1, 0). Μονάδες 2

c. Η εξίσωση της ευθείας που περνά από το σημείο A(2,3) και έχει συντελεστή $\lambda = 4$ είναι η $\psi - 2 = 4(\chi - 3)$. Μονάδες 2

d. Η γωνία του διανύσματος $\vec{\alpha} = (2, 2)$ με τον άξονα $\chi'\chi$ είναι 45° . Μονάδες 2

Θέμα 2^ο

Δίδονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (-2, 2\sqrt{3})$ και $\vec{\beta} = (\sqrt{3}, 3)$

a. Να βρεθούν τα μέτρα τους. Μονάδες 8

b. Να βρεθεί το εσωτερικό γινόμενο Μονάδες 8

c. Να βρεθεί η γωνία $\widehat{(\vec{\alpha}, \vec{\beta})}$. Μονάδες 9

Θέμα 3^ο

Δίνεται η έλλειψη $c : 4\chi^2 + 9\psi^2 = 36$.

a. Να βρεθούν οι ημιάξονες, οι εστίες και να γίνει μια πρόχειρη γραφική παράσταση της. Μονάδες 10

b. Να δείξετε ότι το σημείο $M\left(\frac{3}{2}, \sqrt{3}\right)$ ανήκει στην έλλειψη. Μονάδες 5

c. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της έλλειψης στο σημείο M. Μονάδες 10

Θέμα 4^ο

Στο ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων XOΨ παίρνουμε τα σημεία A(4, 2) και B(2, 4).

a. Να βρεθεί το εμβαδόν του τριγώνου OAB. Μονάδες 6

b. Να βρεθούν οι εξισώσεις των μεσοκαθέτων των πλευρών OA και OB. Μονάδες 9

c. Να βρεθούν οι συντεταγμένες του περικέντρου και η εξίσωση του περιγεγραμμένου κύκλου στο τρίγωνο OAB. Μονάδες 10

« Τα θεμέλια των μαθηματικών και ένα μεγάλο μέρος του περιεχομένου τους είναι ελληνικά.

*Οι Έλληνες έθεσαν τις πρώτες επιστημονικές βάσεις, επινόησαν τις μεθόδους *ab initio* και καθόρισαν την ορολογία. Με λίγα λόγια τα Μαθηματικά είναι μια ελληνική επιστήμη, οποιαδήποτε και αν είναι ή ανάπτυξη που επέφερε ή θα επιφέρει ή σύγχρονη έρευνα »*

T. L. Heath