

**Θέματα εξετάσεων περιόδου
Μαΐου-Ιουνίου
στην Γεωμετρία
Τάξη Α! Λυκείου**

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1^ο

- A. Να αποδείξετε ότι διάμεσος τραπεζίου είναι παράλληλη προς τις βάσεις της και ίση με το ημιάθροισμα της.

Μονάδες 15

- B. Γράψτε τα κριτήρια για να είναι ένα τετράπλευρο παραλληλόγραμμο.

Μονάδες 10

Θέμα 2^ο

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) με $\hat{\Gamma} = 30^\circ$. Αν E, Z είναι τα μέσα των AB και $A\Gamma$ να αποδείξετε ότι $EZ = AB$

Μονάδες 25

Θέμα 3^ο

Να αποδείξετε ότι τα μέσα των ίσων πλευρών ισοσκελούς τριγώνου ισαπέχουν:

- i. Από τη βάση του

Μονάδες 12

- ii. Από τις ίσες πλευρές του

Μονάδες 13

Θέμα 4^ο

Δίνεται το τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ ($AB \parallel \Gamma\Delta$) με $AB = 2\Gamma\Delta$. και E το σημείο τομής των $A\Delta$ και $B\Gamma$.

Να αποδείξετε ότι:

- i. $EG = \Gamma B$

Μονάδες 8

- ii. Αν το σημείο M είναι το μέσο της AB , οι $EM, \Gamma\Delta$ διχοτομούνται

Μονάδες 8

- iii. Οι διαγώνιες του τραπεζίου $AB\Gamma\Delta$ τέμνονται πάνω στη EM .

Μονάδες 9

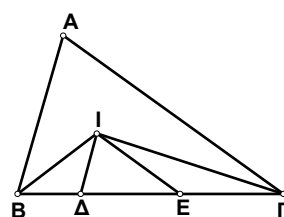
ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1^ο

- A. Να δείξετε ότι σε κάθε τρίγωνο το άθροισμα των γωνιών του είναι ίσο με δύο ορθές.
Μονάδες 13
- B. Να γράψετε τα τρία κριτήρια ισότητας δύο τυχαίων τριγώνων
Μονάδες 6
- C. Να συμπληρώσετε τις παρακάτω προτάσεις:
- Το μέτρο μίας εγγεγραμμένης γωνίας είναι ίσο με το.....του μέτρου του αντίστοιχου τόξου της.
 - Κάθε εγγεγραμμένη γωνία που βαίνει σε ημικύκλιο είναι.....
 - Κάθε επίκεντρη γωνία είναι.....από την εγγεγραμμένη που βαίνει στο ίδιο τόξο
- Μονάδες 6

Θέμα 2^ο

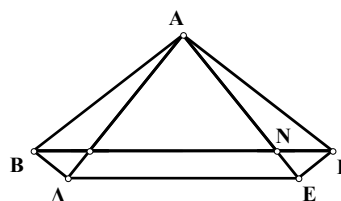
Στο τρίγωνο ABΓ, οι BI και ΓI είναι διχοτόμοι των γωνιών B και Γ. Ακόμη είναι: ID//AB και IE//AG. Να δείξετε ότι:



- a. $\widehat{BIG} = 90^\circ + \frac{\widehat{A}}{2}$
Μονάδες 12
- b. $BΓ = ID + DE + IE$
Μονάδες 13

Θέμα 3^ο

Το τρίγωνο ABΓ είναι ισοσκελές ($AB = AG$), με $BM = ΓN$ και Δ, E οι προβολές των B και Γ πάνω στις AM και AN αντίστοιχα. Να δείξετε ότι:

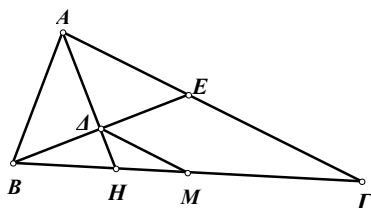


1. $AM = AN$
Μονάδες 12
2. Το τρίγωνο AΔE είναι ισοσκελές
Μονάδες 13

Θέμα 4^ο

Στο τρίγωνο ABΓ είναι $AG > AB$. Αν είναι το M μέσο της BΓ και η BΔ είναι κάθετη στη διχοτόμο AH της γωνίας A του τριγώνου. Να δείξετε ότι:

1. $EG = AG - AB$
Μονάδες 13
2. $\widehat{BAM} = 90^\circ + \frac{\widehat{A}}{2}$



Μονάδες 12

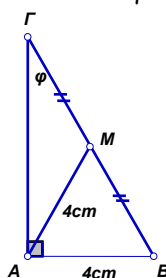
ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1^ο

- A. Να αποδείξετε ότι: Το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα μέσα των δύο πλευρών τριγώνου είναι παράλληλο προς την τρίτη πλευρά και ίσο με το μισό της. Μονάδες 13
- B. Γράψτε τα τέσσερα κριτήρια ώστε ένα τετράπλευρο να είναι παραλληλόγραμμο. Μονάδες 12

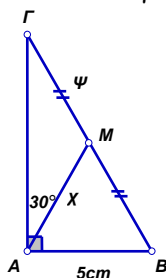
Θέμα 2^ο

- A. Στο παρακάτω σχήμα να υπολογίσετε τη γωνία $\hat{\phi}$.



Μονάδες 12,5

- B. Στο παρακάτω σχήμα να υπολογίσετε τα χ και ψ .



Μονάδες 12,5

Θέμα 3^ο

Σε ισοσκελές τρίγωνο ABΓ ($AB = AG$), οι διχοτόμοι των εξωτερικών γωνιών B και Γ τέμνονται στο H. Στις πλευρές AB και AG παίρνουμε σημεία Δ και Ε αντίστοιχα,

ώστε $AD = \frac{1}{3}AB$ και $AE = \frac{1}{3}AG$. Να αποδειχθεί ότι:

- i. $BH = GH$ Μονάδες 12
- ii. Το τρίγωνο ΔHE είναι ισοσκελές. Μονάδες 13

Θέμα 4^ο

Δίνεται τρίγωνο ABΓ με $AB < AG$. Φέρουμε τη διχοτόμο AZ. Η κάθετη από το B στην AZ τέμνει την AZ στο Δ και την AG στο Ε.

Να αποδειχθεί ότι:

- i. $EG = AG - AB$ Μονάδες 8
- ii. $DM = \frac{AG - AB}{2}$, όπου M το μέσο της BG. Μονάδες 8
- iii. $\widehat{BDM} = 90^\circ + \frac{\hat{A}}{2}$ Μονάδες 9

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1^ο

A. Να αποδείξετε ότι: ένα τετράπλευρο να είναι παραλληλόγραμμο αν ισχύει μια από τις επόμενες προτάσεις:

- Οι απέναντι πλευρές του είναι ανά δύο ίσες. Μονάδες 8
- Οι απέναντι γωνίες του είναι ανά δύο ίσες. Μονάδες 8

B. Να γράψετε στο τετράδιο σας τις προτάσεις συμπληρωμένες σωστά:

- Κάθε σημείο της διχοτόμου μιας γωνίας και αντίστροφα..
- Κάθε σημείο που ισαπέχει από τα άκρα ενός ευθυγράμμου τμήματος ανήκει στη και αντίστροφα.
- Σε κάθε ισοσκελές τρίγωνο οι στη βάση γωνίες είναι
- Σε κάθε ισοσκελές τρίγωνο η διχοτόμος της γωνίας της κορυφής είναι και

Μονάδες (3 + 3 + 1,5 + 1,5)

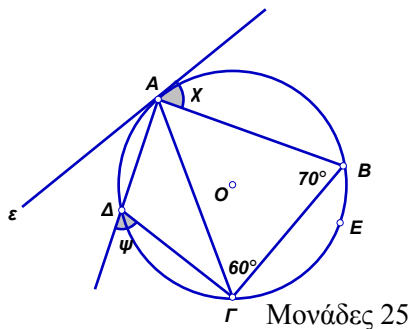
Θέμα 2^ο

Δίνεται τρίγωνο ABΓ με $AB < AG$. Η διχοτόμος της εξωτερικής γωνίας της \hat{A} τέμνει την προέκταση της BΓ στο σημείο E και η παράλληλη από το B προς την AE τέμνει την AG στο Δ. Να αποδείξετε ότι:

- $AB = AD$ Μονάδες 12
- $\widehat{BAG} = 90^\circ + \frac{\hat{A}}{2}$ Μονάδες 13

Θέμα 3^ο

Στο διπλανό σχήμα η ευθεία ε είναι εφαπτομένη του κύκλου (O, R). Να βρείτε τις γωνίες χ , ψ καθώς και το μέτρο του τόξου BEΓ δικαιολογώντας τις απαντήσεις σας



Μονάδες 25

Θέμα 4^ο

Στο τρίγωνο ABΓ φέρνουμε το ύψος AH και τη διάμεσο AM. Στις ημιευθείες AH και AM παίρνουμε αντίστοιχα τα σημεία Δ, E έτσι ώστε να είναι $H\Delta = HA$ και $ME = MA$. Να αποδειχθεί ότι:

- Το τρίγωνο AΔE είναι ορθογώνιο
- Το τρίγωνο ABAΔ είναι ισοσκελές
- Το τετράπλευρο ABEΓ είναι παραλληλόγραμμο
- Το τετράπλευρο BΔEΓ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

Μονάδες (7 + 5 + 5 + 8)

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1^ο

- a. Να αποδείξετε ότι:

Η διάμεσος τραπέζιου είναι παράλληλη προς τις βάσεις του και ίση με το ημιάθροισμα τους

Μονάδες 12,5

- b. Δίνεται το τραπέζιο ΑΒΓΔ με $\hat{A} = \hat{\Delta} = 90^\circ$ και $\hat{B} = 60^\circ$. Αν $\Gamma\Delta = 2\chi$ και

$B\Gamma = 8\chi$ να υπολογίσετε την διάμεσο ΕΖ του τραπέζιου.

Μονάδες 12,5

Θέμα 2^ο

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $AB = AG$. Προεκτείνουμε τη ΒΓ προς το μέρος του Γ και παίρνουμε τυχαίο σημείο Ε και προς το μέρος Β και παίρνουμε σημείο Δ τέτοιο ώστε $BD = GE$. Φέρνουμε τα τμήματα $EH \perp AG$ και

$\Delta Z \perp AB$. Να αποδείξετε ότι:

- a. Τα τρίγωνα ΔΒΖ και ΕΓΗ είναι ίσα.
b. $\Gamma Z = BH$.

Μονάδες 25

Θέμα 3^ο

Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με $AB = 2B\Gamma$. Θεωρούμε Μ, Ν τα μέσα των πλευρών ΑΒ, ΓΔ αντίστοιχα και το τμήμα $AE \perp B\Gamma$. Να δείξετε ότι:

- a. Το τετράπλευρο ΜΒΓΝ είναι ρόμβος.
b. Το τρίγωνο ΜΕΝ είναι ισοσκελές

Μονάδες 25

Θέμα 4^ο

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} = 90^\circ$) με $\hat{\Gamma} = 30^\circ$. Παίρνουμε τα σημεία Δ, Ε, Ζ μέσα αντίστοιχα των ΒΓ, ΑΒ, ΒΔ και στην προέκταση της ΕΖ τμήμα $ZH = EZ$. Να αποδειχθεί ότι:

- a. Το τετράπλευρο ΒΕΛΗ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο
b. Το τετράπλευρο ΑΕΖΔ είναι ισοσκελές τραπέζιο

Μονάδες 25

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1^ο

- A.** Να αποδείξετε ότι η διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα ορθογωνίου τριγώνου είναι ίση με το μισό της υποτείνουσας. 13 Μονάδες
- B.** Χαρακτηρίστε καθεμία από τις παρακάτω προτάσεις ως σωστή (**Σ**) ή λάθος (**Λ**) μεταφέροντας την απάντηση στην κόλλα απαντήσεων.
- Αν σε παραλληλόγραμμο δύο απέναντι γωνίες είναι παραπληρωματικές, τότε αυτό είναι ορθογώνιο **Σ Λ**
 - Αν σε τραπέζιο δύο απέναντι γωνίες είναι παραπληρωματικές, τότε αυτό είναι ισοσκελές **Σ Λ**
 - Το τετράπλευρο που έχει ίσες διαγωνίους είναι ορθογώνιο **Σ Λ**

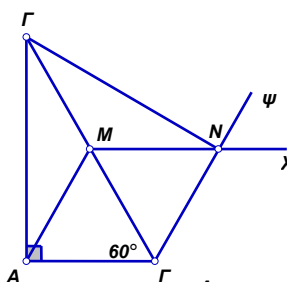
Μονάδες $3 \times 4 = 12$

Θέμα 2^ο

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) με $\hat{B} = 60^\circ$ και AM η διάμεσος προς την υποτείνουσα. Φέρνουμε τις $M\chi \parallel AB$ και $B\psi \parallel AM$ και οι οποίες τέμνονται στο N .

Να αποδείξετε ότι:

- Το τετράπλευρο $ABNM$ είναι ρόμβος.
- $MN = \frac{B\Gamma}{2}$
- $\widehat{GNB} = 90^\circ$.



Μονάδες 9

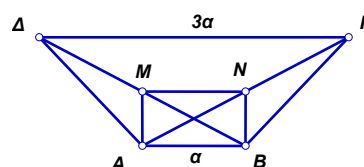
Μονάδες 8

Μονάδες 8

Θέμα 3^ο

Δίνεται το ισοσκελές τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ ($AB \parallel \Gamma\Delta$) με $AB = \alpha$ και $\Gamma\Delta = 3\alpha$. Αν M και N είναι τα μέσα των διαγωνίων $B\Delta$ και $A\Gamma$ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:

- $MN = \alpha$
- Το $ABNM$ είναι ορθογώνιο.



Μονάδες 10

Μονάδες 15

Θέμα 4^ο

Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ ($B\Gamma > AB$) με $\hat{B} = 45^\circ$. Από το μέσο M της $B\Gamma$ φέρνουμε κάθετη πάνω στη $B\Gamma$ που τέμνει τις AB και $\Delta\Gamma$ (ή τις προεκτάσεις τους) στα σημεία E και Z αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

- Το $EBZ\Gamma$ είναι τετράγωνο.
- Αν H το σημείο τομής της $A\Delta$ με την $ΕΓ$, τότε το $ΕΑΖ\Delta$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

Μονάδες 12

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1^ο

A. Να δείξετε ότι το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα μέσα των δύο πλευρών ενός τριγώνου είναι παράλληλο προς την τρίτη πλευρά και ίσο με το μισό της .

Μονάδες 10

B. Να διατυπώσετε τον ορισμό και τις ιδιότητες του παραλληλογράμμου. Μονάδες 5

C. Να συμπληρώσετε με λέξεις ή προτάσεις τα παρακάτω κενά:

a. Κάθε εξωτερική γωνία ενός τριγώνου είναι ίση Μονάδες 2

b. Το παραλληλόγραμμο που έχει μια γωνία ορθή λέγεται Μονάδες 2

c. Το άθροισμα των γωνιών κάθε τριγώνου είναι Μονάδες 2

D. Να χαρακτηρίσετε σαν σωστό (Σ) ή λάθος (Λ) ότι:

a. Σε κάθε τραπέζιο, τα μέσα των διαγωνίων και τα μέσα των μη παράλληλων πλευρών είναι συνευθειακά. Μονάδες 2

b. Οι διαδοχικές γωνίες ενός παραλληλόγραμμου είναι παραπληρωματικές. Μονάδες 2

Θέμα 2^ο

Παραλληλόγραμμου ΑΒΓΔ τα σημεία Ε και Η είναι οι προβολές των κορυφών Α και Γ στην διαγώνιο ΒΔ. Να δείξετε ότι:

a. Τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΒΓΗ είναι ίσα. Μονάδες 10

b. Το τετράπλευρο ΑΕΗΓ είναι παραλληλόγραμμο. Μονάδες 15

Θέμα 3^ο

Στις προεκτάσεις των ίσων πλευρών ΑΒ και ΑΓ ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ παίρνουμε τα ίσα τμήματα ΒΔ και ΓΕ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

a. $AD = AE$ και $BE = \Gamma\Delta$ Μονάδες 6

b. $\widehat{B\Delta\Gamma} = \widehat{B\Gamma\Gamma}$ και $\widehat{\Delta B E} = \widehat{\Delta \Gamma E}$ Μονάδες 6

c. Αν το Ο είναι σημείο τομής των ΒΕ και ΓΔ, τα τρίγωνα ΟΒΓ και ΟΔΕ είναι ισοσκελή. Μονάδες 8

d. Η διχοτόμος της γωνίας Α διέρχεται από το Ο. Μονάδες 5

Θέμα 4^ο

Δίνεται ορθό τραπέζιο ΑΒΓΔ ($\hat{A} = \hat{\Delta} = 90^\circ$) με $\Delta\Gamma = 2AB$ και $\hat{B} = 3\hat{\Gamma}$. Φέρνουμε $BE \perp \Delta\Gamma$ που τέμνει την ΑΓ στο σημείο Κ και την ΑΕ που τέμνει την ΒΔ στο Λ. Να δείξετε ότι:

a. $\hat{\Gamma} = 45^\circ$ Μονάδες 8

b. $B\Delta = A E$ Μονάδες 10

c. $KL = \frac{\Delta\Gamma}{4}$ Μονάδες 7

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1^ο

A. Να αποδείξετε ότι η διχοτόμος μιας γωνίας τριγώνου διαιρεί την απέναντι πλευρά εσωτερικά σε λόγο ίσο με το λόγο των προσκείμενων πλευρών.

Μονάδες 11

B. Να χαρακτηρίσετε ως Σωστή ή Λάθος κάθε μια από τις επόμενες προτάσεις :

3. Το άθροισμα των γωνιών ενός πενταγώνου είναι 6 ορθές.
4. Οι διαγώνιες ενός παραλληλογράμμου διχοτομούν τις γωνίες του.
5. Βαρύκεντρο είναι το σημείο τομής των υψών.
6. Ένα τετράγωνο είναι ρόμβος.

Μονάδες 14

Θέμα 2^ο

Στις προεκτάσεις των πλευρών BA και ΓA τριγώνου ABΓ παίρνουμε αντίστοιχα τα τμήματα: $AD = AB$ και $AE = AG$. Να αποδείξετε ότι $DE \parallel BG$.

Μονάδες 25

Θέμα 3^ο

Αν η διχοτόμος AD τριγώνου ABΓ τέμνει τον περιγεγραμμένο κύκλο του τριγώνου στο σημείο E. Να αποδείξετε ότι: $BE^2 = AE \cdot DE$

Μονάδες 25

Θέμα 4^ο

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ABΓ με $\hat{A} = 90^\circ$ και έστω Δ, Ε τα μέσα των πλευρών του AB και BΓ αντίστοιχα. Από το μέσο Z του τμήματος AD φέρουμε παράλληλη στην AG που τέμνει τη BΓ στο σημείο H. Αν ισχύει $3BG = 8ZH$ τότε να αποδείξετε ότι:

A) $DE \parallel \frac{AG}{2}$

Μονάδες 5

B) $ZH = \frac{3AG}{4}$

Μονάδες 8

Γ) $\hat{B} = 30^\circ$

Μονάδες 12

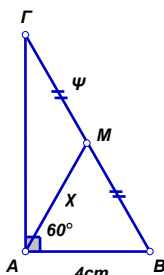
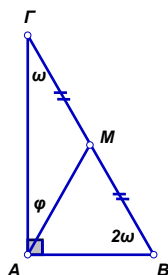
ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1^ο

- A. Να αποδείξετε ότι: Η διάμεσος ορθογωνίου τριγώνου που φέρνουμε από την κορυφή της ορθής γωνίας ισούται με το μισό της υποτείνουσας.

Μονάδες 13

- B. Στα παρακάτω σχήματα να υπολογίσετε τα τμήματα χ , γ και τις γωνίες ω , φ .



Μονάδες 12

Θέμα 2^ο

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$). Στις προεκτάσεις των AB και $A\Gamma$ παίρνουμε αντίστοιχα τα ίσα τμήματα $B\Delta$ και ΓE . Να αποδείξετε ότι:

- a. $\Delta\Gamma = BE$.

Μονάδες 12,5

- b. $\widehat{B\Delta\Gamma} = \widehat{\Gamma E B}$

Μονάδες 12,5

Θέμα 3^ο

Αν E και Z είναι αντίστοιχα τα μέσα των πλευρών AB , $\Gamma\Delta$ παραλληλογράμμου $AB\Gamma\Delta$ να αποδείξετε ότι οι ΔE και BZ τριχοτομούν τη διαγώνιο $A\Gamma$:

Μονάδες 25

Θέμα 4^ο

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και το ύψος του AH . Αν Δ , E , Z είναι αντίστοιχα τα μέσα των πλευρών AB , $A\Gamma$, $B\Gamma$ να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΔEZH είναι ισοσκελές τραπέζιο.

Μονάδες 25

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1^ο

Α. Τι ονομάζεται διάμεσος και τι διχοτόμος ενός τριγώνου;

Μονάδες 7

Β. Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των γωνιών κάθε τριγώνου είναι 2 ορθές.

Μονάδες 10

Γ. Να γράψετε με τι ισούται το άθροισμα των εσωτερικών γωνιών και με τι ισούται το άθροισμα των εξωτερικών γωνιών ενός κυρτού n - γώνου.

Μονάδες 8

Θέμα 2^ο

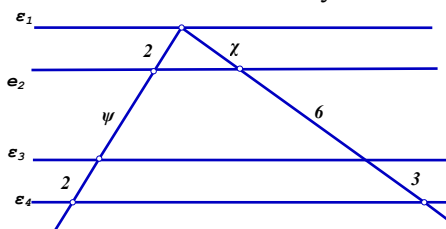
Α. Σε ένα τρίγωνο $AB\Gamma$, το Δ είναι το μέσο της πλευράς AB και το E είναι το μέσο της πλευράς $A\Gamma$. Αν $B\Gamma = \Delta E + 2$, να βρείτε το μήκος του $B\Gamma$

Μονάδες 5

Β. Στο διπλανό σχήμα οι ευθείες

$\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$ και ϵ_4 είναι παράλληλες

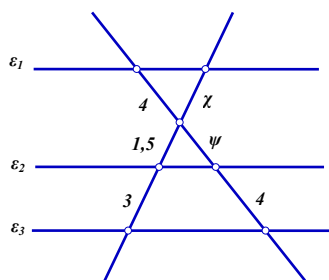
Να βρείτε τα χ, ψ .



Γ. Στο διπλανό σχήμα οι ευθείες

ϵ_1, ϵ_2 και ϵ_3 είναι παράλληλες

Να βρείτε τα χ, ψ .



Μονάδες 10

Θέμα 3^ο

Α. Αν οι AA' και BB' είναι διάμετροι του ίδιου κύκλου, να αποδείξετε ότι $AB = A'B'$.

Μονάδες 10

Β. Ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) με $\hat{A} = 40^\circ$ είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο (O, R) .

Αν η εφαπτομένη του κύκλου στο σημείο Γ τέμνει την προέκταση AB στο σημείο Δ , να βρείτε τις γωνίες $B\Gamma\Delta$, $A\Omega\Gamma$ και $B\Delta\Gamma$.

Μονάδες 15

Θέμα 4^ο

Α. Υπάρχει τρίγωνο με μήκη πλευρών 4cm, 5cm και 6cm; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 10

Β. Θεωρούμε την ευθεία ϵ και τα σημεία A, B από το ίδιο μέρος της ϵ . Αν A' είναι το συμμετρικό του A ως προς την ϵ , M είναι το σημείο τομής της $A'B$ με την ϵ και το N είναι ένα άλλο σημείο της ϵ , να δείξετε ότι:

a. $AM = A'M$

b. $AN = A'N$

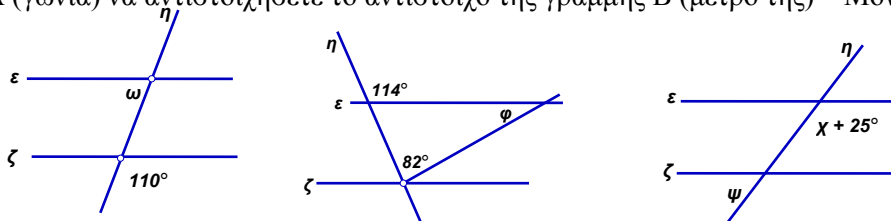
c. $AM + BM < AN + BN$

Μονάδες 15

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1^ο

- A. i) Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των γωνιών κάθε τριγώνου είναι 2 ορθές. Μονάδες 9
 ii) Στα παρακάτω σχήματα οι ευθείες ε και ζ είναι παράλληλες. Σε κάθε στοιχείο της γραμμής A (γωνία) να αντιστοιχήσετε το αντίστοιχο της γραμμής B (μέτρο της) Μονάδες $3 \times 2 = 6$



Γραμμή A	1. $\hat{\omega}$			2. $\hat{\phi}$			3. $\hat{\chi} + \hat{\psi}$	
Γραμμή B	α. 155°	β. 32°	γ. 80°	δ. 120°	ε. 45°	ζ. 142°	η. 54°	θ. 70°

- B. i) Αν σε τρίγωνο ABΓ η εξωτερική γωνία της \hat{A} και οι εσωτερικές γωνίες της \hat{B} και $\hat{\Gamma}$ έχουν άθροισμα 180° τότε το τρίγωνο είναι:

α. αμβλυγώνιο με $\hat{A} > 90^\circ$, β. οξυγώνιο, γ. ορθογώνιο στο Γ, δ. ορθογώνιο στο B,
 ε. ορθογώνιο στο A Μονάδες 5

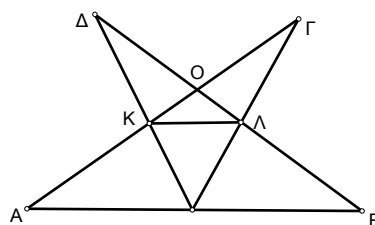
- ii) Αν το άθροισμα των γωνιών ενός κυρτού πολυγώνου είναι 1800° τότε το πλήθος των πλευρών του είναι:

α. 8, β. 12, γ. 20, δ. 16, ε. 40 Μονάδες 5

Θέμα 2^ο

Με τη βοήθεια του σχήματος που ακολουθεί στο οποίο είναι $AM = MB$, $MG = MD$ και $AG = BD$ να αποδείξετε ότι:

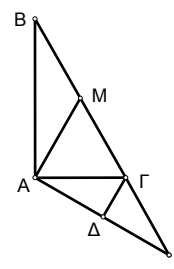
- α) Τα τρίγωνα ΑΓΜ και ΒΔΜ είναι ίσα και να γράψετε τις γωνίες τους που είναι αντίστοιχα ίσες. Μονάδες 5
 β) Το τρίγωνο AOB είναι ισοσκελές. Μονάδες 3
 γ) $\widehat{MA} = \widehat{MB}$ Μονάδες 5
 δ) Τα τρίγωνα AKM και BML είναι ίσα. Μονάδες 5
 ε) Το τρίγωνο ΚΟΛ είναι ισοσκελές. Μονάδες 7



Θέμα 3^ο

Σε ορθογώνιο τρίγωνο ABΓ ($\hat{A} = 90^\circ$) είναι $B\Gamma = 2AG$ και AM διάμεσος.

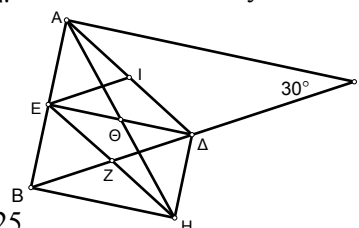
- α) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ABΓ. Μονάδες 4
 β) Να δείξετε ότι το τρίγωνο AMΓ είναι ισόπλευρο. Μονάδες 4
 γ) Αν η κάθετη από την κορυφή A προς την διχοτόμο της εξωτερικής γωνίας της Γ τέμνει την πλευρά BΓ στο σημείο E, τότε:
 i) Να δικαιολογήσετε γιατί το τρίγωνο AGE είναι ισοσκελές. Μονάδες 7
 ii) Να υπολογίσετε την γωνία \widehat{AEG} . Μονάδες 7
 iii) Να αποδείξετε ότι $AE = AB$. Μονάδες 3



Θέμα 4^ο

Σο τρίγωνο ABΓ με ($\hat{A} = 90^\circ$) είναι $\hat{\Gamma} = 30^\circ$. Έστω Δ το μέσο της BΓ, Ε μέσο της AB, Ζ μέσο της BD και Ι μέσο της AD. Προεκτείνουμε την EZ κατά τμήμα $ZH = EZ$. Να δείξετε ότι:

- α) Το τετράπλευρο BEΔH είναι ορθογώνιο παρ/μο,
 β) Το τετράπλευρο AEZΔ είναι ισοσκελές τραπέζιο,
 γ) Τα τμήματα AH, ED διχοτομούνται στο σημείο Θ,
 δ) Το τετράπλευρο EZΔΙ είναι ρόμβος με κέντρο το Θ.



Μονάδες $7 + 5 + 7 + 6 = 25$

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1^ο

A. Να γράψετε τα κριτήρια ισότητας τριγώνων.

Σε κάθε περίπτωση να κάνετε σχήματα και να σημειώσετε τα ίσα στοιχεία.

B. Στο τρίγωνο ABΓ, να επιλέξετε την σωστή απάντηση.

i. Αν $\hat{B} = \hat{A} + \hat{\Gamma}$, τότε το τρίγωνο είναι:

α) Οξυγώνιο, β) Ορθογώνιο στο A, γ) Ισοσκελές, δ) Ορθογώνιο στο B

ii. Αν $\hat{B} = \chi$ και $\hat{\Gamma} = 2\chi - 90^\circ$ τότε η γωνία \hat{A} είναι ίση με:

α) $160^\circ - \chi$, β) $180^\circ - \chi$, γ) $200^\circ - 3\chi$, δ) $180^\circ + 3\chi$

iii. Αν ABΓ είναι ισοσκελές με $\hat{A} > 90^\circ$

α) $\hat{B} = 45^\circ$ β) $45^\circ < \hat{B} < 90^\circ$ γ) $\hat{B} > 90^\circ$ δ) $\hat{B} < 45^\circ$

Θέμα 2^ο

Δίνεται τρίγωνο ABΓ. Φέρτε τα ύψη BΔ και ΓΕ. Αν Z το μέσον της BΓ να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ZΔΕ είναι ισοσκελές.

Θέμα 3^ο

Δίνεται ορθογώνιο ABΓΔ. Αν οι κάθετες από τα A και Γ στην BΔ, την τέμνουν στα σημεία E και Z αντίστοιχα, να δείξετε ότι :

A. $AE = \Gamma Z$

B. Το AΕΓΖ είναι παραλληλόγραμμο.

Θέμα 4^ο

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ABΓ με $\hat{A} = 90^\circ$. Φέρνουμε την διχοτόμο της γωνίας \hat{A} η οποία τέμνει την BΓ στο Δ. Από το Δ φέρνουμε κάθετη στην BΓ που τέμνει την ΑΓ στο Ε. Δείξτε ότι:

A. Το ABΔΕ είναι εγγράψιμο

B. $\Delta B = \Delta E$

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1^ο

A. Να κυκλώσετε το (Σ) ή το (Λ) αν συμφωνείτε ή διαφωνείτε με τις παρακάτω προτάσεις αντίστοιχα.

- i. Η διάμεσος ενός τραπεζίου ισούται με την ημιδιαφορά των βάσεων του. Σ Λ
- ii. Κάθε εγγεγραμμένη γωνία που βαίνει σε ημικύκλιο είναι ορθή. Σ Λ
- iii. Οι διαγώνιοι του ρόμβου τέμνονται κάθετα και είναι ίσες. Σ Λ
- iv. Αν δύο τρίγωνα έχουν δύο πλευρές ίσες μία προς μία και μία γωνία του ενός είναι ίση με την αντίστοιχη του άλλου τότε είναι ίσα Σ Λ
- v. Σε ίσα τόξα του ίδιου κύκλου αντιστοιχούν ίσες χορδές. Σ Λ

B. Να αποδειχθεί ότι: Αν σε ορθογώνιο τρίγωνο μία γωνία του ισούται με 30° τότε η απέναντι πλευρά του είναι το μισό της υποτείνουσας.

Θέμα 2^ο

Να αποδείξετε ότι τα ύψη ισοσκελούς τριγώνου που αντιστοιχούν στις ίσες πλευρές του είναι ίσα.

Θέμα 3^ο

Σ' ένα εγγράψιμο τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι $\widehat{A}=120^\circ$ και $\widehat{B\epsilon\xi}=80^\circ$. Να υπολογίσετε τις γωνίες Β, Γ, Δ του τετραπλεύρου.

Θέμα 4^ο

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και το ύψος του ΑΗ. Αν Δ, Ε και Ζ είναι τα μέσα των ΑΒ, ΑΓ και ΒΓ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι το ΔΕΖΗ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1^ο

B. Να δείξετε ότι, αν σ' ένα ορθογώνιο τρίγωνο μια γωνία του ισούται με 30° , η απέναντι πλευρά του είναι ίση με το μισό της υποτείνουσας .

Μονάδες 13

C. Να χαρακτηρίσετε ως σωστή (Σ) ή Λάθος (Λ) κάθε μια από τις παρακάτω προτάσεις.

- vi. Γωνίες με πλευρές παράλληλες είναι ίσες.
- vii. Αν μια διάμεσος τριγώνου είναι και ύψος του το τρίγωνο είναι ισοσκελές.
- viii. Αν ένα τετράπλευρο έχει δύο απέναντι πλευρές του παράλληλες είναι παραλληλόγραμμο.
- ix. Αν η διάμεσος τριγώνου ισούται με το μισό της αντίστοιχης πλευράς της, το τρίγωνο είναι ορθογώνιο

Μονάδες 12

Θέμα 2^ο

A. Να επιλέξετε την σωστή απάντηση:

i. Ίσες διαγώνιες έχει:

α: Το τραπέζιο, β: Ο ρόμβος, γ: Το παραλληλόγραμμο δ: Το ορθογώνιο

ii. Αν σε τρίγωνο ABΓ η AM είναι διάμεσος και το K βαρύκεντρο, τότε:

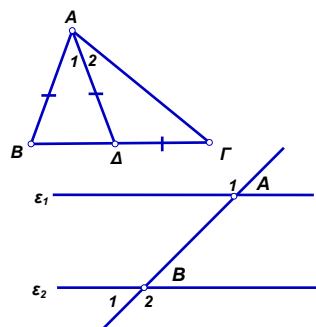
α: AK = KM, β: AK = 2KM, γ: AM = 3AK δ: 3KM = 2AM

iii. Αν είναι AB = AD = ΔΓ και $\hat{A}_1 = 40^\circ$ τότε η \hat{A}_2 είναι:

α: 30° , β: 35° , γ: 40° δ: 45°

iv. Αν είναι $\varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2$ και $\hat{A}_1 = 2\chi + 10^\circ$, $\hat{B}_1 = \chi - 10^\circ$,

τότε η \hat{B}_2 είναι: α: 130° , β: 120° , γ: 110° δ: 125°



Μονάδες 12

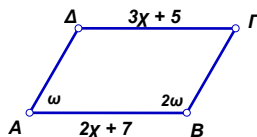
B. Σε ισοσκελές τραπέζιο ABΓΔ με AB // ΓΔ είναι: AB = 5α, ΔΓ = 3α και $\hat{A} = 60^\circ$.

Να γίνει το σχήμα και να υπολογίσετε την περίμετρο του.

Μονάδες 13

Θέμα 3^ο

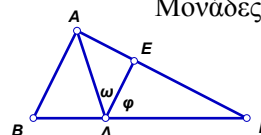
A. Στο διπλανό παραλληλόγραμμο, να υπολογίσετε τα χ και ω .



Μονάδες 12

B. Στο διπλανό ορθογώνιο τρίγωνο ABΓ ($\hat{A} = 90^\circ$) είναι:

Η ΑΔ διχοτόμος της \hat{A} η ΔΕ // AB και η \hat{B} μεγαλύτερη κατά 20° από την $\hat{\Gamma}$. Να υπολογίσετε τις γωνίες ω και φ .



Μονάδες 13

Θέμα 4^ο

Στο παραλληλόγραμμο ABΓΔ είναι $\hat{A} = 120^\circ$ και η διχοτόμος

της \hat{A} τέμνει την AB στο μέσο της σημείο E. να αποδείξετε ότι:

i. AB = 2ΑΔ

Μονάδες 5

ii. ΔΕ = 2ΑΖ όπου ΑΖ ή απόσταση του Α από την ΓΔ..

Μονάδες 10

iii. $\hat{A}\hat{\Gamma}\hat{B} = 90^\circ$

Μονάδες 10

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1^ο

- A. Να αποδείξετε ότι αν σε ορθογώνιο τρίγωνο μια γωνία του ισούται με 30° , τότε η απέναντι πλευρά του είναι το μισό της υποτείνουσας και αντίστροφα. Μονάδες 15
- B. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στην κόλλα σας τη λέξη «Σωστό» αν η πρόταση είναι σωστή και «Λάθος» αν η πρόταση είναι λάθος δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.
- a. Οι διαγώνιες ενός οποιουδήποτε παραλληλογράμμου διχοτομούν τις γωνίες του. Μονάδες 02
- b. Οι οξείες γωνίες ενός ορθογωνίου τριγώνου είναι παραπληρωματικές. Μονάδες 02
- c. Ένα τετράπλευρο που έχει μια γωνία ορθή είναι ορθογώνιο. Μονάδες 02
- d. Ένα παραλληλόγραμμο που οι διαγώνιοί του είναι ίσες και κάθετες είναι τετράγωνο. Μονάδες 02
- e. Δύο γωνίες που έχουν τις πλευρές τους κάθετες αλλά η μία είναι οξεία και η άλλη αμβλεία είναι παραπληρωματικές. Μονάδες 02

Θέμα 2^ο

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB=AG$). Στις προεκτάσεις των ίσων πλευρών AB και AG προς το μέρος των B και Γ αντίστοιχα, θεωρούμε τα ίσα τμήματα BD και GE . Αν η AM είναι διάμεσος του τριγώνου $AB\Gamma$, να δείξετε ότι το τρίγωνο MDE είναι ισοσκελές.

Μονάδες 25

Θέμα 3^ο

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$). Αν είναι AD το ύψος προς την υποτείνουσα, BE η διχοτόμος της γωνίας B και Z το σημείο τομής των AD , BE να αποδείξετε ότι :

- a. $\widehat{AEB} = 90^\circ - \frac{\hat{B}}{2}$ Μονάδες 10
- b. Το τρίγωνο AEZ είναι ισοσκελές. Μονάδες 15

Θέμα 4^ο

Στο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB < AG$ το σημείο M είναι μέσο της $B\Gamma$ και η AD διχοτόμος. Φέρνουμε την κάθετη από το B στην AD , που τέμνει την AD στο σημείο E και την AG στο Z . Να αποδείξετε ότι :

- a. Το τρίγωνο ABZ είναι ισοσκελές. Μονάδες 06
- b. $EM \parallel AG$ και $EM = \frac{AG - AB}{2}$ Μονάδες 15
- c. $\widehat{DEM} = \frac{\hat{A}}{2}$ Μονάδες 04

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1^ο

- A. Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου είναι 2 ορθές.
- B. Να χαρακτηρίσετε ως Σωστό (Σ) ή Λάθος (Λ) κάθε μια από τις παρακάτω προτάσεις:
- iv. Οι διχοτόμοι δύο εφεξής και παραπληρωματικών γωνιών είναι κάθετες.
- v. Η διάμεσος ενός ορθογωνίου τριγώνου που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα ισούται με το μισό της υποτείνουσας.
- vi. Η διάμεσος τραπέζιου ισούται με την ημιδιαφορά των βάσεων του.
- vii. Κάθε εγγεγραμμένη γωνία ισούται με το διπλάσιο της αντίστοιχης της επίκεντρης

Θέμα 2^ο

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ(ΑΒ = ΑΓ). Να αποδείξετε ότι οι διάμεσοι του ΒΔ και ΓΕ είναι ίσες.

Θέμα 3^ο

Σε τυχαίο τρίγωνο ΑΒΓ φέρνουμε την εσωτερική του διχοτόμο ΑΔ και από την κορυφή Β φέρνουμε ευθεία παράλληλη προς την ΑΔ που τέμνει την προέκταση της πλευράς ΑΓ στο σημείο Ε. Να αποδείξετε ότι:

- a. Το τρίγωνο ΑΒΕ είναι ισοσκελές

Μονάδες 13

- b. $ΕΓ = ΑΒ + ΑΓ$

Μονάδες 12

Θέμα 4^ο

Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ και τα ύψη του ΒΔ και ΓΕ. Να δείξετε ότι:

- a. Το τετράπλευρο ΒΕΔΓ είναι εγγράψιμο.

Μονάδες 13

- b. $\widehat{ΒΔΕ} = \widehat{ΒΓΕ}$

Μονάδες 12

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1^ο

a. Να δώσετε τον ορισμό του ορθογωνίου.

Μονάδες 7

b. Να αποδείξετε ότι οι διαγώνιοι του ορθογωνίου είναι ίσες

Μονάδες = 18

Θέμα 2^ο

Στο διπλανό σχήμα είναι $AB = BD$ και $AG = GE$.

a. Να συγκρίνετε τα ζευγάρια των τριγώνων

AHB και ΔKB , AHG και EMG

Μονάδες 17

b. Να δείξετε ότι $\Delta K = EM$

Μονάδες 8

Θέμα 3^ο

Δίνεται το παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ και το ύψος του AE .

Αν K, Λ είναι τα μέσα των $A\Delta$ και $B\Gamma$ αντίστοιχα να δείξετε:

a. Το $K\Lambda GE$ είναι τραπέζιο.

Μονάδες 10

b. Το $K\Lambda GE$ είναι ισοσκελές.

Μονάδες 15

Θέμα 4^ο

Στο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB < A\Gamma$ η $A\Delta$ είναι διχοτόμος

και το σημείο E είναι η προβολή του σημείου B στην

$A\Delta$. Αν το σημείο M είναι το μέσο της $B\Gamma$ να δείξετε:

a. $EM \parallel A\Gamma$

Μονάδες = 15

b. $2EM = A\Gamma - AB$

Μονάδες = 10

ΘΕΜΑΤΑ

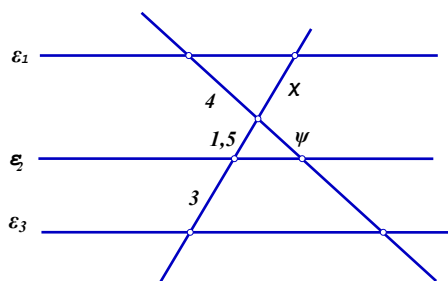
Θέμα 1^ο

- a. Τι γνωρίζετε για το άθροισμα γωνιών τριγώνου;
Αποδείξτε το σχετικό θεώρημα.
- b. Τι ισχύει για το άθροισμα των εσωτερικών γωνιών κυρτού ν- γώνου
και τι για το άθροισμα των εξωτερικών γωνιών του;

Μονάδες 4 + 13 + 4 + 4

Θέμα 2^ο

Αν στο παρακάτω σχήμα είναι $\varepsilon_1 // \varepsilon_2 // \varepsilon_3$, να βρείτε τα x και y



Μονάδες 25

Θέμα 3^ο

Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ. Στις πλευρές ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ παίρνουμε σημεία Κ, Λ, Μ, Ν, αντίστοιχα τέτοια ώστε $AK = BL = GM = DN$. Να αποδείξετε ότι το ΚΛΜΝ είναι τετράγωνο.

Μονάδες 25

Θέμα 4^ο

Από εξωτερικό σημείο Ρ ενός κύκλου κέντρου Ο, φέρουμε τα εφαπτόμενα τμήματα ΡΑ και ΡΒ,. Αν Μ είναι ένα εσωτερικό σημείο του ευθυγράμμου τμήματος ΟΡ να αποδείξετε ότι $\widehat{MAP} = \widehat{MBP}$

Μονάδες 25

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1^ο

Α. Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου είναι 2 ορθές

Μονάδες 12 , 5

Β. Σε τρίγωνο ΑΒΓ τα μέτρα των γωνιών Α και Β είναι φ και 2φ αντίστοιχα, ενώ η εξωτερική γωνία της Γ είναι 126° . Τότε η φ ισούται με:

Α. 126° Β. 42° Γ. 26° Δ. 90° Ε. 24°

Μονάδες 12 , 5

Θέμα 2^ο

Έστω ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ ($AB = AG$) και τα ύψη του ΒΔ, ΓΕ. Να αποδείξετε ότι:

1) Τα τρίγωνα ΒΕΓ και ΒΔΓ είναι ίσα

Μονάδες 9

2) Το τετράπλευρο ΒΕΔΓ είναι εγγράψιμο

Μονάδες 7

3) Τα τμήματα ΑΕ και ΑΔ είναι ίσα.

Μονάδες 9

Θέμα 3^ο

Δίνεται κύκλος κέντρου Κ, η εφαπτομένη (ε) σε ένα σημείο του Α και ένα σημείο Ρ της (ε). Από το Ρ φέρνουμε μια ευθεία που τέμνει τον κύκλο στα σημεία Β και Γ. Αν η διχοτόμος της γωνίας ΒΑΓ τέμνει τη χορδή ΒΓ στο Δ, να αποδείξετε ότι: $PD = PA$.

Μονάδες 25

Θέμα 4^ο

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($A=90^\circ$) με τη γωνία του Γ να είναι ίση με 30° . Έστω Δ μέσο της ΒΓ, Ε μέσο της ΑΒ, Ζ μέσο της ΒΔ και Ι μέσο της ΑΔ. Αν προεκτείνουμε την ΕΖ κατά τμήμα $ZH = EZ$, τότε να δείξετε ότι:

1) Το τετράπλευρο ΒΕΔΗ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο

Μονάδες 6, 25

2) Το τετράπλευρο ΑΕΖΔ είναι ισοσκελές τραπέζιο

Μονάδες 6, 25

3) Τα τμήματα ΑΗ και ΕΔ διχοτομούνται

Μονάδες 6, 25

4) Το τετράπλευρο ΕΖΔΙ είναι ρόμβος

Μονάδες 6, 25

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1^ο

A₁. Συμπληρώστε το θεώρημα.

Η διάμεσος τραπεζίου είναιπρος τις βάσεις του και ίση με το.....τους.

Μονάδες 4

A₂. Να αναφέρετε τις ιδιότητες του ισοσκελούς τραπεζίου.

Μονάδες 5

B₁. Να δείξετε ότι η διάμεσος ορθογωνίου τριγώνου που φέρουμε από την κορυφή της ορθής γωνίας είναι ίση με το μισό της υποτείνουσας.

Μονάδες 7

B₂. Στο ορθογώνιο τρίγωνο ABΓ (A= 90°) το σημείο Δ είναι μέσο της ΑΓ το σημείο Ε μέσο της ΒΓ και η γωνία Γ ίση με 30°.Αν είναι ακόμη ΒΓ = 12 και Κ το μέσο του ΕΓ.

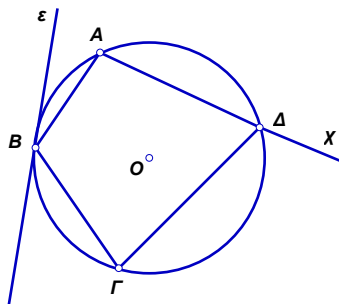
Να υπολογίσετε τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΒ, ΔΕ, ΔΚ (Αιτιολόγηση).

Μονάδες 9

Θέμα 2^ο

Στο παρακάτω σχήμα το ΑΒΓΔ είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο (Ο, ρ). Αν είναι $\widehat{AB} = 60^\circ$

$\widehat{BG} = 80^\circ$ και ευθεία ε εφαπτομένη του κύκλου στο σημείο Β. Να υπολογίσετε αιτιολογώντας τις γωνίες.



\widehat{AGB} Μονάδες 7

$\widehat{AB\epsilon}$ Μονάδες 8

$\widehat{\chi\Delta\Gamma}$ Μονάδες 10

Θέμα 3^ο

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και το ύψος του ΓΕ. Αν ΑΔ είναι η διάμετρος του περιγεγραμμένου κύκλου, να δείξετε ότι ΒΔ παράλληλο στο ΓΕ .

Μονάδες 25

Θέμα 4^ο

Σε τετράγωνο ΑΒΓΔ προεκτείνουμε την ΑΒ κατα τμήμα ΒΕ και την ΒΓ κατα τμήμα ΓΖ =ΒΕ. Να δείξετε ότι:

i. $AZ = \Delta E$

Μονάδες 10

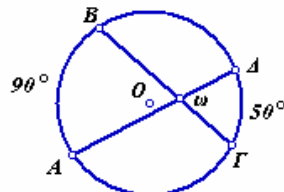
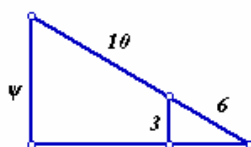
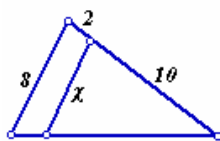
ii. $AZ \perp \Delta E$

Μονάδες 15

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1^ο

Α. Να υπολογισθούν τα χ, ψ, ω των παρακάτω σχημάτων.



- Ένας ρόμβος με όλες τις γωνίες ίσες είναι τετράγωνο. Σ ή Λ .
- Ένα παραλληλόγραμμο με κάθετες διαγώνιες είναι ρόμβος. Σ ή Λ .
- Ένα τραπέζιο με ίσες διαγώνιες είναι ρόμβος. Σ ή Λ .

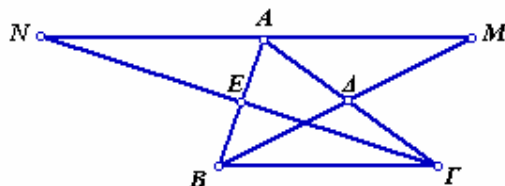
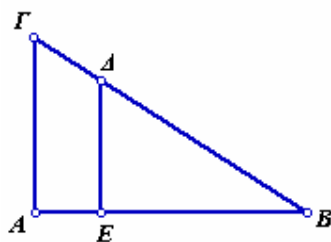
Θέμα 2^ο

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με υποτείνουσα $B\Gamma$ και ύψος AD .

Αν DE κάθετη στην AB να αποδειχθεί ότι $AD^2 = AE \cdot DE$

Θέμα 3^ο

Προεκτείνουμε τις διάμεσους BD και GE τριγώνου $AB\Gamma$ αντίστοιχα κατά τμήματα $DM = BD$ και $EN = GE$. Να αποδείξετε ότι το $AB\Gamma M$ είναι παραλληλόγραμμο, το A μέσο του NM και τα σημεία N, A, M συνευθειακά

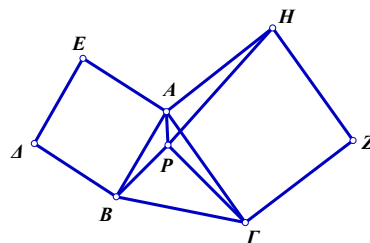


Θέμα 4^ο

Στις πλευρές τριγώνου $AB\Gamma$ έχουμε τα τετράγωνα $ABDE$ και $AGZH$.

Αν P το σημείο τομής των BH και GE να αποδειχθεί ότι:

- τα τρίγωνα ABH και AGE είναι ίσα,
- το τετράπλευρο $EAPB$ είναι εγγράψιμο
- και τα τμήματα BH και EG είναι κάθετα μεταξύ τους.



ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1^ο

- Α. Αποδείξτε πως η διάμεσος ορθογωνίου τριγώνου που φέρουμε από την κορυφή της ορθής γωνίας είναι ίση με το μισό της υποτεινουσας. Μονάδες 16
- Β. Συμπληρώστε τον παρακάτω πίνακα που αναφέρεται στους κύκλους (K, R) , (Λ, ρ) με $R > \rho$ και στη διάκεντρο $ΚΛ = \delta$ αφού τον αντιγράψετε στην κόλλα σας.

Σχέση αθροίσματος ακτίνων και διακέντρου	Σχετική θέση των κύκλων
$R - \rho < \delta < R + \rho$	
$R + \rho = \delta$	
	Εφάπτονται εσωτερικά

Μονάδες $3 \times 3 = 9$

Θέμα 2^ο

Σε κάθε μία από τις παρακάτω προτάσεις επιλέξτε τη σωστή απάντηση

- 1) Τρεις ίσοι κύκλοι εφάπτονται εξωτερικά. Το τρίγωνο που έχει ως κορυφές τα κέντρα των κύκλων και πλευρές τις διακέντρους είναι: **A)** Ορθογώνιο, **B)** Ισοσκελές, **Γ)** Αμβλυγώνιο, **Δ)** Ισόπλευρο, **Ε)** Κανένα από τα προηγούμενα. Μονάδες 6

- 2) Αν στο διπλανό σχήμα είναι: η \widehat{AD} εφαπτομένη του κύκλου, $\hat{A} = 40^\circ$ και $\widehat{BD} = 60^\circ$, τότε:

- i) Ισχύει ότι η γωνία $\widehat{DGB} = 120^\circ$ **Σωστό Λάθος**

- ii) Η γωνία \widehat{GBD} είναι ίση με:

- A)** 40° , **B)** 50° , **Γ)** 60° , **Δ)** 70° , **Ε)** Κανένα από τα προηγούμενα. Μονάδες 4

- 3) Στο παρακάτω σχήμα οι ημιευθείες A_x , B_y και Γ_z είναι παράλληλες και ακόμη $\widehat{GB\psi} = 3\alpha + 15$, $\widehat{B\Gamma\zeta} = 2\alpha$.

Τότε η γωνία ω είναι ίση με :

- A)** 110° **B)** 122° **Γ)** 111°

- Δ)** 100° **Ε)** Κανένα από τα προηγούμενα

- 4) Αν σε ορθογώνιο $AB\Gamma\Delta$ ισχύει ότι $B\Delta = 8$, $\widehat{AB\Gamma} = 60^\circ$, $B\Gamma = x$ και $\Delta\Gamma = x + 2$, η περίμετρος του είναι: **A)** 18, **B)** 20, **Γ)** 24, **Δ)** 30, **Ε)** Κανένα από τα προηγούμενα

Μονάδες 6

Θέμα 3^ο

Έστω κύκλος (O, R) και οι ακτίνες του OA και OB .

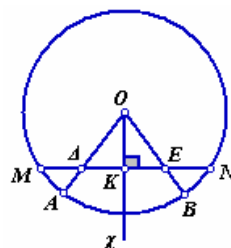
Φέρνουμε τη διχοτόμο $O\chi$ της γωνίας \widehat{AOB} και μια χορδή $MN \perp O\chi$ η οποία τέμνει τις OA , OB και $O\chi$ στα Δ , E και K αντίστοιχα. Να αποδειχθεί ότι :

- i) $OD = OE$
ii) $AD = EB$
iii) $MD = EN$

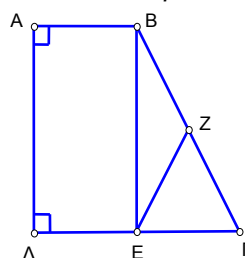
Θέμα 4^ο

Στο τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ με $\hat{A} = \hat{\Delta} = 90^\circ$ τα E, Z είναι μέσα των πλευρών $\Gamma\Delta$ και $B\Gamma$ και ισχύει $2AB = \Gamma\Delta = B\Gamma$. Να δείξετε ότι:

- i) Το τετράπλευρο $ABE\Delta$ είναι ορθογώνιο.
- ii) Το τετράπλευρο $AB\Gamma E$ είναι παραλληλόγραμμο.
- iii) Η γωνία $\hat{\Gamma}$ είναι 60° .
- iv) $\Delta Z \perp B\Gamma$
- v) Το τετράπλευρο $ABZE$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.



Μονάδες 9
Μονάδες 6
Μονάδες 10



Μονάδες = 25

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1^ο

A. Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου είναι 180° .

Μονάδες 13

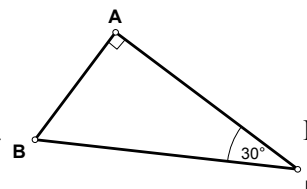
B. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στην κόλα σας "Σωστό" ή "Λάθος" δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α. Κάθε τετράγωνο είναι και ρόμβος.

β. Σε ένα ισοσκελές τραπέζιο η διάμεσος είναι παράλληλη προς τις βάσεις του τραπέζιου και ίση με την διαφορά των βάσεων.

γ. Αν στο ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$)

του σχήματος, είναι $\hat{\Gamma} = 30^\circ$ τότε $AG = \frac{B\Gamma}{2}$.



Μονάδες 6

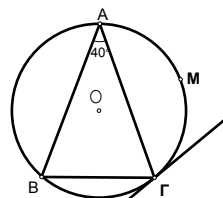
Γ. Τι ονομάζουμε α. βαρύκεντρο τριγώνου β. περίκεντρο τριγώνου

Μονάδες 6

Θέμα 2^ο

A. Αν στο διπλανό σχήμα είναι $AB = AG$, $\hat{A} = 40^\circ$

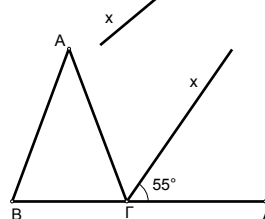
και Γχ εφαπτομένη του κύκλου στο Γ, να υπολογίσετε την γωνία $B\Gamma\chi$ και το μέτρο του τόξου $AM\Gamma$.



Μονάδες 13

B. Αν στο διπλανό σχήμα είναι $AB = AG$, η

Γχ διχοτόμος της γωνίας $AG\Delta$ και η γωνία $\Delta\Gamma\chi = 55^\circ$, να υπολογίσετε την γωνία A του τριγώνου.



Μονάδες 12

Θέμα 3^ο

Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{\Gamma} = 3\hat{B}$ η μεσοκάθετος της $B\Gamma$ τέμνει την AB στο Δ.

α. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $\Delta B\Gamma$ είναι ισοσκελές.

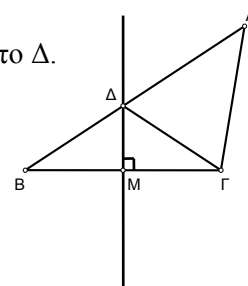
Μονάδες 7

β. Να υπολογίσετε τη γωνία $A\Delta\Gamma$ συναρτήσει της γωνίας B του τριγώνου $AB\Gamma$.

Μονάδες 9

γ. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $\Delta A\Gamma$ είναι ισοσκελές.

Μονάδες 9



Θέμα 4^ο

Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB < AG$) προεκτείνουμε το ύψος AH κατά τμήμα $H\Delta$ και την διάμεσο AM κατά τμήμα MN έτσι ώστε $AH = H\Delta$ και $AM = MN$.

α. Να συγκρίνετε τα τμήματα AB και NG .

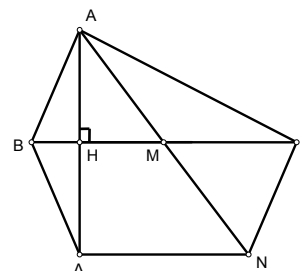
Μονάδες 7

β. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $AB\Delta$ είναι ισοσκελές.

Μονάδες 8

γ. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $B\Gamma N\Delta$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

Μονάδες 10



ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1^ο

a. Να αποδείξετε ότι:

Αν η διάμεσος ενός τριγώνου ισούται με το μισό της πλευράς στην οποία αντιστοιχεί, τότε το τρίγωνο είναι ορθογώνιο με υποτείνουσα την πλευρά αυτή.

b. Να αναφέρετε τα κριτήρια για να είναι ένα τραπέζιο ισοσκελές.

Θέμα 2^ο

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και το ύψος του AH . Αν Δ, E, Z είναι τα μέσα των $AB, A\Gamma, B\Gamma$ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι το ΔEZH είναι ισοσκελές τραπέζιο.

Θέμα 3^ο

Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ προεκτείνουμε τη διάμεσο AM κατά ίσο τμήμα $M\Delta$. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $B\Gamma\Delta$ είναι ίσα.

Θέμα 4^ο

Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$. Έστω M το μέσο της AB και N το μέσο της $\Gamma\Delta$. Τα τμήματα AN και ΔM τέμνονται στο P και τα τμήματα ΓM και BN τέμνονται στο Σ . Να αποδείξετε ότι το $MPN\Sigma$ είναι παραλληλόγραμμο.

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1^ο

- a. Να αποδείξετε ότι: η διάμεσος του τραπεζίου είναι παράλληλη προς τις βάσεις του και ίση με το ημιάθροισμα τους.

Μονάδες 13

- b. Γράψτε τα τρία κριτήρια ισότητας των τριγώνων

Μονάδες 12

Θέμα 2^ο

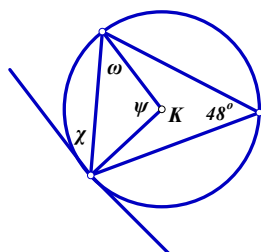
- a. Συμπληρώστε τα μέτρα των γωνιών χ , ψ στους κύκλους (K, ρ_1) και (Λ, ρ_2) :

$\chi = \dots\dots$

$\psi = \dots\dots$

$\omega = \dots\dots$

Μονάδες 6,25

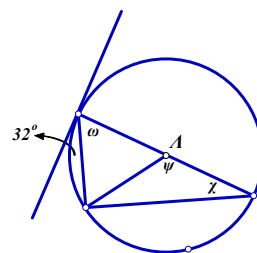


$\chi = \dots\dots$

$\psi = \dots\dots$

$\omega = \dots\dots$

Μονάδες 6,25



- b.

- i. Αν το $AB\Gamma\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο και $\hat{B}_1 = 15^\circ$

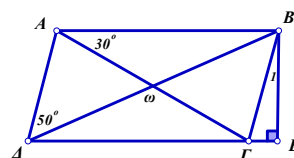
η γωνία ω έχει μέτρο:

☐ 100°

☐ 125°

☐ 95°

☐ 115°



Μονάδες 6,25

- ii. Στο διπλανό σχήμα το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ είναι

εγγεγραμμένο και τα τόξα $\widehat{AD} = 80^\circ$ και $\widehat{\Gamma\Delta} = 60^\circ$.

Η γωνία $\widehat{AD\chi}$ ισούται με

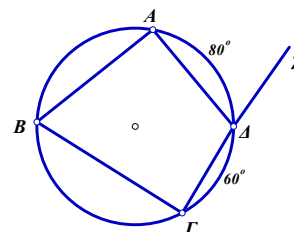
☐ 80°

☐ 90°

☐ 100°

☐ 70°

☐ 105°



Μονάδες 6,25

Θέμα 3^ο

Θεωρούμε τρίγωνο $AB\Gamma$. Η διχοτόμος της γωνίας A τέμνει τη μεσοκάθετο της $B\Gamma$ στο σημείο Δ . Έστω E και Z οι προβολές του Δ στις πλευρές AB και AG αντίστοιχα. Να δείξετε ότι $BE = \Gamma Z$

Θέμα 4

Στο παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ είναι $\hat{A} = 120^\circ$ και η διχοτόμος της $\hat{\Delta}$ τέμνει την AB στο μέσο της E . Να αποδείξετε ότι

- i. $AB = 2A\Delta$

Μονάδες 5

- ii. $\Delta E = 2AZ$ όπου AZ η απόσταση του A από την $\Gamma\Delta$

Μονάδες 10

- iii. $\widehat{A\Gamma B} = 90^\circ$

Μονάδες 10

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1^ο

A. Αν ένα τραπέζιο είναι ισοσκελές να αποδείξετε ότι:

i. Οι γωνίες που πρόσκεινται σε μια βάση του είναι ίσες. Μονάδες 6

ii. Οι διαγώνιοι του είναι ίσες. Μονάδες 6

B. Σε ισοσκελές τραπέζιο ABΓΔ με $AB \parallel \Gamma\Delta$ είναι: $AB = 5\alpha$

$\Delta\Gamma = 3\alpha$ και $\hat{A} = 60^\circ$. Να υπολογίσετε την περίμετρο του. Μονάδες 13

Θέμα 2^ο

A. Να χαρακτηρίσετε ως σωστή (**Σ**) ή λάθος (**Λ**) κάθε μια από τις επόμενες προτάσεις

i. Γωνίες με πλευρές παράλληλες είναι πάντα ίσες

ii. Αν η διάμεσος τριγώνου είναι και ύψος το τρίγωνο είναι ισοσκελές

iii. Αν η διάμεσος τριγώνου ισούται με το μισό της αντίστοιχης πλευράς το τρίγωνο είναι ορθογώνιο.

iv. Κάθε τετράπλευρο με δύο απέναντι πλευρές παράλληλες είναι παραλληλόγραμμο.

Μονάδες $4 \times 3 = 12$

B. Αν σε τρίγωνο ABΓ είναι $\hat{B} = 2\hat{\Gamma}$ και η \hat{A} μεγαλύτερη της $\hat{\Gamma}$ κατά 20°

τότε η $\hat{\Gamma}$ ισούται

α. 30° , β. 31° , γ. 32° , δ. Κανένα από τα προηγούμενα

Δικαιολογήστε την Απάντησή σας.

Μονάδες 13

Θέμα 3^ο

Δίνεται τρίγωνο ABΓ και τα ύψη του ΒΔ, ΓΕ. Αν Μ το μέσο της ΒΓ και Ν

το μέσο της ΔΕ να δείξετε ότι:

i. Το Τρίγωνο ΜΔΕ είναι ισοσκελές

Μονάδες 16

ii. $MN \perp \Delta E$

Μονάδες 9

Θέμα 4^ο

Θεωρούμε τραπέζιο ABΓΔ με $\hat{A} = \hat{\Delta} = 90^\circ$, και $\Delta\Gamma = 2AB$. Φέρνουμε το

ύψος BE. Να δείξετε ότι:

a. Το τετράπλευρο ABEΔ είναι ορθογώνιο

b. Το τετράπλευρο ABΓΕ είναι παραλληλόγραμμο

c. Αν Η, Θ είναι τα σημεία τομής των ΑΕ και ΒΔ, ΑΓ και ΒΕ αντίστοιχα

να δείξετε ότι $H\Theta \parallel \frac{\Delta\Gamma}{4}$.

Μονάδες $5 + 8 + 12$

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1^ο

Α. Δείξτε ότι η διάμεσος του τραπεζίου είναι παράλληλη προς τις βάσεις του και ίση με το ημιάθροισμα τους

Μονάδες 13

Β. Δίνεται το τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΑΒ // ΓΔ) με ΑΒ = 3α και ΓΔ = α. Αν Ε και Ζ είναι τα μέσα των ΑΔ και ΓΒ και Μ το μέσο της ΕΖ δείξτε ότι το τετράπλευρο ΔΓΜΕ είναι παραλληλόγραμμο.

Μονάδες 12

Θέμα 2^ο

Σημειώστε στο γραπτό σας την σωστή απάντηση.

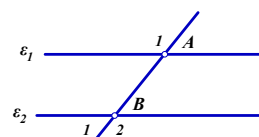
Α. Σε κάθε τρίγωνο το σημείο που ισαπέχει από τις κορυφές του είναι:

- α. Το σημείο τομής των υψών. β. Το σημείο τομής των μεσοκαθέτων
γ. Το σημείο τομής των διχοτόμων δ. Κανένα από αυτά τα σημεία.

Μονάδες 5

Β. Αν $\varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2$, $\hat{A}_1 = 2\chi + 10^\circ$ και $\hat{B}_1 = \chi - 10^\circ$ τότε η \hat{B}_2 είναι:

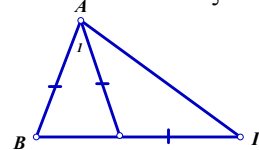
- α. 130° β. 120° γ. 110° δ. 115° 3. 125°



Μονάδες 5

Γ. Αν είναι ΑΒ = ΑΔ = ΔΓ και $\hat{A}_1 = 40^\circ$ τότε η \hat{B}_2 είναι:

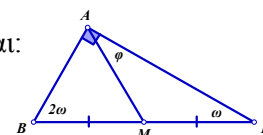
- α. 30° β. 35° γ. 40° δ. 45° 3. 50°



Μονάδες 5

Δ. Αν είναι $\hat{A} = 90^\circ$, ΒΜ = ΜΓ, $\hat{B} = 2\omega$ και $\hat{\Gamma} = \omega$ τότε η $\hat{\phi}$ είναι:

- α. 50° β. 40° γ. 35° δ. 30° 3. 45°

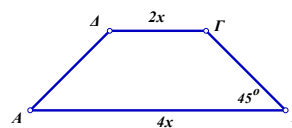


Μονάδες 5

Ε. Αν το ΑΒΓΔ (ΑΒ // ΓΔ) είναι ισοσκελές τραπέζιο με ΑΒ = 4χ,

ΓΔ = 2χ και $\hat{B} = 45^\circ$ τότε το ύψος του τραπεζίου είναι:

- α. 4χ β. 3χ γ. 2χ δ. χ 3. 0,5χ τρίγωνο ΑΒΓ



Μονάδες 5

Θέμα 3^ο

Να δείξετε ότι αν τα τρίγωνα ΑΒΓ και Α΄Β΄Γ΄ έχουν $\hat{A} = \hat{A}'$,

$u_\alpha = u_\alpha'$ και $u_\beta = u_\beta'$ είναι ίσα.

Μονάδες 25

Θέμα 4^ο

Στο τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΓ > ΑΒ) η ΑΔ είναι διχοτόμος της \hat{A} . Φέρνουμε το

ΒΕ ⊥ ΑΔ που τέμνει την ΑΓ στο Ζ. Αν Μ το μέσο της ΒΓ να δείξετε ότι:

Α) Το $\triangle ABZ$ είναι ισοσκελές, Β) $EM = \frac{AG - AB}{2}$, Γ) $\widehat{\Delta EM} = \frac{\hat{A}}{2}$ Μονάδες 7 + 11 + 7

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1^ο

A₁. Να δώσετε τον ορισμό του παραλληλογράμμου,

Μονάδες 2

A₂. Να αποδείξετε ότι οι απέναντι πλευρές ενός παραλληλογράμμου είναι ίσες.

Μονάδες 8

B. Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση για κάθε μία από τις παρακάτω προτάσεις:

1. Ίσες διαγώνιους έχει:

A. το τραπέζιο, B. ο ρόμβος, Γ. το παραλληλόγραμμο, Δ. το ορθογώνιο.

2. Δίνεται τρίγωνο ABΓ, η διάμεσός του AM και το βαρύκεντρό του K. Τότε ισχύει:

A. AK = KM, B. AK=2KM, Γ. AM=3AK Δ. 3KM=2AM 3.

3. Η εγγεγραμμένη γωνία που βαίνει σε ημικύκλιο έχει μέτρο:

A. 60° B. 30° Γ. 90° Δ. 180° E. 45°

Μονάδες 15

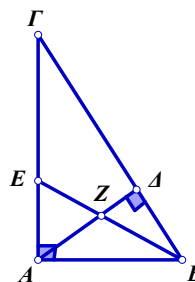
Θέμα 2^ο

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ABΓ ($\hat{A} = 90^\circ$).

Αν ΑΔ ύψος και BE διχοτόμος της γωνίας Β

Να αποδείξετε ότι:

α) $\widehat{AEB} = 45^\circ + \frac{\hat{\Gamma}}{2}$



Μονάδες 10

β) το τρίγωνο AEZ είναι ισοσκελές.

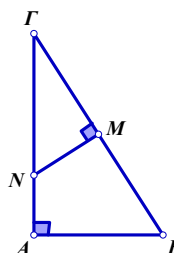
Μονάδες 15

Θέμα 3^ο

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ABΓ ($\hat{A} = 90^\circ$) στο οποίο

είναι $\hat{\Gamma} = 30^\circ$. Η ευθεία MN είναι μεσοκάθετος στην

πλευρά ΒΓ. Νά δείξετε ότι $\Gamma N = 2NA$



Μονάδες 25

Θέμα 4^ο

Δίνεται τραπέζιο ABΓΔ με $\hat{A} = \hat{\Delta} = 90^\circ$ και E, Z μέσα των πλευρών

ΓΔ και ΒΓ αντίστοιχα. Αν είναι $2AB = \Gamma\Delta = B\Gamma$ να δείξετε ότι:

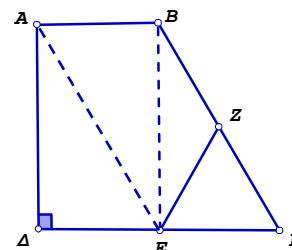
a. Το τετράπλευρο ABEΔ είναι ορθογώνιο.

b. Το τετράπλευρο ABΓE είναι παραλληλόγραμμο.

c. Η γωνία Γ είναι 60°

d. $\Delta Z \perp B\Gamma$

e. Το τετράπλευρο ABZE είναι ισοσκελές τραπέζιο.



Μονάδες $5 \times 5 = 25$

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1^ο

Α. Αν σε ορθογώνιο τρίγωνο μια γωνία του είναι 30° τότε η απέναντι πλευρά είναι το μισό της υποτείνουσας. Μονάδες 7

Β. Να χαρακτηρίσετε ως σωστό (**Σ**) ή λάθος (**Λ**) τις επόμενες προτάσεις:

- i. Οι διχοτόμοι δύο εφεξής και παραπληρωματικών γωνιών είναι κάθετες.
- ii. Δύο γωνίες λέγονται συμπληρωματικές όταν έχουν άθροισμα μία ευθεία γωνία
- iii. Μια γωνία λέγεται επίκεντρη όταν οι πλευρές της είναι χορδές του κύκλου.

Μονάδες 9

Γ. Να συμπληρώσετε τις παρακάτω προτάσεις:

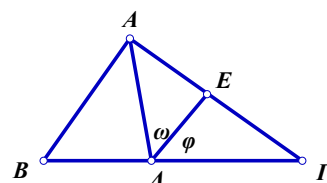
- i. Μία χορδή που διέρχεται από το κέντρο του κύκλου λέγεται
- ii. Δύο τόξα ενός κύκλου είναι ίσα αν και μόνο αν οι που βαίνουν σ' αυτά είναι ίσες.
- iii. Η διάμεσος τραπεζίου ισούται με το των βάσεων του.

Μονάδες 9

Θέμα 2^ο

Στο διπλανό σχήμα δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$)

και η AD διχοτόμος της \hat{A} . Αν είναι $DE \parallel AB$ και η \hat{B} μεγαλύτερη κατά 20° από την $\hat{\Gamma}$ να υπολογίσετε τις γωνίες ω και φ .



Μονάδες 25

Θέμα 3^ο

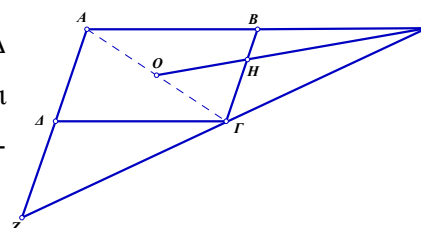
Προεκτείνουμε τις πλευρές AB και AG τριγώνου $AB\Gamma$ προς το μέρος του A και στις προεκτάσεις παίρνουμε αντίστοιχα τμήματα $AD = AB$ και $AE = AG$.

- i. Να συγκρίνετε τα τμήματα DE και $B\Gamma$ Μονάδες 10
- ii. Αν η προέκταση του ύψους AH τέμνει τη DE στο Z , να δείξετε ότι το τμήμα AZ είναι ύψος του τριγώνου ADE . Μονάδες 10
- iii. Είναι η προέκταση της διχοτόμου AN του τριγώνου $AB\Gamma$ διχοτόμος του τριγώνου ADE ; Μονάδες 5

Θέμα 4^ο

Προεκτείνουμε την πλευρά AB παραλληλογράμμου $AB\Gamma\Delta$ κατά τμήμα $BE = AB$. Φέρνουμε την ευθεία EG που τέμνει την ευθεία AD στο Z . Αν το O είναι το κέντρο του παραλληλογράμμου και η OE τέμνει την $B\Gamma$ στο H να δείξετε ότι:

- i. $GE = \Gamma Z$
- ii. $BH = \frac{1}{2} \Gamma H$



Μονάδες 13 + 12

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1^ο

a. Να διατυπώσετε τα κριτήρια ισότητας των τριγώνων.

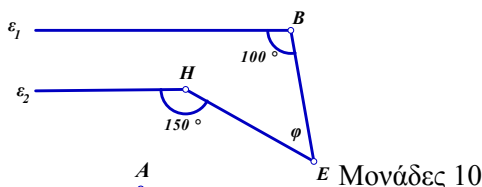
Μονάδες 3 x 5 = 15

b. Να δείξετε ότι, η διάμεσος ορθογωνίου τριγώνου που αντιστοιχεί στην υποτεινύσα ισούται με το μισό της.

Μονάδες 10

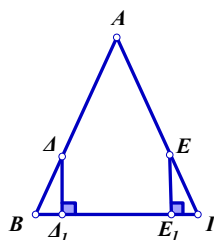
Θέμα 2^ο

a. Αν οι ευθείες ε_1 , ε_2 του σχήματος είναι παράλληλες να υπολογίσετε το μέτρο της γωνίας φ .



Μονάδες 10

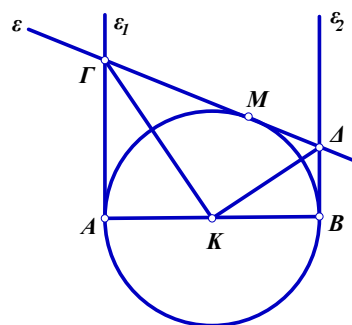
b. Στις ίσες πλευρές AB, AG ισοσκελούς τριγώνου ABΓ παίρνουμε τα σημεία Δ, Ε, έτσι ώστε να είναι $AD = AE$. Αν DA_1 και EE_1 κάθετα στη ΒΓ να δείξετε ότι $DA_1 = EE_1$



Μονάδες 15

Θέμα 3^ο

Έστω AB διάμετρος κύκλου (Κ, ρ) και οι εφαπτομένες ε_1 και ε_2 του κύκλου στα σημεία Α και Β αντίστοιχα. Μια άλλη εφαπτομένη σε τυχαίο σημείο Μ του κύκλου τέμνει τις ε_1 και ε_2 στα σημεία Γ και Δ αντίστοιχα.



1. Τι σχέση έχουν:

- Οι ε_1 και ε_2
- Οι γωνίες \widehat{AGM} και \widehat{MDB}
- Τα ευθύγραμμα τμήματα ΓΜ και ΓΑ

(Να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας)

Μονάδες 3 + 5 + 5 = 13

2. Να αποδείξετε ότι $\widehat{GKD} = 90^\circ$

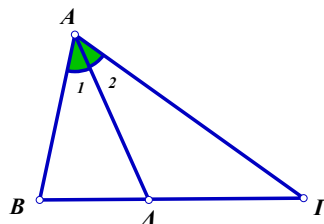
Μονάδες 12

Θέμα 4^ο

Δίνεται τρίγωνο ABΓ με $\hat{B} > \hat{\Gamma}$ και η διχοτόμος του ΑΔ.

Να δείξετε ότι:

- $\widehat{A\Delta\Gamma} - \widehat{A\Delta B} = \hat{B} - \hat{\Gamma}$
- $\widehat{A\Delta B} = 90^\circ - \frac{\hat{B} - \hat{\Gamma}}{2}$
- $\widehat{A\Delta\Gamma} = 90^\circ + \frac{\hat{B} - \hat{\Gamma}}{2}$



Μονάδες 10 + 10 + 5 = 25

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1^ο

- a. Δώστε τον ορισμό του ορθογωνίου.

Μονάδες 8

- b. Αν ένα παραλληλόγραμμο έχει ίσες διαγώνιους να δείξετε ότι είναι ορθογώνιο

Μονάδες 17

Θέμα 2^ο

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) Στην προέκταση της βάσης του θεωρούμε τα σημεία Δ και E προς το μέρος των B και Γ αντίστοιχα έτσι ώστε $B\Delta = \Gamma E$. Να δείξετε ότι:

- a. $\Delta\Gamma = BE$.

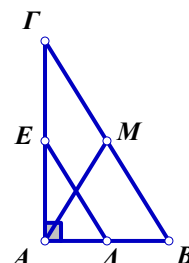
Μονάδες 7

- b. Το τρίγωνο $A\Delta E$ είναι ισοσκελές

Μονάδες 18

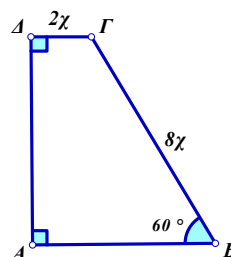
Θέμα 3^ο

- a. Αν Δ , M , E είναι μέσα των AB , $B\Gamma$, $A\Gamma$, να δείξετε ότι $\Delta E = AM$



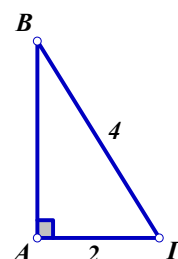
Μονάδες 8

- b. Να υπολογίσετε την διάμεσο του τραπεζίου



Μονάδες 12

- c. Να υπολογίσετε τη γωνία Γ



Μονάδες 5

Θέμα 4^ο

Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$. Θεωρούμε το συμμετρικό της κορυφής A ως προς τη διαγώνιο $B\Delta$. Να δείξετε ότι:

- a. Το τρίγωνο ABE είναι ισοσκελές

Μονάδες 8

- b. Το τετράπλευρο με κορυφές τα σημεία B , E , Γ , Δ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

Μονάδες 17

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1^ο

Α. Να αποδείξετε ότι οι τρεις μεσοκάθετοι ενός τριγώνου διέρχονται από το ίδιο σημείο το οποίο είναι κέντρο κύκλου που διέρχεται από τις κορυφές του τριγώνου.

Μονάδες 15

Να χαρακτηρίσετε ως σωστό (Σ) ή λάθος (Λ) τις επόμενες προτάσεις.

- i. Αν δύο τρίγωνα έχουν τρεις γωνίες τους ίσες μία προς μία είναι ίσα.
- ii. Κάθε εξωτερική γωνία τριγώνου είναι μεγαλύτερη από τις απέναντι γωνίες του τριγώνου.
- iii. Αν δύο παράλληλες ευθείες τέμνονται από τρίτη σχηματίζουν τις εντός εναλλάξ γωνίες παραπληρωματικές.
- iv. Ένα παραλληλόγραμμο με ίσες διαγώνιες είναι ορθογώνιο.
- v. Το σημείο τομής των διχοτόμων ενός τριγώνου λέγεται βαρύκεντρο.

Μονάδες $2 \times 5 = 10$

Θέμα 2^ο

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ. Στις προεκτάσεις των ίσων πλευρών ΑΒ και ΑΓ θεωρούμε αντίστοιχα τα ίσα τμήματα ΑΔ και ΑΕ. Αν η ΑΜ είναι διάμεσος του τριγώνου ΑΒΓ, να δείξετε ότι το τρίγωνο ΜΔΕ είναι ισοσκελές.

Μονάδες 25

Θέμα 3^ο

Από το έγκεντρο Ι τριγώνου ΑΒΓ φέρνουμε ευθεία παράλληλη της πλευράς ΒΓ που τέμνει τις ΑΒ και ΑΓ στα σημεία Δ και Ε αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι $\Delta E = B\Delta + \Gamma E$.

Μονάδες 25

Θέμα 4^ο

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} = 90^\circ$) με $\hat{B} = 60^\circ$. Φέρνουμε τη διχοτόμο Βχ της \hat{B} και την $\Gamma\Delta \perp B\chi$. Να δείξετε ότι:

- i. $AB = \Gamma\Delta$
- ii. Αν Ο το σημείο τομής των ΑΓ και Βχ, το τρίγωνο ΑΟΔ είναι ισοσκελές.
- iii. Το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

Μονάδες 8

Μονάδες 8

Μονάδες 9

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1^ο

A. Να αποδειχθεί ότι η διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα ορθογωνίου τριγώνου ισούται με το μισό της.

Μονάδες 15

B. Να αντιστοιχίσετε κάθε στοιχείο της στήλης A ένα μόνο στοιχείο της στήλης B.

Στήλη A - Τετράπλευρα

- Ορθογώνιο Παραλληλόγραμμο
- Τραπεζίο
- Ρόμβος
- Τετράγωνο

Στήλη B - Ιδιότητες

- Δύο απέναντι πλευρές είναι παράλληλες και άνισες
- Είναι παραλληλόγραμμο με όλες τις πλευρές του ίσες
- Το άθροισμα των γωνιών του είναι 400°
- Οι διαγώνιοι του είναι ίσες.

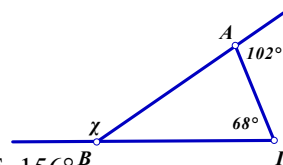
Μονάδες 10

Θέμα 2^ο

A. Να επιλέξετε την σωστή απάντηση

1. Στο διπλανό σχήμα η γωνία χ είναι ίση με

- A. 100° B. 102° Γ. 34° Δ. 146° E. 156°



Μονάδες 5

2. Αν είναι $\varepsilon_1 // \varepsilon_2$ και $\hat{\alpha} = \chi$, $\hat{\beta} = 5\chi$ τότε

A. $\hat{\alpha} = 60^\circ$ $\hat{\beta} = 15^\circ$, B. $\hat{\alpha} = 60^\circ$ $\hat{\beta} = 150^\circ$,

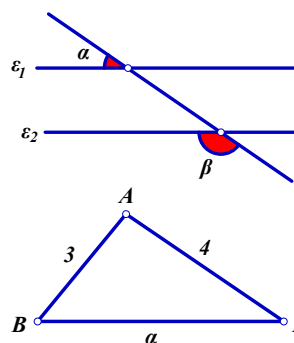
Γ. $\hat{\alpha} = 30^\circ$ $\hat{\beta} = 150^\circ$, Δ. $\hat{\alpha} = 60^\circ$ $\hat{\beta} = 120^\circ$

3. Στο τρίγωνο του διπλανού σχήματος είναι

A. $\alpha = 7$ B. $\alpha = 1$ Γ. $1 < \alpha < 7$

Δ. $\alpha > 7$ E. $0 < \alpha < 1$

B Έστω τρίγωνο ABΓ και η διάμεσος ΑΔ. Να δείξετε ότι τα B, Γ ισαπέχουν από την ΑΔ.



Μονάδες 5

Μονάδες 5

Μονάδες 10

Θέμα 3^ο

Σε ορθογώνιο τρίγωνο ABΓ ($\hat{A} = 90^\circ$) με $\hat{B} > \hat{\Gamma}$ φέρνουμε τη διάμεσο ΑΜ και το ύψος ΑΔ

A. Ποιες γωνίες είναι ίσες με την $\hat{\Gamma}$ και γιατί;

B. Να δείξετε ότι $\widehat{\Delta AM} = \hat{B} - \hat{\Gamma}$

Αν $\hat{\Gamma} = 15^\circ$ τότε $A\Delta = \frac{B\Gamma}{4}$

Μονάδες 7,5 + 7,5 + 10

Θέμα 4^ο

Τριγώνου ABΓ προεκτείνουμε το ύψος ΑΔ και την διάμεσο ΑΕ κατά τμήματα $\Delta\Lambda = A\Delta$ και $E\K = AE$. Να δείξετε ότι:

A. $B\Gamma // \Lambda\K$

Μονάδες 7,5

B. Το τετράπλευρο ABΚΓ είναι παραλληλόγραμμο

Μονάδες 7,5

Γ. Το τετράπλευρο ΒΛΚΓ είναι ισοσκελές τραπέζιο

Μονάδες 10

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1^ο

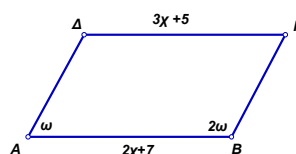
Χαρακτηρίστε ως σωστή (Σ) ή λάθος (Λ) κάθε μια από τις επόμενες προτάσεις:

Σ - Λ

- i. Η $\hat{A}_{\varepsilon\zeta}$ τριγώνου ABΓ είναι μεγαλύτερη από τη $\hat{\Gamma}$
- ii. Το άθροισμα των εξωτερικών γωνιών κυρτού ν – γώνου είναι 4°
- iii. Είναι δυνατόν δύο τρίγωνα να έχουν δύο πλευρές τους ίσες μία προς μία και μια γωνία ίση χωρίς να είναι ίσα.

Θέμα 2^ο

Το διπλανό σχήμα είναι παραλληλό-
γραμμο να υπολογίσετε τα χ και ω



Θέμα 3^ο

Οι γωνίες B, Γ, A τριγώνου ABΓ έχουν αντίστοιχα μέτρα θ , 2θ , 3θ και η πλευρά του BΓ είναι 4. Να βρείτε το μήκος της πλευράς ΑΓ.

Θέμα 4^ο

Σ' ένα τετράγωνο ABΓΔ το σημείο E είναι συμμετρικό του B ως προς το

Δ. Αν Z μέσο της ΑΔ και Η ή τομή των ΑΕ και ΓΔ, ναδειχθεί ότι:

- i. $\Delta H = \frac{AB}{2}$
- ii. $\hat{A\Delta H} = \hat{Z\Delta\Gamma}$
- iii. $\Gamma Z \perp AE$

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1^ο

A. Να δείξετε ότι, αν σ' ένα ορθογώνιο τρίγωνο μια γωνία του ισούται με 30° , τότε η απέναντι πλευρά του είναι το μισό της υποτείνουσας.

Μονάδες 15

B. Αν (K, R) και (Λ, ρ) είναι δύο κύκλοι με διαφορετικά κέντρα και $R > \rho$, $K\Lambda = \delta$ να αντιστοιχίσετε κάθε φράση της πρώτης στήλης στη δεύτερη στήλη.

Στήλη Α

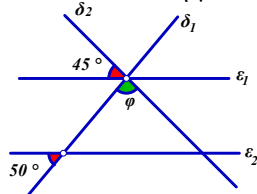
- Ο κύκλος (Λ, ρ) είναι εσωτερικός του κύκλου (K, R)
- Ο κύκλος (Λ, ρ) εφάπτεται εσωτερικά του κύκλου (K, R)
- Οι κύκλοι (K, R) και (Λ, ρ) τέμνονται
- Οι κύκλοι (K, R) και (Λ, ρ) εφάπτονται εξωτερικά
- Κάθε κύκλος είναι εξωτερικός του άλλου

Στήλη Β

- $\delta > R + \rho$
- $\delta = R + \rho$
- $\delta = R - \rho$
- $\delta < R - \rho$
- $2\delta = R - \rho$
- $\rho < \delta < R$
- $2\delta = R\rho$
- $R - \rho < \delta < R + \rho$

Θέμα 2^ο

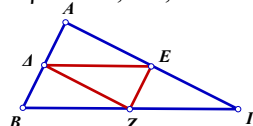
a. Αν είναι $\varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2$ τότε η γωνία φ έχει μέτρο



- A. 95° B. 45° Γ. 90° Δ. 50° Ε. 86°

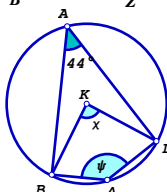
Μονάδες 5

b. Στο τρίγωνο ABΓ του σχήματος είναι $AB = 6$, $B\Gamma = 10$, $A\Gamma = 8$. Αν Δ, Ε, Ζ είναι τα μέσα των πλευρών AB, AΓ, BΓ αντίστοιχα τότε η περίμετρος του τριγώνου είναι:



- A. 24 B. 15 Γ. 20 Δ. 12

Μονάδες 5



c. Στο επόμενο σχήμα οι γωνίες χ και ψ είναι:

- A. $\begin{cases} \hat{\chi} = 44^\circ \\ \hat{\psi} = 66^\circ \end{cases}$ B. $\begin{cases} \hat{\chi} = 88^\circ \\ \hat{\psi} = 136^\circ \end{cases}$ Γ. $\begin{cases} \hat{\chi} = 88^\circ \\ \hat{\psi} = 46^\circ \end{cases}$ Δ. $\begin{cases} \hat{\chi} = 44^\circ \\ \hat{\psi} = 88^\circ \end{cases}$

Μονάδες 5

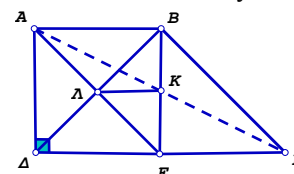
B. Να δείξετε ότι τα μέσα των πλευρών ισοσκελούς τριγώνου ισαπέχουν από τη βάση

Μονάδες 10

Θέμα 3^ο

Έστω τραπέζιο ABΓΔ με $\hat{A} = \hat{\Delta} = 90^\circ$, $\Delta\Gamma = 2AB$ και $\hat{B} = 3\hat{\Gamma}$. Φέρνουμε τη $BE \perp \Delta\Gamma$, που τέμνει την AΓ στο σημείο Κ και την ΑΕ που τέμνει την

BΔ στο σημείο Λ. Να δείξετε ότι: α) $\hat{\Gamma} = 45^\circ$, β) $B\Delta = AE$, γ) $K\Lambda = \frac{\Delta\Gamma}{4}$

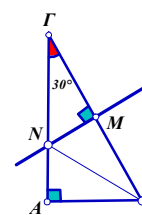


Μονάδες 8 + 8 + 9

Θέμα 4^ο

Σε ορθογώνιο τρίγωνο ABΓ ($\hat{A} = 90^\circ$) με $\hat{\Gamma} = 30^\circ$ η κάθετη στο μέσο Μ της υποτείνουσας BΓ τέμνει την AΓ στο Ν. i) Να δείξετε ότι $\Gamma N = 2NM$

ii) Να υπολογίσετε την \widehat{ANB} . iii) Να δείξετε ότι $AN = \frac{\Gamma N}{2}$ και iv) $MN = \frac{A\Gamma}{3}$



μονάδες 5 + 5 + 8 + 7

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1^ο

- a. Αναφέρετε τα κριτήρια ισότητας τριγώνων .

Μονάδες 3

- b. Δείξτε ότι το άθροισμα των γωνιών κάθε τριγώνου , είναι δύο ορθές .

Μονάδες 7

- c. Δύο γωνίες που έχουν τις πλευρές τους κάθετες είναι πάντα ίσες ; **Σ** **Λ**

Μονάδες 2

- d. Αναφέρετε προτάσεις για να είναι ένα τετράπλευρο παραλληλόγραμμο.

Μονάδες 4

- e. Δείξτε ότι η διάμεσος ορθογωνίου τριγώνου που φέρουμε από την κορυφή της ορθής γωνίας , είναι ίση με το μισό της υποτείνουσας.

Μονάδες 9

Θέμα 2^ο

Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ με γωνίες $\hat{A} = \hat{\Delta} = 90^\circ$ και $\hat{B} = 120^\circ$. Αν $AB = 2\alpha$ και $BF = \alpha$, να υπολογίσετε τη διάμεσο ΕΖ του τραπεζίου ως συνάρτηση του α .

Μονάδες 25

Θέμα 3^ο

Αν Ε και Ζ τα μέσα των πλευρών ΑΒ και Γ Δ παραλληλογράμμου ΑΒΓ Δ αντίστοιχα , να αποδείξετε ότι οι ΔΕ και ΒΖ τριχοτομούν τη διαγώνιο ΑΓ.

Μονάδες 25

Θέμα 4^ο

Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ ($AB = AG$) και Ι το σημείο τομής των διχοτόμων των γωνιών Β και Γ. Να αποδείξετε ότι :

- a. Το τρίγωνο ΒΙΓ είναι ισοσκελές.

Μονάδες 12

- b. Η ΑΙ είναι διχοτόμος της γωνίας Α

Μονάδες 13

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1^ο

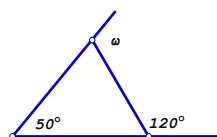
a. (Επιλέξτε τη σωστή από τις παρακάτω απαντήσεις)

Για να είναι ένα τετράπλευρο ορθογώνιο παραλληλόγραμμο, πρέπει:

- Να έχει δυο γωνίες ορθές
 - Να έχει τις απέναντι γωνίες του ίσες
 - Να είναι παραλληλόγραμμο με μια γωνία ορθή.
 - Οι διαγώνιοί του να διχοτομούνται
 - Να έχει τις απέναντι πλευρές του ίσες
- b. Να αποδειχθεί το Θεώρημα: Η διάμεσος ορθογωνίου τριγώνου που φέρουμε από την κορυφή της ορθής γωνίας είναι ίση με το μισό της υποτεινούσας.
- c. Να χαρακτηρίσετε με Σ (σωστή) ή Λ (λάθος) κάθε μια από τις παρακάτω προτάσεις
- Οι γωνίες στη βάση ισοσκελούς τριγώνου είναι ίσες
 - Αν δυο κύκλοι δεν έχουν κοινά σημεία τότε ο ένας είναι εξωτερικός του άλλου
 - Ένα τρίγωνο με δύο πλευρές ίσες είναι ισόπλευρο
 - Αν δυο χορδές ενός κύκλου είναι ίσες τότε και τα αποστήματά τους θα είναι ίσα
 - Η διάκεντρος δύο τεμνόμενων κύκλων είναι μεσοκάθετος της κοινής χορδής
- d. Δίνονται οι κύκλοι (K, ρ) και (Λ, ρ) . Αν είναι $\rho = a$, $R = 3a$ και $K\Lambda = 2a$ τότε:
- Οι κύκλοι τέμνονται
 - Οι κύκλοι εφάπτονται εσωτερικά
 - Οι κύκλοι εφάπτονται εξωτερικά
 - Ο ένας κύκλος είναι εξωτερικός του άλλου

Θέμα 2^ο

a. Να υπολογίσετε τη γωνία ω στο διπλανό σχήμα



- b. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) και K, Λ τα μέσα των πλευρών του AB και $A\Gamma$ αντίστοιχα. Στο K υψώνουμε κάθετη στην AB που τέμνει την $B\Gamma$ στο Δ και στο Λ υψώνουμε κάθετη στην $A\Gamma$ που τέμνει την $B\Gamma$ στο E . Δείξτε ότι:
- $K\Delta = E\Lambda$
 - $EB = \Gamma\Delta$
 - Το τρίγωνο $AE\Delta$ είναι ισοσκελές

Θέμα 3^ο

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB < A\Gamma$. Φέρνουμε το ύψος AH και το προεκτείνουμε κατά ίσο τμήμα $HE = HA$.

Φέρνουμε και τη διάμεσο AM και την προεκτείνουμε κατά ίσο τμήμα $M\Delta = MA$.

- a. Να δικαιολογήσετε ότι:
- $BE = AB$
 - $\Gamma\Delta \parallel AB$
- b. Να αποδείξετε ότι το $B\Gamma\Delta E$ είναι ισοσκελές τραπέζιο

Θέμα 4^ο

Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ και η διαγώνίός του $A\Gamma$. Αν B', Δ' είναι οι προβολές των B και Δ αντίστοιχα στην $A\Gamma$ και τα B', Δ' δεν ταυτίζονται, να δείξετε ότι:

- Το τετράπλευρο $BB'\Delta\Delta'$ είναι παραλληλόγραμμο.
- Το μέσο O του $\Delta'B'$ είναι και μέσο του $A\Gamma$.

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1^ο

α. Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση:

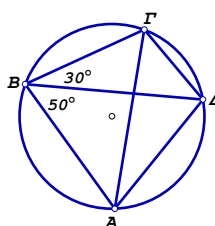
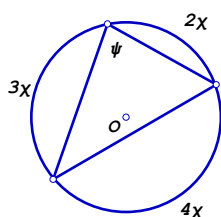
i. Αν φ είναι η εγγεγραμμένη γωνία και ω η επίκεντρη που βαίνουν στο ίδιο τόξο ενός κύκλου, τότε:

A. $\varphi = \omega$ **B.** $\varphi = 2\omega$ **Γ.** $\omega = 2\varphi$ **Δ.** $\varphi = 90^\circ + \omega$

ii. Αν ΑΒΓΔ είναι τετράπλευρο εγγεγραμμένο σε κύκλο, τότε:

A. $A + \Gamma = 108^\circ$ **B.** $A = \Gamma$ **Γ.** $B = \Gamma$ **Δ.** $A + \Gamma = 90^\circ$

iii. Να υπολογισθούν τα χ , ψ και οι γωνίες ΑΓΔ και Δ



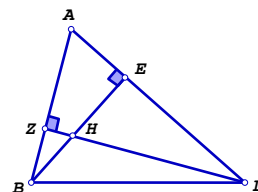
Θέμα 2^ο

Τριγώνου ΑΒΓ τα ύψη του ΒΕ και ΓΖ τέμνονται στο Η.

Να αποδειχθεί ότι:

i. τα τρίγωνα ΗΒΖ και ΗΓΕ είναι όμοια

ii. $HE \cdot HB = HG \cdot HZ$.



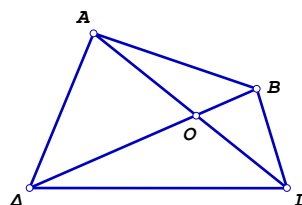
Θέμα 3^ο

Σε τυχαίο τετράπλευρο ΑΒΓΔ δείξτε ότι:

i. $AG < \frac{AB + BG + \Gamma\Delta + \Delta A}{2}$

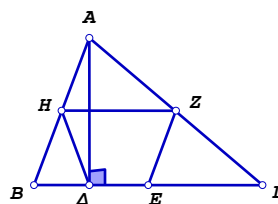
ii. $AG + B\Delta < AB + B\Gamma + \Gamma\Delta + \Delta A$

iii. $AB + \Gamma\Delta < AG + B\Delta$



Θέμα 4^ο

Αν ΑΔ ύψος και Ε, Ζ, Η τα μέσα των πλευρών ΒΓ, ΑΓ, ΑΒ αντίστοιχα ενός τριγώνου ΑΒΓ, να αποδειχθεί ότι το ΔΕΖΗ είναι ισοσκελές τραπέζιο.



ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1^ο

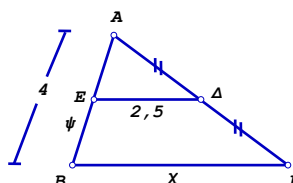
a. Να δείξετε ότι:

Το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα μέσα των δυο πλευρών τριγώνου είναι παράλληλο προς την τρίτη πλευρά και ίσο με το μισό της.

(Μον. 20)

b. Στο διπλανό σχήμα να υπολογιστούν

τα χ και ψ αν είναι $ED \parallel BG$

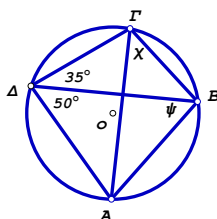


(Μον. 5)

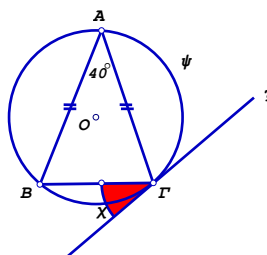
Θέμα 2^ο

a. Σε καθένα από τα διπλανά σχήματα να βρείτε τα χ και ψ .

(Η ευθεία ε είναι εφαπτομένη στον κύκλο)



(Μον. 5)



(Μον. 5)

b. Να αποδειχθεί ότι κάθε ισοσκελές τραπέζιο είναι εγγράψιμο

(Μον. 15)

Θέμα 3^ο

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) και η διχοτόμος του $B\Delta$. Από το Δ φέρνουμε $\Delta E \perp B\Gamma$, που τέμνει την AB στο Z . Να δείξετε ότι $BZ = B\Gamma$.

(Μον. 25)

Θέμα 4^ο

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) και το ύψος του $A\Delta$.

a. Αν E, Z είναι τα μέσα των AB και $A\Gamma$,

να αποδείξετε ότι $\angle EZD = \hat{A} = 90^\circ$

(Μον. 15)

b. Αν M είναι το μέσο της EZ , να αποδείξετε ότι $\Delta M = \frac{B\Gamma}{4}$

(Μον. 10)

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1^ο

A. Να αποδειχθεί ότι, κάθε σημείο της διχοτόμου μιας γωνίας ισαπέχει από τις πλευρές της .

Μονάδες 13

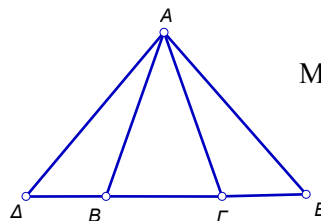
B. α. Ποιο τετράπλευρο ονομάζεται εγγράψιμο σε κύκλο ;

Μονάδες 3

β. Γράψτε τα κριτήρια για να είναι ένα τετράπλευρο εγγράψιμο σε κύκλο. Μονάδες 9

Θέμα 2^ο

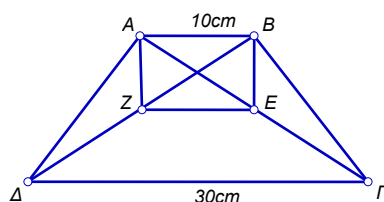
Το τρίγωνο ABΓ είναι ισοσκελές και η βάση ΒΓ έχει προεκταθεί κατά ίσα τμήματα ΒΔ = ΓΕ. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ισοσκελές.



Μονάδες 25

Θέμα 3^ο

Το τραπέζιο ABΓΔ είναι ισοσκελές με AB = 10cm και ΓΔ = 30cm. Αν τα σημεία E, Z είναι αντίστοιχα τα μέσα των ΑΓ και ΒΔ, τότε:



a. Να υπολογίσετε το μήκος της ZE

Μονάδες 12

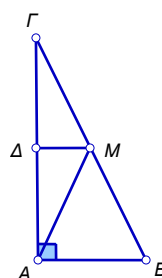
b. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ABEZ είναι ορθογώνιο

Μονάδες 13

Θέμα 4^ο

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ABΓ ($\hat{A} = 90^\circ$)

με $\hat{B} = 60^\circ$, η AM είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στη ΒΓ και η ΜΔ διχοτόμος της γωνίας $\widehat{AMΓ}$. Να αποδείξετε ότι :



a. Το τρίγωνο AMB είναι ισόπλευρο.

Μονάδες 7

b. $ΜΔ // AB$.

Μονάδες 9

c. $ΜΔ = \frac{BΓ}{4}$.

Μονάδες 9

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1^ο

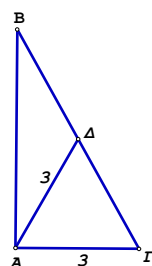
Α. Σε ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ έστω M το μέσο της υποτείνουσας $B\Gamma$ και $M\Delta$ η κάθετη από το M στην $A\Gamma$. Να αποδείξετε ότι:

- Το σημείο Δ είναι μέσο της $A\Gamma$
- Το τρίγωνο $AM\Gamma$ είναι ισοσκελές.

iii. $AM = \frac{B\Gamma}{2}$

Β. α. Στο διπλανό σχήμα το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο στο A και η $A\Delta$ διάμεσος του τριγώνου.

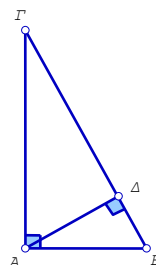
Να βρείτε την $B\Gamma$ και τις γωνίες \hat{B} και $\hat{\Gamma}$.



Μονάδες 12

β. Στο διπλανό σχήμα το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο στο A . Το $A\Delta$ είναι ύψος του τριγώνου, η γωνία $\hat{\Gamma} = 30^\circ$ και η $B\Gamma = 8$.

Να υπολογίσετε την $B\Delta$.



Μονάδες 6

Μονάδες 7

Θέμα 2^ο

Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι $\hat{B_{εξ}} = 90^\circ + \frac{\hat{A}}{2}$. Να αποδείξετε ότι $AB = A\Gamma$.

Μονάδες 25

Θέμα 3^ο

Δίνεται τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ ($AB \parallel \Gamma\Delta$) με $AB = a$ και $\Gamma\Delta = 2a$. Τα σημεία M και N είναι τα μέσα των πλευρών $A\Delta$ και $B\Gamma$ αντίστοιχα. Αν η MN τέμνει τις διαγώνιες ΔB και $A\Gamma$ στα σημεία E και Z αντίστοιχα, να δείξετε ότι:

$$ME = ZN = EZ = \frac{a}{2}$$

Μονάδες 25

Θέμα 4^ο

Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ με $AB = A\Gamma$ και M το μέσο της πλευράς $B\Gamma$. Αν η AM τέμνει την προέκταση της $\Delta\Gamma$ στο σημείο E , να αποδείξετε ότι:

α. $AM = ME$

Μονάδες 7

β. $AM \perp B\Gamma$

Μονάδες 6

γ. Το $ABE\Gamma$ είναι ρόμβος

Μονάδες 6

δ. Το σημείο Γ είναι μέσο του ΔE

Μονάδες 6

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1^ο

Α. Να αποδείξετε ότι: Η διάμεσος ορθογωνίου τριγώνου που φέρουμε από την κορυφή της ορθής γωνίας είναι ίση με το μισό της υποτείνουσας.

Μονάδες 12

Β. Να γράψετε τον ορισμό του ισοσκελούς τραπεζίου.

Μονάδες 5

Γ. Να γράψετε τα κριτήρια για να είναι ένα τραπέζιο ισοσκελές.

Μονάδες 8

Θέμα 2^ο

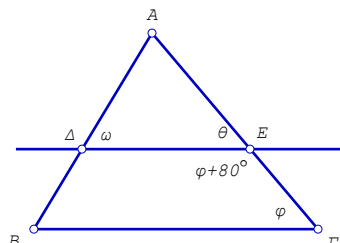
Α. Αν $\hat{A} = 70^\circ$ και $DE \parallel B\Gamma$

να υπολογισθούν οι γωνίες

$\varphi = \dots\dots$

$\omega = \dots\dots$

$\theta = \dots\dots$



Μονάδες 12

Β. Οι διχοτόμοι των γωνιών Β και Γ τριγώνου ΑΒΓ, τέμνονται στο Θ. Φέρνουμε

$\Theta\Delta \parallel AB$ και $\Theta E \parallel A\Gamma$. Να αποδείξετε ότι: $\Theta\Delta + \Delta E + E\Theta = B\Gamma$

Μονάδες 13

Θέμα 3^ο

Σε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} = 90^\circ$) φέρνουμε το ύψος ΑΔ, την κάθετη ΔΕ στην ΑΒ και την κάθετη ΔΖ στην ΑΓ. Αν η διάμεσος ΑΜ τέμνει τη ΔΖ στο Η.

Να αποδείξετε ότι:

a. $\widehat{B\Delta E} = \hat{\Gamma}$

Μονάδες 6

b. Τα τρίγωνα ΑΗΖ και ΒΔΕ είναι ίσα.

Μονάδες 6

c. Το τετράπλευρο ΒΕΖΗ είναι παραλληλόγραμμο.

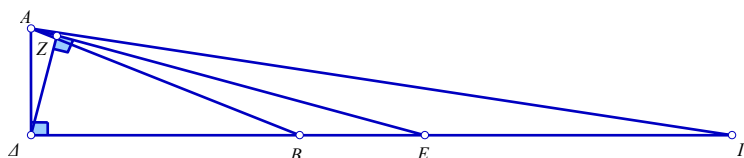
Μονάδες 7

d. $AD = BH$.

Μονάδες 6

Θέμα 4^ο

Σε τρίγωνο ΑΒΓ είναι $\hat{B} = 150^\circ + \hat{\Gamma}$. Αν η ΑΕ είναι η διχοτόμος, ΑΔ το ύψος και το τμήμα $\Delta Z \perp AE$. Να αποδείξετε ότι.



a. $\widehat{BA\Gamma} + 2\hat{\Gamma} = 30^\circ$

Μονάδες 8

b. $\widehat{AE\Delta} = 15^\circ$

Μονάδες 9

c. $\Delta Z = \frac{1}{4}AE$

Μονάδες 8

d.

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1^ο

A.

- a. Να αποδείξετε ότι τα εφαπτόμενα τμήματα του κύκλου που άγονται από σημείο εκτός αυτού είναι ίσα μεταξύ τους. Μονάδες 10

- b. Τι λέγεται διάκεντρος και τι κοινή χορδή δύο κύκλων που τέμνονται. Μονάδες 3

B. Να συμπληρώσετε τις προτάσεις

- a. Κάθε εξωτερική γωνία τριγώνου είναι ίση με το
b. Η διάμεσος τραπέζιου είναι ίση με
c. Κάθε σημείο της διχοτόμου μιας γωνίας και αντίστροφα
d. Κάθε σημείο της μεσοκαθέτου ενός ευθυγράμμου τμήματος και αντίστροφα

Θέμα 2^ο

Σε ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) με $\hat{B} = 2\hat{\Gamma}$ φέρνουμε τη $B\Delta$ διχοτόμο της γωνίας B και παίρνουμε το σημείο M μέσο της υποτείνουσας $B\Gamma$.

- a. Να αποδείξετε ότι: $\Delta M = \Delta A$ Μονάδες 15
b. Να υπολογίσετε τη γωνία $M\Delta\Gamma$ Μονάδες 10

Θέμα 3^ο

Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ ($AB \parallel \Gamma\Delta$) με $\Gamma\Delta = 3AB$. Αν τα σημεία K, Λ είναι τα μέσα των διαγωνίων του ΔB και $A\Gamma$ αντίστοιχα να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $AK\Lambda B$ είναι ορθογώνιο.

Θέμα 4^ο

Δίνεται τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$ και το σημείο M μέσο της πλευράς του AB .

- a. Αν η $M\Gamma$ τέμνει τη $B\Delta$ στο σημείο K να αποδείξετε ότι: $BK = \frac{A\Gamma}{3}$ Μονάδες 12
b. Αν E μέσο της $B\Gamma$ να αποδείξετε ότι είναι $\Delta B \perp ME$ και $\Delta B = 2ME$ Μονάδες 13

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1^ο

Δείξτε ότι:

Το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα μέσα των δύο πλευρών τριγώνου είναι
παράλληλο προς την τρίτη πλευρά και ίσο με το μισό της

Μονάδες 25

Θέμα 2^ο

Δύο τρίγωνα $AB\Gamma$ και ΔEZ έχουν: $\hat{A} = \hat{\Delta}$ και τα ύψη τους $u_B = u_E$ και $u_\Gamma = u_Z$

Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα είναι ίσα.

Μονάδες 25

Θέμα 3^ο

Δίδεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$). Η διχοτόμος της γωνίας B τέμνει

την $A\Gamma$ στο Z και την κάθετη στη $B\Gamma$ στο σημείο Γ , στο H . Να αποδείξετε ότι $Z\Gamma = \Gamma H$

Μονάδες 25

Θέμα 4^ο

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB < A\Gamma$, η διχοτόμος του $A\Delta$ και το σημείο M μέσο της $B\Gamma$. Φέρνουμε το

τμήμα $BE \perp A\Delta$ που τέμνει την $A\Gamma$ στο Z . Να αποδείξετε ότι:

A. $EM \parallel A\Gamma$.

Μονάδες 9

B. $EM = \frac{A\Gamma - AB}{2}$

Μονάδες 8

Γ. $\widehat{\Delta EM} = \frac{\hat{A}}{2}$

Μονάδες 8

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1^ο

A. Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου είναι ίσο με 180° .

Μονάδες 13

B. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο φύλλο απαντήσεων τη λέξη **Σωστό (Σ)** ή **Λάθος (Λ)** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

- Η διάμεσος ενός τραπεζίου είναι παράλληλη προς τις βάσεις του τραπεζίου και ίση με την ημιδιαφορά αυτών.
- Δύο γωνίες που έχουν τις πλευρές τους παράλληλες, μία προς μία, είναι ίσες ή παραπληρωματικές.
- Αν δύο τρίγωνα έχουν την υποτείνουσα και μία κάθετη πλευρά αντίστοιχα ίσες μία προς μία, τότε είναι ίσα.
- Οι διαγώνιοι ενός ρόμβου είναι ίσες.

Μονάδες 12

Θέμα 2^ο

Στο εσωτερικό γωνίας $\chi O \psi$ παίρνουμε σημείο A και φέρνουμε τις $AB \perp O\chi$ και $AG \perp O\psi$.

Αν M το μέσο της OA και N το μέσο της BG, να αποδείξετε ότι: $MN \perp BG$.

Μονάδες 25

Θέμα 3^ο

Σε τρίγωνο ABΓ είναι $\delta_a = \gamma$, και $\delta_\gamma = \alpha$.

a. Να αποδείξετε ότι, $\widehat{B} + \widehat{\Gamma} = \frac{\widehat{A}}{2}$ και $\widehat{B} = \widehat{A} + \frac{\widehat{\Gamma}}{2}$.

Μονάδες 8

b. Να αποδείξετε ότι, $\alpha = \gamma$.

Μονάδες 8

c. Να βρείτε το μέτρο των γωνιών A, B, Γ.

Μονάδες 10

Θέμα 4^ο

Σε τραπέζιο ABΓΔ με βάσεις AB και ΓΔ ισχύει $AD = AB + \Gamma\Delta$. Αν οι προεκτάσεις των

AM και ΔM τέμνουν αντίστοιχα τις ΔΓ στο E και AB στο Z, να αποδείξετε ότι:

a. $\widehat{AMB} = \widehat{M\Gamma E}$

Μονάδες 8

b. $BZ = \Delta\Gamma$

Μονάδες 8

c. το τετράπλευρο AΔEZ είναι ρόμβος.

Μονάδες 9

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1^ο

Να δείξετε ότι η διάμεσος του τραπεζίου είναι ίση με το ημιάθροισμα των βάσεων του.

Μονάδες 25

Θέμα 2^ο

Σε τρίγωνο ΑΒΓ το σημείο Δ είναι το μέσο της διαμέσου ΑΜ. Αν η ΒΔ τέμνει την πλευρά

ΑΓ στο Ε, να δείξετε ότι $AE = \frac{EG}{2}$.

Μονάδες 25

Θέμα 3^ο

Να αποδείξετε ότι τα ύψη ΑΔ, ΒΕ, ΓΖ ενός τριγώνου ΑΒΓ διχοτομούν τις γωνίες του τριγώνου ΔΕΖ

Μονάδες 25

Θέμα 4^ο

Η διχοτόμος ΑΔ τριγώνου ΑΒΓ τέμνει τον περιγεγραμμένο κύκλο στο Ε. Να αποδείξετε ότι,

$$AB^2 = \frac{AA \cdot AB \cdot AE}{\Delta\Gamma}.$$

Μονάδες 25

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1^ο

a. Να αποδείξετε ότι:

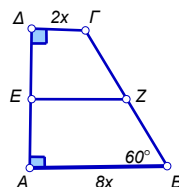
Η διάμεσος τραπέζιου ΑΒΓΔ είναι παράλληλη προς τις βάσεις του και ίση με το ημίαθροισμα τους.

Μονάδες 13

b. Σε τραπέζιο ΑΒΓΔ είναι $\hat{A} = \hat{\Delta} = 90^\circ$ και $\hat{B} = 60^\circ$.

Αν $\Gamma\Delta = 2\chi$ και $B\Gamma = 8\chi$ η διάμεσος του τραπέζιου

είναι: **α.** 3χ **β.** 4χ **γ.** 5χ **δ.** 6χ **ε.** 7χ

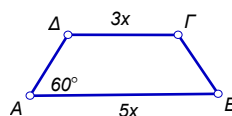


Μονάδες 6

c. Αν σε ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ είναι $AB = 5\chi$,

$\Delta\Gamma = 3\chi$ και $\hat{A} = 60^\circ$, η περίμετρος του τραπέζιου

είναι: **α.** 10χ **β.** 11χ **γ.** 12χ **δ.** 13χ **ε.** 14χ



Μονάδες 6

Θέμα 2^ο

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ ($AB = AG$) και το σημείο Δ μέσο της βάσης του ΒΓ. Από το σημείο Δ φέρνουμε $\Delta E \perp AB$ και $\Delta Z \perp AG$. Να αποδείξετε ότι:

a. $\Delta Z = \Delta E$

Μονάδες 10

b. $AZ = AE$

Μονάδες 10

c. $\widehat{BZ\Delta} = \widehat{\Delta E\Gamma}$

Μονάδες 5

Θέμα 3^ο

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} = 90^\circ$) με $\hat{B} = 30^\circ$ και τα σημεία Δ, Ε μέσα των ΑΒ και ΒΓ αντίστοιχα. Προεκτείνουμε την ΕΔ κατά τμήμα ΔΖ = ΕΔ. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΓΕΖ είναι ρόμβος.

Μονάδες 25

Θέμα 4^ο

Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ ($AB \parallel \Gamma\Delta$) με $AB = 3\Gamma\Delta$. Η διάμεσος ΜΝ του τραπέζιου τέμνει τις διαγώνιες ΑΓ και ΒΔ στα σημεία Κ, Λ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

a. $ΚΛ = \Delta\Gamma$

Μονάδες 10

b. Το τετράπλευρο ΓΔΚΛ είναι ορθογώνιο.

Μονάδες 10

c. $MN = \frac{2}{3} AB$

Μονάδες 5

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1^ο

Να αποδειχθεί ότι:

Κάθε σημείο της διχοτόμου μιας γωνίας ισαπέχει από τις πλευρές της και αντίστροφα κάθε εσωτερικό σημείο της γωνίας που ισαπέχει από τις πλευρές είναι σημείο της διχοτόμου.

Μονάδες 25

Θέμα 2^ο

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με βάση $B\Gamma$. Επάνω στις πλευρές AB , $A\Gamma$ παίρνουμε σημεία Δ και E αντίστοιχα τέτοια ώστε $B\Delta = \Gamma E$. Να αποδειχθεί ότι

a. $\Delta\Gamma = BE$

Μονάδες 12

b. $\Delta M = ME$, όπου M μέσο της βάσης $B\Gamma$

Μονάδες 13

Θέμα 3^ο

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{B} > \hat{\Gamma}$. Αν $A\Delta$ είναι η διχοτόμος της γωνίας \hat{A} και η $BE \perp A\Delta$

(E είναι σημείο της $A\Delta$) τέμνει την $A\Gamma$ στο Z να αποδειχθεί ότι

a. το τρίγωνο ABZ είναι ισοσκελές

Μονάδες 9

b. $\widehat{ABZ} = \widehat{\Gamma BZ} + \hat{\Gamma}$

Μονάδες 8

c. Αν K είναι το μέσο της $B\Gamma$ να αποδειχθεί ότι

i. $EK \parallel A\Gamma$

Μονάδες 4

ii. $EK = \frac{A\Gamma - AB}{2}$

Μονάδες 4

Θέμα 4^ο

Αν τα σημεία E , Z είναι αντίστοιχα τα μέσα των πλευρών $B\Gamma$, $A\Delta$ του παραλληλογράμμου $AB\Gamma\Delta$ και το O είναι σημείο τομής των διαγωνίων αυτού να αποδειχθεί ότι

a. $\Delta E = BZ$

Μονάδες 7

b. $\Gamma K = \frac{2}{3} \Gamma O$ όπου K είναι το σημείο τομής των ΔE , $A\Gamma$

Μονάδες 6

c. $\Gamma K = K\Lambda = \Lambda A$ όπου Λ είναι το σημείο τομής των $A\Gamma$, BZ

Μονάδες 6

d. Οι $A\Gamma$, $B\Delta$, ZE συντρέχουν

Μονάδες 6

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1^ο

- a. Να αποδείξετε ότι το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα μέσα των δύο πλευρών τριγώνου είναι παράλληλο προς την τρίτη πλευρά και ίσο με το μισό της.

Μονάδες 15

- b. Να γράψετε τα κριτήρια για να είναι ένα τετράπλευρο ρόμβος. Μονάδες 10

Θέμα 2^ο

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Φέρνουμε τα ύψη του ΒΔ και ΓΕ. Αν Ζ είναι το μέσο της ΒΓ να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΖΔΕ είναι ισοσκελές.

Μονάδες 25

Θέμα 3^ο

Στις πλευρές ΑΒ και ΑΓ ισοπλεύρου τριγώνου ΑΒΓ παίρνουμε τα σημεία Δ και Ε αντίστοιχα έτσι, ώστε $ΑΔ = ΓΕ$. Αν τα ευθύγραμμα τμήματα ΒΕ και ΓΔ τέμνονται στο σημείο Ο, τότε να αποδείξετε ότι :

- a. Τα τρίγωνα ΑΔΓ και ΓΕΒ είναι ίσα.

Μονάδες 12

- b. $\widehat{ΒΟΓ} = 120^\circ$

Μονάδες 13

Θέμα 4^ο

Θεωρούμε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{Α} = 90^\circ$) με $\hat{Γ} = 30^\circ$. Αν το τμήμα ΑΗ είναι το ύψος προς την υποτείνουσα του τριγώνου και το ευθύγραμμο τμήμα ΓΕ είναι κάθετο στην διάμεσο ΑΜ (και συγκεκριμένα στην προέκτασή της) του τριγώνου ΑΒΓ, να αποδείξετε ότι:

- a. Το τρίγωνο ΕΜΗ είναι ισοσκελές.

Μονάδες 7

- b. Το τρίγωνο ΑΗΕ είναι ισοσκελές.

Μονάδες 9

- c. $ΓΕ = ΑΗ = ΕΗ$

Μονάδες 9

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1^ο

A. Να απαντήσετε στις παρακάτω προτάσεις με **Σωστό (Σ)** ή **Λάθος (Λ)**

- Η εξωτερική γωνία \hat{B}_{ε} τριγώνου ABΓ είναι μικρότερη από τη γωνία Γ.
- Δύο οξείες γωνίες που έχουν τις πλευρές τους παράλληλες είναι μεταξύ τους παραπληρωματικές
- Ένα τετράπλευρο είναι παραλληλόγραμμο αν οι διαδοχικές του γωνίες είναι παραπληρωματικές
- Ένας ρόμβος με μια ορθή γωνία είναι τετράγωνο
- Σε τραπέζιο ABΓΔ με $AB \parallel \Gamma\Delta$ η διάμεσος του είναι $EZ = AB + \Gamma\Delta$

Μονάδες 15

B. Να γράψετε το γράμμα ενός σωστής απάντησης των παρακάτω προτάσεων

a. Το άθροισμα των εξωτερικών γωνιών ενός τριγώνου είναι:

- α. 180° β. 270° γ. 360° δ. 540°

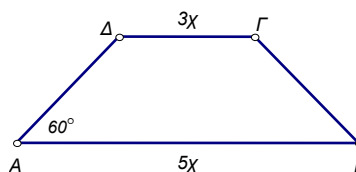
b. Στο ισοσκελές τραπέζιο ABΓΔ

του διπλανού σχήματος είναι:

$AB = 5\chi$, $\Delta\Gamma = 3\chi$ και γωνία A = 60° .

Η περίμετρος του τραπέζιου είναι:

- α. 10χ β. 11χ γ. 12χ δ. 13χ ε. 14χ



Μονάδες 10

Θέμα 2^ο

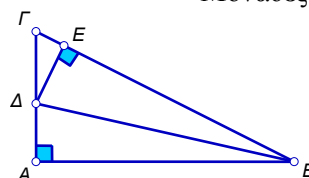
a. Να αποδείξετε ότι: Κάθε σημείο της διχοτόμου μιας γωνίας ισαπέχει από τις πλευρές της και αντίστροφα κάθε εσωτερικό σημείο της γωνίας που ισαπέχει από τις πλευρές είναι σημείο της διχοτόμου.

Μονάδες 20

b. Αν στο ορθογώνιο τρίγωνο ABΓ με $\hat{A} = 90^\circ$ είναι,

ΒΔ διχοτόμος της γωνίας Β και $\Delta E \perp B\Gamma$ δείξτε ότι:

- α. $AD > \Delta E$ β. $AD = \Delta E$ γ. $AD < \Delta E$



Μονάδες 5

Θέμα 3^ο

Δίνεται παραλληλόγραμμο ABΓΔ με κέντρο O και $BD = 2\Delta\Gamma$. Αν E, Z είναι τα μέσα των OB και OD αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο AEFZ είναι ορθογώνιο.

Μονάδες 25

Θέμα 4^ο

Δίνεται τραπέζιο ABΓΔ ($AB \parallel \Gamma\Delta$) με $\Gamma\Delta = \frac{3}{2} AB$. Αν E, Z, H είναι τα μέσα των AB, BΓ και ΔΕ αντίστοιχα και η προέκταση της AH τέμνει τη ΓΔ στο Θ, να αποδείξετε ότι:

a. Το ABZH είναι παραλληλόγραμμο.

Μονάδες 15

b. Ισχύει $\Theta\Delta = \Delta\Gamma - AB$.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1^ο

A. Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου είναι 2 ορθές .

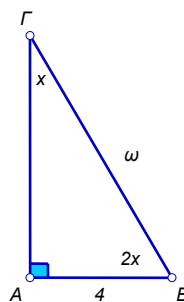
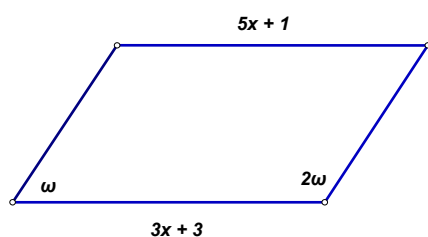
Μονάδες 15

B. Να γράψετε τα κριτήρια για να είναι ένα τετράπλευρο παραλληλόγραμμο .

Μονάδες 10

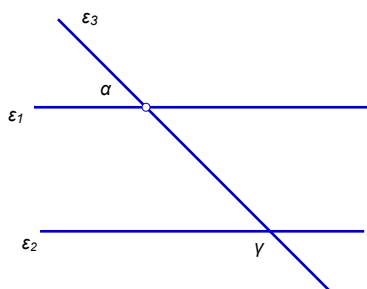
Θέμα 2^ο

A. Να βρεθούν τα χ και ω των σχημάτων



Μονάδες 18

B. Αν $\varepsilon_1 // \varepsilon_2$, $\alpha = \chi$ και $\gamma = 3\chi$, να βρεθούν οι γωνίες α και γ .



Μονάδες 7

Θέμα 3^ο

Σε ένα τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$, M είναι το μέσο της πλευράς $B\Gamma$. Αν η ευθεία AM τέμνει την ευθεία $\Gamma\Delta$ στο σημείο K , να αποδείξετε ότι :

a. $AB = \Gamma K$

Μονάδες 15

b. Η γωνία KBA είναι ίση με 135° .

Μονάδες 10

Θέμα 4^ο

Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ προεκτείνουμε το ύψος $A\Delta$ και την διάμεσο AM κατά τμήματα $\Delta E = A\Delta$ και $MN = AM$. Να αποδείξετε ότι :

a. $\Delta M // EN$

Μονάδες 7

b. Το τρίγωνο AEN είναι ορθογώνιο.

Μονάδες 5

c. Το $ABN\Gamma$ είναι παραλληλόγραμμο.

Μονάδες 5

d. Το $BEN\Gamma$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

Μονάδες 8

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1^ο

A. Να αποδείξετε ότι η διάμεσος ορθογωνίου τριγώνου που φέρουμε από την κορυφή της ορθής γωνίας είναι ίση με το μισό της υποτείνουσας.

Μονάδες 13

B. Να σημειώσετε αν είναι *σωστή (Σ)* ή *λάθος (Λ)* καθεμιά από τις παρακάτω προτάσεις:

- Η διάμεσος του τραπέζιου είναι ίση με την ημιδιαφορά των βάσεων του
- Δυο τρίγωνα που έχουν τρεις γωνίες ίσες είναι ίσα.
- Οι διαγώνιοι του ρόμβου είναι κάθετες μεταξύ τους
- Το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα μέσα δυο πλευρών τριγώνου είναι παράλληλο προς την τρίτη πλευρά και ίσο με το μισό της.

Μονάδες 12

Θέμα 2^ο

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ABΓ (AB = AΓ). Στην προέκταση της BΓ προς το μέρος του B παίρνουμε σημείο Δ και στην προέκταση της BΓ προς το μέρος του Γ παίρνουμε σημείο E, έτσι ώστε BΔ = ΓE.

a. Να δείξετε ότι AΔ = AE

Μονάδες 13

b. Αν φέρουμε BK ⊥ AΔ και ΓΛ ⊥ AE να δείξετε ότι BK = ΓΛ

Μονάδες 12

Θέμα 3^ο

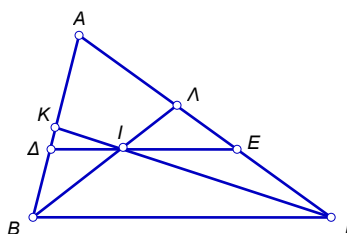
Δίνεται τρίγωνο ABΓ. Οι διχοτόμοι των γωνιών \hat{B} και $\hat{\Gamma}$ τέμνονται στο σημείο I. Από το I φέρουμε ευθεία παράλληλη στη BΓ που τέμνει την AB στο σημείο Δ και την AΓ στο σημείο E. Να δείξετε ότι:

a. BΔ = ΔI

Μονάδες 10

b. ΔE = BΔ + EΓ

Μονάδες 15



Θέμα 4^ο

Δίνεται τραπέζιο ABΓΔ με AB // ΓΔ, ΔΓ = 2AB

και $\hat{A} = \hat{\Delta} = 90^\circ$. Αν το σημείο είναι M μέσο της AΓ και η BM τέμνει την ΔΓ στο K, να δείξετε ότι:

a. KΓ = AB

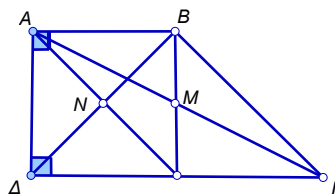
Μονάδες 9

b. Η BK είναι κάθετη στην ΔΓ

Μονάδες 8

c. Αν το N είναι σημείο τομής των AK και BΔ, $MN = \frac{\Delta\Gamma}{4}$

Μονάδες 8



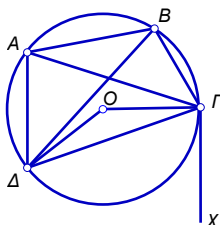
ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1^ο

Δίνεται τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ εγγεγραμμένο σε κύκλο (O, R) , και η $\Gamma\chi$ εφαπτόμενη του κύκλου στο σημείο Γ .

Να χαρακτηρισθούν με **Σωστό / Λάθος** οι επόμενες σχέσεις γωνιών.

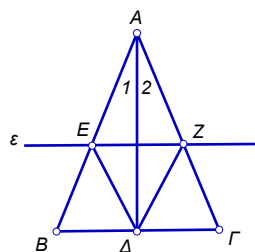
- $\Delta A\Gamma = \Delta B\Gamma$,
- $\Delta \Gamma\chi = \Delta A\Gamma$,
- $\Delta B\Gamma = \Delta \Delta\Gamma$,
- $\Delta O\Gamma = \Delta A\Gamma$,
- $\angle B A \Delta + \angle B \Gamma \Delta = 180^\circ$



Μονάδες 25

Θέμα 2^ο

Σε ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) φέρνουμε την διχοτόμο $A\Delta$ και μια ευθεία ε παράλληλη προς την $B\Gamma$, που τέμνει τις πλευρές AB και $A\Gamma$ στα σημεία E και Z αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $A\epsilon\Delta$ και $AZ\Delta$ είναι ίσα.

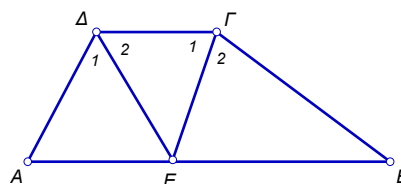


Μονάδες 25

Θέμα 3^ο

Σε τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ με βάσεις AB και $\Gamma\Delta$ ισχύει $AB = A\Delta + B\Gamma$. Αν η ΔE είναι διχοτόμος της γωνίας Δ , να αποδείξετε ότι είναι:

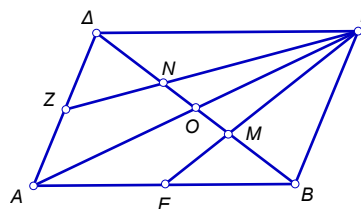
- $AE = A\Delta$
- Η ΓE διχοτόμος της γωνίας Γ .



Μονάδες 25

Θέμα 4^ο

Έστω E και Z τα μέσα αντίστοιχα των πλευρών AB και $A\Delta$ παραλληλόγραμμου $AB\Gamma\Delta$, με διαγώνιες $A\Gamma$ και $B\Delta$, και κέντρο O . Αν τα M και N στα σημεία τομής αντίστοιχα των ΓE και ΓZ με την $B\Delta$, να αποδειχθεί ότι $BM = MN = N\Delta$.



Μονάδες 25

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1^ο

- Α. Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου είναι 2 ορθές . Μονάδες 9
 Β. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις ως **σωστές (Σ)** ή **λάθος (Λ)** :
 1) Η διάκεντρος δύο τεμνόμενων κύκλων είναι μεσοκάθετος της κοινής χορδής τους .
 2) Σε κάθε τραπέζιο οι προσκείμενες στη βάση γωνίες είναι ίσες .
 3) Αν δύο παράλληλες ευθείες τέμνονται από μία τρίτη ευθεία τότε σχηματίζουν τις εντός και επί τα αυτά μέρη γωνίες ίσες
 4) Κάθε παραλληλόγραμμο έχει τις διαγώνιες του ίσες .
 5) Το άθροισμα των γωνιών ενός τετραπλεύρου είναι 2 ορθές . Μονάδες $5 \times 2 = 10$
 Γ. Να αντιστοιχήσετε κάθε ιδιότητα της στήλης Α με τετράπλευρο της στήλης Β

Στήλη Α	Στήλη Β
α. Δύο πλευρές και οι διαγώνιες ίσες παράλληλες	1. Ρόμβος
β. Ορθογώνιο με διαγώνιους κάθετες	2. Τετράγωνο
γ. Παραλληλόγραμμο με μία ορθή γωνία	3. Ορθογώνιο
	4. Ισοσκελές τραπέζιο

Θέμα 2^ο

Μονάδες $3 \times 2 = 6$

Σε κάθε ένα από τα σχήματα του πίνακα Α να αντιστοιχήσετε τη γωνία χ του πίνακα Β .

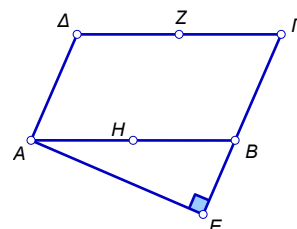
ΠΙΝΑΚΑΣ Α					
1. $\hat{B}_{\varepsilon\xi} + \hat{\Gamma}_{\varepsilon\xi} = 238^\circ$ 		2. $\hat{EAB} = 30^\circ$ και ΑΕ διχοτόμος της γωνίας Α 			
3. $\varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2$ 		4. Η Αψ είναι εφαπτόμενη και $\hat{BA}\psi = 30^\circ$ 		5. $\Delta E \parallel B\Gamma$ 	
ΠΙΝΑΚΑΣ Β					
Α. $\chi = 50$	Β. $\chi = 58$	Γ. $\chi = 38$	Δ. $\chi = 30$	Ε. $\chi = 120$	Ζ. $\chi = 125$
ΣΤ. $\chi = 40$					

Θέμα 3^ο

Μονάδες $5 \times 5 = 25$

Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με $AB = 2B\Gamma$ και $\hat{B} > 90^\circ$.
 Φέρουμε την ΑΕ κάθετη στη ΒΓ και έστω Ζ , Η τα μέσα των ΔΓ και ΑΒ αντίστοιχα .Να αποδείξετε ότι :

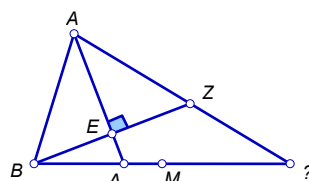
- ι) Το ΗΒΓΖ είναι ρόμβος Μονάδες 8
 ιι) $HZ = HE = HB$ Μονάδες 8
 ιιι) Το ΕΖ είναι διχοτόμος της $\hat{HE}\Gamma$ Μονάδες 9



Θέμα 4^ο

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $AB < A\Gamma$, η διχοτόμος ΑΔ και Μ το μέσο της ΒΓ . Από την κορυφή Β φέρουμε κάθετη προς την ΑΔ . Η κάθετη αυτή τέμνει την ΑΓ στο Ζ . Να αποδείξετε ότι :

- ι) Το Ε είναι το μέσο της ΒΖ . Μονάδες 5
 ιι) $EM \parallel A\Gamma$ Μονάδες 6
 ιιι) $EM = \frac{A\Gamma - AB}{2}$ Μονάδες 7
 ιιι) $\hat{\Delta EM} = \frac{\hat{A}}{2}$ Μονάδες 7



ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1^ο

A. Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου είναι ίσο με 180° .

Μονάδες 13

B. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις ως **Σωστό** ή **Λάθος**, γράφοντας στο φύλλο απαντήσεων τον αριθμό της πρότασης και δίπλα την λέξη **Σωστό** ή **Λάθος**.

- Βαρύκεντρο τριγώνου ονομάζεται το σημείο τομής των διχοτόμων του.
- Η εξωτερική γωνία ενός τριγώνου είναι ίση με το άθροισμα των απέναντι εσωτερικών γωνιών του.
- Η διάμεσος τραπέζιου είναι ίση με την ημιδιαφορά των βάσεων του.
- Κάθε παραλληλόγραμμο που έχει τις πλευρές του ίσες είναι τετράγωνο.

Μονάδες: $4 \times 3 = 12$

Θέμα 2^ο

Σε ισοσκελές τρίγωνο ABΓ ($AB = AG$), προεκτείνουμε το ύψος του ΒΔ κατά $\Delta E = BD$.

- a. Να δείξετε ότι $AB = A\Delta$.

Μονάδες 15

- b. Να αιτιολογήσετε γιατί το τρίγωνο ΑΓΔ είναι ισοσκελές.

Μονάδες 10

Θέμα 3^ο

Αν ABΓΔ είναι ορθογώνιο και E, Z, H και Θ τα μέσα των πλευρών του, να δείξετε ότι το τετράπλευρο EZHΘ είναι:

- a. Παραλληλόγραμμο.

Μονάδες 15

- b. Ρόμβος.

Μονάδες 10

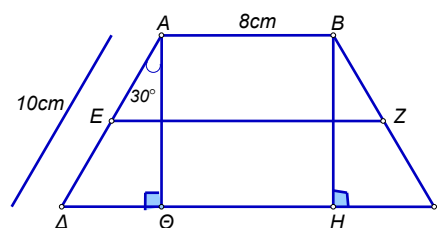
Θέμα 4^ο

Σε ισοσκελές τραπέζιο ABΓΔ ($AB \parallel \Gamma\Delta$)

Φέρνουμε τα ύψη του ΑΘ και ΒΗ. Αν

$AB = 8\text{cm}$, $A\Delta = 10\text{cm}$ και $\Delta A\Theta = 30^\circ$:

- Να βρείτε το μήκος του $\Delta\Theta$.
- Να δείξετε ότι $\Delta\Theta = H\Gamma$.
- Να υπολογίσετε το μήκος της διαμέσου ΕΖ.



Μονάδες $9 + 9 + 7$