Θέματα εξετάσεων περιόδου Μαΐου - Ιουνίου στην Άλγεβρα Τάξη - Β΄ Λυκείου

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1ο

Α. Να αποδείξετε ότι $εφ(α+β)=\dfrac{εφα+εφβ}{1-εφα\cdot εφβ}$ όταν $α, β, α+β \neq κπ+\dfrac{π}{2}, κ\in Z$.

Μονάδες 13

Β. α. Να γράψετε τον ορισμό της γεωμετρικής προόδου .

β. Να συμπληρώσετε τα κενά:

i. Αν τρεις αριθμοί α, β, γ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου τότε …….

ii. Το υπόλοιπο της διαίρεσης ενός πολυωνύμου P(x) με το x–ρ είναι …………...

iii. Αν $x, y > 0$ τότε $\log(xy) =$………….. Μονάδες 12

Θέμα 2ο

Να αποδείξετε ότι $\dfrac{1-συν2α+ημ2α}{ημα+συνα}=2ημα$. Μονάδες 25

Θέμα 3ο

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=2x^3+x^2-αx+2$, με $α\in R$.

α. Να βρείτε την τιμή του α ώστε το πολυώνυμο να έχει παράγοντα το $x-1$.

Μονάδες 10

β. Για την τιμή του α που βρήκατε να λύσετε την εξίσωση $P(x)=0$.

Μονάδες 15

Θέμα 4ο

Σε αριθμητική πρόοδο $(α_ν)$ ο πρώτος όρος είναι ίσος με log5 και ο δεύτερος όρος είναι ίσος με log25 . Να βρείτε :

α. Την διαφορά ω της αριθμητικής προόδου . Μονάδες 8

β. Τον δέκατο όρο της αριθμητικής προόδου . Μονάδες 8

γ. Το άθροισμα $α_{21}+α_{22}+\ldots+α_{40}$. Μονάδες 9

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1^o

Α. Να αποδειχθεί ότι: Το υπόλοιπο της διαίρεσης ενός πολυωνύμου

$P(\chi)$ με το $\chi-\rho$ είναι ίσο με την τιμή του πολυωνύμου για $\chi=\rho$.

Δηλαδή έχουμε ότι: $\upsilon = P(\rho)$. Μονάδες 13

Β. α. Να γραφεί η ταυτότητα της διαίρεσης δύο πολυωνύμων $\Delta(\chi)$ και $\delta(\chi)$.

β. Τι βαθμό έχουν τα πολυώνυμα: $P(\chi) = 6$ και $P(\chi) = 0$.

γ. Τι ονομάζουμε ρίζα ενός πολυωνύμου. Μονάδες 12

Θέμα 2^o

Να δειχθεί ότι: $\dfrac{2\eta\mu(\alpha+\beta)}{\sigma\upsilon\nu(\alpha+\beta)+\sigma\upsilon\nu(\alpha-\beta)} = \varepsilon\varphi\alpha + \varepsilon\varphi\beta$. Μονάδες 25

Θέμα 3^o

Δίνεται το πολυώνυμο: $P(\chi) = \chi^3 + \chi^2 + (\alpha-2)\chi + \beta + 5$.

α. Να βρείτε τα α και β, ώστε το πολυώνυμο $P(\chi)$ να έχει παράγοντα

το $\chi-1$,και διαιρούμενο με το $\chi+2$ να αφήνει υπόλοιπο 6.

Μονάδες 12

β. Αν $\alpha=-2$ και $\beta=-3$ να λύσετε την ανίσωση: $P(\chi)<0$. Μονάδες 13

Θέμα 4^o

Α. Να λυθεί η εξίσωση: $2\log(2x-4) - \log(9-x) = 1 + \log 0{,}9$ (I)

Δίνεται $\sqrt{1089}=33$ Μονάδες 12

Β. Έστω η γεωμετρική πρόοδος (α_ν) με $\alpha_1=\chi$, $\lambda=2$ και $\alpha_\nu=320$ όπου χ η λύση της εξίσωσης (I).

Να βρείτε:

α. Το **ν**.

β. Το $\mathbf{S_\nu}$ της προόδου. Μονάδες 13

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1ο

Α. Να γράψετε τους ορισμούς:

α. Της αριθμητική προόδου Μονάδες 5

β. Της γεωμετρικής προόδου. Μονάδες 5

Β. Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των πρώτων ν όρων μιας γεωμετρικής προόδου (αν) με λόγο $\lambda \neq 1$ είναι $S_\nu = \alpha_1 \cdot \frac{\lambda^\nu - 1}{\lambda - 1}$ Μονάδες 15

Θέμα 2ο

Α. Να δειχθεί ότι: $\frac{\eta\mu 2\alpha + \eta\mu\alpha}{1 + \sigma\upsilon\nu 2\alpha + \sigma\upsilon\nu\alpha} = \varepsilon\varphi\alpha$ Μονάδες 10

Β. Να λυθεί η εξίσωση: $2 - \sigma\upsilon\nu^2\chi = 4\eta\mu^2\frac{\chi}{2}$ Μονάδες 15

Θέμα 3ο

Α. Αν το πολυώνυμο $P(\chi) = \chi^3 + \alpha\chi^2 + \beta\chi + 4$ διαιρείται ακριβώς με το $\chi - 2$ και

$P(1) = 8$, να βρεθούν τα $\alpha, \beta \in R$. Μονάδες 12

Β. Να λυθεί η εξίσωση: $\chi^4 + \chi^3 - 3\chi^2 - 4\chi - 4 = 0$ Μονάδες 13

Θέμα 4ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(\chi) = \frac{\chi + |2\chi - 1| + 2}{\log(2\chi - 1) - 1}$

Α. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού τη5 συνάρτησης $f(\chi)$. Μονάδες 10

Β. Να λυθεί η ανίσωση: $f(\chi) < 0$ Μονάδες 15

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1^{o}

Α. να αποδείξετε ότι το άθροισμα των πρώτων ν όρων μιας γεωμετρικής προόδου (α_ν) με λόγο $\lambda \neq 1$ είναι: $S_\nu = \alpha_1 \cdot \dfrac{\lambda^\nu - 1}{\lambda - 1}$ Μονάδες 14

Β.

a. Να γράψετε τον ορισμό της γεωμετρικής προόδου. Μονάδες 5

b. Να συμπληρωθούν οι προτάσεις:

- συν(α – β) = ...
- ημ(α + β) = ...
- $\log_\alpha\theta_1 - \log_\alpha\theta_2 =$ ....

Θέμα 2^{o}

Α. Να αποδείξετε ότι: $\dfrac{1-\text{συν}2\alpha+\text{ημ}2\alpha}{1+\text{συν}2\alpha+\text{ημ}2\alpha} = \text{εφ}\alpha$ Μονάδες 10

Β. Να λυθεί η εξίσωση: $\text{συν}2\chi + 6\text{ημ}^2\dfrac{\chi}{2} = 4$ Μονάδες 15

Θέμα 3^{o}

Για ποιες τιμές του $\chi \in R$ οι αριθμοί $\log 49$, $\log\sqrt{9\left(3^x+5\cdot 2^x\right)}$, $x\log 2$ με τη σειρά που δίνονται είναι διαδοχικοί όροι Αριθμητικής προόδου; Μονάδες 25

Θέμα 4^{o}

Δίνεται το πολυώνυμο $P(\chi) = \chi^4 - (\alpha-3)\chi^3 + \beta\chi^2 - \chi - 2$

a. Αν το $\chi + 1$ είναι παράγοντας του $P(\chi)$, και ή αριθμητική τιμή του $P(\chi)$ για $\chi = 1$ είναι ίση με -4, να βρείτε τα α και β. Μονάδες 10

b. Να βρείτε την λύση της εξίσωσης $P(\chi) = 0$ αν $\alpha = 4$ και $\beta = -1$ Μονάδες 10

c. Να γράψετε το $P(\chi)$ ως γινόμενο παραγόντων. Μονάδες 5

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1ο

Α. Δείξτε ότι αν $\alpha > 0$ με $\alpha \neq 1$ τότε για οποιουσδήποτε θ_1, $\theta_2 > 0$ ισχύει

$\log_\alpha(\theta_1 \cdot \theta_2) = \log_\alpha(\theta_1) + \log_\alpha(\theta_2)$ Μονάδες 15

Β. Να συμπληρωθούν οι ισότητες:

συν2α = ... =...........................= ....

συν(α−β) =....................................

εφ2α = ... Μονάδες $5 \times 2 = 10$

Θέμα 2ο

Να βρεθούν σι τιμές του α για τις οποίες το $\chi - 1$ είναι παράγοντας του

$G(x) = \alpha^2x^4 + 3\alpha x^2 - 4$ Μονάδες 25

Θέμα 3ο

Σε αριθμητική πρόοδο ο πρώτος όρος είναι ίσος με 2 ο τελευταίος $\alpha_\nu = 98$ και το άθροισμα όλων των όρων 1650. Να βρείτε:

Α. Το πλήθος των όρων αυτής Μονάδες 8

Β. Τι διαφορά της προόδου Μονάδες 7

Γ. Το άθροισμα $S = \alpha_7 + \alpha_8 + \alpha_9 + ...\alpha_{101}$ Μονάδες 10

Θέμα 4ο

Δίνεται ή συνάρτηση $f(x) = \ln(3e^{2x} - e^x - 2)$.

Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της Μονάδες 12

Να λυθεί η εξίσωση $f(x) = 3x$, όπου $f(x)$ η παραπάνω συνάρτηση.

Μονάδες 13

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1ο

Α. Αν συνα $\neq 0$, συνβ $\neq 0$ και συν(α + β) $\neq 0$ να αποδείξετε ότι: $εφ(α+β) = \dfrac{εφα + εφβ}{1 - εφα \cdot εφβ}$

Μονάδες 13

Β. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο φύλλο απαντήσεων τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

a. Αν $0 < α \neq 1$ και $θ_1, θ_2 > 0$, τότε ισχύει : $\log_α(θ_1 \cdot θ_2) = \log_α θ_1 + \log_α θ_2$.

b. Το άθροισμα των πρώτων ν όρων μιας γεωμετρικής προόδου $(α_ν)$ με λόγο $λ \neq 1$ δίνεται από τον τύπο: $S_ν = α_1 \cdot \dfrac{λ^ν - 1}{λ - 1}$.

c. Αν $0 < α < 1$, η συνάρτηση $f(x) = α^x$ είναι γνησίως αύξουσα.

d. Για κάθε $α \in R$ ισχύει $συν^2 α = \dfrac{1 - συν2α}{2}$. Μονάδες 12

Θέμα 2ο

Σε μία αριθμητική πρόοδο $(α_ν)$ είναι $α_{21} = 55$ και $S_{12} = 138$.

a. Να αποδείξετε ότι ο πρώτος όρος της προόδου είναι $α_1 = -5$ και η διαφορά της προόδου είναι $ω = 3$. Μονάδες 7

b. Να υπολογίσετε το άθροισμα S_{10} των δέκα πρώτων όρων της προόδου Μονάδες 9

c. Να βρείτε τον όρο της προόδου που είναι ίσος με 6007. Μονάδες 9

Θέμα 3ο

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 + αx^2 + βx + 6$, $α, β \in R$.

Να βρείτε τις τιμές των α και β ώστε το πολυώνυμο P(x) να έχει παράγοντα το $χ + 1$ και η αριθμητική τιμή του για $χ = 2$ να είναι ίση με 12. Μονάδες 10

Έστω $α = -2 =$ και $β = 3$.

a. Να γράψετε την ταυτότητα της Ευκλείδειας διαίρεσης $P(x) : (χ - 2)$ Μονάδες 7

b. Να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 12$. Μονάδες 8

Θέμα 4ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln\left(\dfrac{7 - x}{7 + x}\right)$.

a. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης. Μονάδες 5

b. Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 0$. Μονάδες 5

c. Να δείξετε ότι: $f(-x) + f(x) = 0$. Μονάδες 8

d. Να συγκρίνετε τους αριθμούς $f(0)$ και $f\left(\dfrac{1}{5}\right)$. Μονάδες 7

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1^o

Α. Να αποδείξετε ότι το άθροισμα $S_ν$ των ν πρώτων όρων μιας γεωμετρικής προόδου $(α_ν)$

που έχει πρώτο όρο $α_1$ και λόγο $λ \neq 1$ είναι $S_ν = α_1 \cdot \dfrac{λ^ν - 1}{λ - 1}$. Μονάδες 10

Β.

a. Πότε μια ακολουθία λέγεται αριθμητική πρόοδος Μονάδες 5

b. Να χαρακτηρίσετε ως ***Σωστό (Σ)*** ή ***Λάθος (Λ)*** τις επόμενες προτάσεις.

- Αν σε μια αριθμητική πρόοδο είναι $α_4 = 20$ και $α_7 = 32$ τότε η διαφορά της είναι $ω = 1$.
- Σε κάθε αριθμητική πρόοδο $(α_ν)$ με διαφορά ω ισχύει ότι $α_ν = α_1 + (ν + 1)\cdot ω$.
- Οι αριθμοί α, β, γ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου αν και μόνο αν $2β = α + γ$.
- Αν οι αριθμοί $5χ + 1$, $3χ - 2$ και 11 είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου, τότε $χ = 15$
- Στη γεωμετρική πρόοδο $(α_ν)$ είναι $α_{ν+1} = α_ν \cdot λ$ Μονάδες 10

Θέμα 2^o

Να λυθεί η εξίσωση: $2ημ^2χ + 5συνχ + 1 = 0$ Μονάδες 25

Θέμα 3^o

Το πολυώνυμο $P(χ) = χ^3 - (α + β)χ^2 + (α + 2β - 6)χ + 3α + 2β - 1$ έχει παράγοντα το $χ - 1$

ενώ διαιρούμενο με το $χ + 1$ αφήνει υπόλοιπο 8.

a. Να βρεθούν οι τιμές των α και β Μονάδες 10

b. Να γίνει το $P(χ)$ γινόμενο. Μονάδες 10

c. Να λυθεί η ανίσωση $P(χ) > 0$. Μονάδες 5

Θέμα 4^o

Δίνεται η συνάρτηση $f(χ) = \ln\dfrac{2 - χ}{2 + χ}$:

a. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της f Μονάδες 5

b. Να βρείτε τα κοινά σημεία της C_f (γραφικής παράστασης της f) με τον άξονα χ΄χ.
Μονάδες 10

c. Να βρεθούν τα διανύσματα στα οποία η C_f είναι πάνω από τον άξονα χ΄χ.
Μονάδες 10

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1ο

Α. Να αποδειχθεί ότι το άθροισμα των ν πρώτων όρων μιας γεωμετρικής προόδου (α_ν) με λόγο $\lambda_1 \neq 1$ είναι $S_\nu = \alpha_1 \cdot \dfrac{\lambda^\nu - 1}{\lambda - 1}$ Μονάδες 13

Β. Να σημειώσετε το ***(Σ)*** ή το ***(Λ)*** αν νομίζετε ότι οι παρακάτω προτάσεις είναι σωστές ή λάθος αντίστοιχα

a. Για οποιεσδήποτε γωνίες α, β ισχύει $\sigma\upsilon\nu(\alpha - \beta) = \sigma\upsilon\nu\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu\beta - \eta\mu\alpha \cdot \eta\mu\beta$ Μονάδες 3

b. Αν $\chi - \rho$ είναι παράγοντας του πολυωνύμου $P(\chi)$, τότε το $-\rho$ είναι ρίζα του $P(\chi)$

Μονάδες 3

c. Αν S_ν είναι το άθροισμα των ν πρώτων όρων μιας αριθμητικής προόδου με πρώτο όρο α_1 και διαφορά ω τότε ισχύει $S_\nu = \dfrac{\nu}{2} \cdot \left[2\alpha_1 + (\nu - 1) \cdot \omega\right]$ Μονάδες 3

d. Αν $\chi > 0$, $\psi > 0$ τότε ισχύει $\ln(x \cdot \psi) = \ln x + \ln \psi$ Μονάδες 3

Θέμα 2ο

Α. Να αποδειχθεί ότι $\varepsilon\varphi\alpha + \varepsilon\varphi\beta = \dfrac{\eta\mu(\alpha + \beta)}{\sigma\upsilon\nu\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu\beta}$ Μονάδες 12

Β. Να λυθεί η εξίσωση $\sigma\upsilon\nu 2\chi + 4\sigma\upsilon\nu\chi + 1 = 0$, $\chi \in R$ Μονάδες 13

Θέμα 3ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln\left(\dfrac{e^{2x} - 1}{e^x + 5}\right)$ όπου $\chi > 0$. Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 2\ln 2$

Μονάδες 25

Θέμα 4ο

Δίνεται το πολυώνυμο $P(\chi) = \alpha\chi^3 + (\beta - 1)\chi^2 - 3\chi - 2\beta + 6$, όπου α, β είναι πραγματικοί αριθμοί.

Α. Αν ο αριθμός 1 είναι ρίζα του $P(\chi)$ και το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(\chi)$ με το $\chi + 1$ είναι ίσο με 2. τότε να δείξετε ότι $\alpha = 2$ και $\beta = 4$

Μονάδες 12

Β. Για τις τιμές α και β του ερωτήματος Α να λύσετε την ανίσωση $P(\chi) > 0$

Μονάδες 13

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1ο

Α. Έστω η πολυωνυμική εξίσωση $α_νχ^ν + α_{ν-1}χ^{ν-1}+\ldots\ldots+α_1χ + α_0 = 0$, με ακέραιους συντελεστές.

Αν ο ακέραιος $ρ \neq 0$ είναι ρίζα της εξίσωσης , τότε ο ρ είναι διαιρέτης του σταθερού όρου $α_0$.

Μονάδες 10

Β. Πότε μια ακολουθία λέγεται

a. αριθμητική πρόοδος

b. γεωμετρική πρόοδος Μονάδες 9

Γ. Αν για τη γωνία Α τριγώνου ΑΒΓ ισχύει $1 - 2ημ^2\frac{A}{2} = 0$ τότε είναι

Α. $A = 30°$ Β. $A = 60°$ Γ. $A = 45°$ Δ. $A = 90°$ Ε. $A > 90°$

Μονάδες 6

Θέμα 2ο

a. Να λυθεί η εξίσωση: $συν2χ + 4συνχ + 1= 0$ Μονάδες 12,5

b. Να αποδείξετε ότι: $\dfrac{1 + ημ2χ - συν2χ}{1 + ημ2χ + συν2χ} = εφχ$ Μονάδες 12,5

Θέμα 3ο

Αν σε γεωμετρική πρόοδο ο τρίτος όρος είναι 12 και ο όγδοος 384 να βρείτε:

a. Τον πρώτο όρο $α_1$ και τον λόγο λ της γεωμετρικής προόδου

Μονάδες 10

b. Το άθροισμα των πρώτων δέκα όρων της προόδου Μονάδες 5

c. Για τις τιμές των $α_1$ και λ που βρήκατε παραπάνω, να λυθεί η εξίσωση:

$(λ-1)χ^3 - (3 + α_1)χ^2 + 11χ - 6 = 0$ Μονάδες 10

Θέμα 4ο

a. Αν το πολυώνυμο $P(χ) = χ^3 + α_1χ^2 - α_2χ + 6$ έχει παράγοντα το $χ - 1$ και το υπόλοιπο της διαίρεσής του με το $χ +1$ είναι 8, να βρείτε τους αριθμούς $α_1$ και $α_2$.

Μονάδες 10

b. Να δείξετε ότι η ακολουθία $β_ν = -α_1ν + α_2$ είναι αριθμητική πρόοδος.

Μονάδες 5

c. Να βρείτε το άθροισμα: $β_5 + β_7 + β_9 +\ldots\ldots+ β_{101}$. Μονάδες 10

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1ο

A. Αν α>0 και $\alpha \neq 1$, τότε για οποιουσδήποτε θ_1, $\theta_2 > 0$ να δείξετε ότι ισχύει:

$\log_\alpha(\theta_1 \cdot \theta_2) = \log_\alpha \theta_1 + \log_\alpha \theta_2$ Μονάδες 5

B. Στον διπλανό πίνακα, κάθε τριγωνομετρικός αριθμός της **Στήλης Ι**είναι ίσος με μια μόνο παράσταση της **Στήλης ΙΙ**. Να γράψετε στη κόλλα σας τα γράμματα της **Στήλης Ι** και δίπλα σε κάθε γράμμα τον αριθμό της **Στήλης ΙΙ** που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

ΣΤΗΛΗ Ι	**ΣΤΗΛΗ ΙΙ**
	1. $\sigma\upsilon\nu^2\alpha - \eta\mu^2\alpha$
Α. $\varepsilon\varphi(\alpha+\beta)$	2. $2\eta\mu^2\alpha - 1$
Β. $\sigma\upsilon\nu 2\alpha$	3. $\sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta + \eta\mu\alpha\eta\mu\beta$
Γ. $\sigma\upsilon\nu(\alpha-\beta)$	4. $2\sigma\upsilon\nu\alpha$
Δ. $\eta\mu(\alpha+\beta)$	5. $\dfrac{\varepsilon\varphi\alpha + \varepsilon\varphi\beta}{1 - \varepsilon\varphi\alpha\varepsilon\varphi\beta}$
	6. $\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta + \sigma\upsilon\nu\alpha\eta\mu\beta$

Μονάδες 8

Γ. Κάθε μια από τις επόμενες προτάσεις **Γ1., Γ2.** και **Γ3**, να τις χαρακτηρίσετε ***(Σ)***, αν αυτή είναι ***Σωστή*** ή ***(Λ)*** αν αυτή είναι ***Λάθος.***

Γ_1. Ο $\nu^{o\varsigma}$ όρος μιας αριθμητικής προόδου με πρώτο όρο α_1 και διαφορά ω, είναι :

$\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu - 1)\omega$ Μονάδες 4

Γ_2. Οι τρεις αριθμοί α, β και γ είναι με τη σειρά που αναγράφονται διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου αν και μόνο αν ισχύει, $2\beta = \alpha - \gamma$ Μονάδες 4

Γ_3. Για το άθροισμα των ν πρώτων όρων αριθμητικής προόδου (α_ν) με διαφορά ω ισχύουν ο τύπος: $S_\nu = \dfrac{\nu}{2}(\alpha_1 + \alpha_\nu)$ Μονάδες 4

Θέμα 2ο

a. Για κάθε πραγματικό αριθμό x να αποδείξετε ότι:

$\sigma\upsilon\nu^4 x - \eta\mu^4 x = \sigma\upsilon\nu 2x$ Μονάδες 10

b. Να βρείτε εκείνους τους πραγματικούς αριθμούς x για τους οποίους:

$\sigma\upsilon\nu^4 x - \eta\mu^4 x = -1$ Μονάδες 15

Θέμα 3ο

Δίνεται το πολυώνυμο P(x) = $x^3 - 2x^2 - 11x + 12$

a. Να βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης του P(x) με το x−2. Μονάδες 8

b. Να βρείτε το πηλίκο της διαίρεσης του P(x) με το x−1. Μονάδες 8

c. Να λύσετε την εξίσωση: P(x) = 0 Μονάδες 9

Θέμα 4ο

Οι αριθμοί $\boldsymbol{\alpha_1} = x + 2$, $\boldsymbol{\alpha_2} = 6x - 2$ και $\boldsymbol{\alpha_3} = 5x + 6$ είναι οι τρεις πρώτοι όροι μιας αριθμητικής προόδου.

a. Να αποδείξετε ότι x = 2. Μονάδες 5

b. Να βρείτε τη διαφορά **ω** της προόδου. Μονάδες 5

c. Να υπολογίσετε τον δέκατο όρο $\boldsymbol{\alpha_{10}}$ της προόδου. Μονάδες 7

d. Να υπολογίσετε το άθροισμα $\mathbf{S_{10}}$ των δέκα πρώτων όρων της προόδου.

Μονάδες 8

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1ο

Α. Αν $\alpha > 0$ με $\alpha \neq 1$, τότε για οποιουσδήποτε αριθμούς $\theta_1, \theta_2 > 0$ να αποδείξετε ότι ισχύει : $\log_\alpha(\theta_1 \cdot \theta_2) = \log_\alpha \theta_1 + \log_\alpha \theta_2$. Μονάδες 9

Β. Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα της **Στήλης Α** και δίπλα σε κάθε γράμμα τον αριθμό της **Στήλης Β**, που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

Στήλη Α	Στήλη Β
α. $\eta\mu(\alpha - \beta)$	1. $\sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta - \eta\mu\alpha\eta\mu\beta$
β. $\sigma\upsilon\nu(\alpha+\beta)$	2. $2\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\alpha$
γ. $\eta\mu 2\alpha$	3. $\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta - \sigma\upsilon\nu\alpha\eta\mu\beta$
δ. $\varepsilon\varphi 2\alpha$	4. $\dfrac{1-\sigma\upsilon\nu 2\alpha}{1+\sigma\upsilon\nu 2\alpha}$
	5. $\sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta + \eta\mu\alpha\eta\mu\beta$
	6. $\dfrac{2\varepsilon\varphi\alpha}{1-\varepsilon\varphi^2\alpha}$

Μονάδες 8

Γ. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιο σας τη λέξη ***Σωστό*** ή ***Λάθος*** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α. Ένα πολυώνυμο $P(x)$ έχει παράγοντα το $x-\rho$ αν και μόνο αν $P(\rho)=0$.

β. Ο ν-οστός όρος μιας γεωμετρικής προόδου με πρώτο όρο α_1 και λόγο λ είναι $\alpha_\nu = \alpha_1 \cdot \lambda^{\nu-1}$.

γ. Το άθροισμα των πρώτων ν όρων μιας γεωμετρικής προόδου (α_ν) με λόγο $\lambda \neq 1$ είναι

$$S_\nu = \alpha_1 \cdot \frac{\lambda^\nu - 1}{\lambda}.$$

δ. Για κάθε πραγματικό αριθμό x ισχύει: $\log 10^x = x$. Μονάδες 8

Θέμα 2ο

Δίνεται η αριθμητική πρόοδος $-1, 2, 5, 8, \ldots$. Να βρεθούν :

α. Ο πρώτος όρος α_1 και η διαφορά ω. Μονάδες 6

β. Ο α_{20}. Μονάδες 6

γ. Το άθροισμα των 15 πρώτων όρων της αριθμητικής προόδου. Μονάδες 6

δ. Ποιος όρος της αριθμητικής προόδου είναι ίσος με 6011. Μονάδες 7

Θέμα 3ο

α. Να λυθεί η εξίσωση: $2x^3 - 5x^2 - 4x + 3 = 0$. Μονάδες 12

β. Με την βοήθεια του ερωτήματος α. να λυθεί η εξίσωση :

$2\sigma\upsilon\nu^3 x - 5\sigma\upsilon\nu^2 x - 4\sigma\upsilon\nu x + 3 = 0$. Μονάδες 13

Θέμα 4ο

α. Να βρεθεί ο πραγματικός αριθμός k έτσι ώστε τα πολυώνυμα $P(x) = x^3 + (k^2-3)x^2 + 7$ και $Q(x) = x^3 + x^2 + (k-2)x + 7$ να είναι ίσα. Μονάδες 12

β. Αν $k = 2$ να λυθεί το παρακάτω σύστημα : $\begin{cases} 2^\alpha \cdot (6-k)^\beta = 32 \\ \log\beta - \log\alpha = \log k \end{cases}$ Μονάδες 13

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1ο

A. Να δείξετε ότι : $\varepsilon\varphi(\alpha+\beta)=\dfrac{\varepsilon\varphi\alpha+\varepsilon\varphi\beta}{1-\varepsilon\varphi\alpha\cdot\varepsilon\varphi\beta}$ αν $\sigma\upsilon\nu\alpha \neq 0$, $\sigma\upsilon\nu\beta \neq 0$, $\sigma\upsilon\nu(\alpha+\beta) \neq 0$.

Μονάδες 13

B. Να συμπληρωθούν οι παρακάτω ισότητες :

a. $\eta\mu 2\alpha =$..........

b. Ο $\nu^{\text{ος}}$ όρος μιας Αριθμητικής Προόδου με πρώτο όρο α_1 και διαφορά ω δίνεται από των τύπο $\boldsymbol{\alpha_\nu}$=......

c. $\ln\theta = \chi \Leftrightarrow \theta =$ ...... με $\theta > 0$ Μονάδες 6

C. Να σημειώσετε αν είναι ***σωστή (Σ)*** ή ***λάθος (Λ)*** καθεμιά από τις παρακάτω προτάσεις:

a. Το άθροισμα των ν πρώτων όρων Γεωμετρικής Προόδου (α_ν) με λόγο $\lambda \neq 1$, δίνεται από τον τύπο $S_\nu = \dfrac{\lambda^\nu - 1}{\lambda - 1}$

b. $\log\theta_1 - \log\theta_2 = \log(\theta_1 - \theta_2)$, $\theta_1, \theta_2 > 0$

c. Αν $\chi - \rho$ είναι παράγοντας του πολυωνύμου $P(\chi)$, τότε $P(\rho) = \rho$ Μονάδες 6

Θέμα 2ο

Δίνεται η εξίσωση : $2\sigma\upsilon\nu 2\chi - 7\sigma\upsilon\nu\chi = 0$, με $\pi < \chi < \dfrac{3\pi}{2}$.

a. Να δείξετε ότι $\sigma\upsilon\nu\chi = -\dfrac{1}{4}$ Μονάδες 10

b. Να υπολογίσετε το $\sigma\upsilon\nu 2\chi$ και το $\sigma\upsilon\nu\dfrac{\chi}{2}$ Μονάδες 8 + 7

Θέμα 3ο

Δίνεται το πολυώνυμο $P(\chi) = \alpha\chi^3 + 2\chi^2 - (\beta+1)\chi - 6$.

a. Αν το πολυώνυμο έχει παράγοντα το $\chi+1$ και οι α, β, 7 είναι διαδοχικοί όροι Αριθμητικής προόδου να δείξετε ότι $\alpha = 1$ και $\beta = 4$ Μονάδες 9

b. Για τις τιμές των α, β από το πρώτο ερώτημα να λύσετε την εξίσωση $P(\chi) = 0$

Μονάδες 9

c. Να λύσετε την ανίσωση $P(\chi) > 0$ αν $\alpha = 1$ και $\beta = 4$ Μονάδες 7

Θέμα 4ο

a. Να υπολογιστεί το άθροισμα: 1+3+5+7+..........+ 99 Μονάδες 13

b. Να λυθεί η ανίσωση: $\log x + \log x^3 + \log x^5 + \ldots + \log x^{99} < 1250\log 100$

Μονάδες 12

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1°

Α. Να γράψετε το γράμμα που αντιστοιχεί στην σωστή απάντηση.

1. Το πολυώνυμο $(2005x+2004)^{2006}+x^{2007}$, έχει παράγοντα τον:

α. $x+\dfrac{2004}{2005}$ **β.** x **γ.** $x-1$ **δ.** $X+1$ **ε.** $x–200$

Μονάδες 5

2. Δίνεται η αριθμητική πρόοδος 3, 7, 11,…. Να βρεθεί ποιος από τους παρακάτω αριθμούς είναι όρος της προόδου.

α. 56 **β.** 81 **γ.** 95 **δ.** 106 **ε.** 138

Μονάδες 5

Β. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας την ένδειξη ***Σωστό (Σ) ή Λάθος (Λ)*** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α. Αν το πολυώνυμο P(x) έχει ρίζα τον αριθμό ρ=2 τότε το πολυώνυμο $Q(x) = P(2x-8)$ έχει ρίζα τον αριθμό 4. Μονάδες 5

β. Η παράσταση Α=συν72·συν12+ημ72ημ12 ισούται με $\sqrt{3}$. Μονάδες 5

γ. Στις ισότητες που ακολουθούν να συμπληρώσετε τα κενά με τον κατάλληλο αριθμό:

i. $3^4=\left(\dfrac{1}{3}\right)^{\cdots}$ **ii** $\log\sqrt{10}=...$ Μονάδες 5

Θέμα 2°

Α. Να αποδειχθεί η ισότητα $συν2α = 1- 2ημ^2α$ Μονάδες 10

Β. Να λυθεί η εξίσωση: συν2x +2ημx = 1 Μονάδες 15

Θέμα 3°

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = αx^3 + (α + β)x^2-2x-1$

i. Αν $P(1) = -4$ και $P(2) = -21$ να δειχθεί ότι $α = -3$ και $β = 5$ Μονάδες 8

ii. Να γίνει η διαίρεση του P(x) με το πολυώνυμο 3x +1 και να γραφεί το P(x) με την ταυτότητα της Ευκλείδειας διαίρεσης. Μονάδες 8

iii. Να λυθεί η ανίσωση, $P(x) \leq 0$ Μονάδες 9

Θέμα 4°

i. Αν οι αριθμοί θ, 8, $θ^2$ με την σειρά που δίνονται αποτελούν διαδοχικούς όρους μιας γεωμετρικής προόδου $(α_ν)$ να υπολογιστεί ο αριθμός θ. Μονάδες 5

ii. Για την τιμή του *θ* που υπολογίσετε στο ερώτημα (i) να αποδειχθεί ότι οι αριθμοί logθ, log8, $\log θ^2$ αποτελούν διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου $(β_ν)$. Μονάδες 6

iii. Να υπολογίσετε τη διαφορά ω της αριθμητικής προόδου $(β_ν)$ του ερωτήματος (ii) και αν ισχύσει $β_1 = \log θ$, να υπολογίσετε το άθροισμα των 2005 πρώτων όρων αυτής της προόδου.

Μονάδες 7

iv. Να λύσετε την εξίσωση $θ^{x-1}-5\sqrt{θ}^{\,x}+16=0$ για την τιμή θ του ερωτήματος (i)

Μονάδες 7

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1ο

Α. Να αποδείξετε ότι το υπόλοιπο της διαίρεσης ενός πολυωνύμου P(x) με το x – ρ είναι ίσο με τη τιμή του πολυωνύμου για x = ρ , δηλαδή υ = P(ρ) Μονάδες 10

Β. Χαρακτηρίστε καθεμία από τις παρακάτω προτάσεις ως ***σωστή (Σ)*** ή ***λάθος (Λ)*** **.**

1. Η συνάρτηση συνx είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$
2. Αν το P(x) είναι πέμπτου βαθμού τότε το υπόλοιπο της διαίρεσής του με το x – 4 είναι τέταρτου βαθμού .
3. Αν α , β , γ διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου με λόγο $\lambda \neq 1$ τότε $2\beta = \alpha + \gamma$
4. Αν $\theta > 0$ τότε ισχύει $\theta = 10^x \Leftrightarrow \ln\theta = x$
5. Αν $\sigma\upsilon\nu\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu\beta \cdot \sigma\upsilon\nu(\alpha+\beta) \neq 0$ τότε είναι $\varepsilon\varphi(\alpha+\beta) = \dfrac{\varepsilon\varphi\alpha - \varepsilon\varphi\beta}{1 + \varepsilon\varphi\alpha \cdot \varepsilon\varphi\beta}$

Μονάδες $5 \times 3 = 15$

Θέμα 2ο

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^4 - 5x^3 + \alpha x^2 + \beta x - 6$.

α. Να υπολογιστούν τα α και β αν το P(x) έχει παράγοντες το x – 1 και το x – 2 . Μονάδες 7

β. Να γραφεί για τις τιμές του α και του β που βρήκατε στο (Α) ερώτημα η ταυτότητα της διαίρεσης του P(x) με το $\delta(x) = (x-1)\cdot(x-2)$ Μονάδες 8

γ. Να βρεθούν οι τιμές του x για τις οποίες η γραφική παράσταση του πολυωνύμου βρίσκεται κάτω από τον άξονα x’x . Μονάδες 10

Θέμα 3ο

Έστω ότι σε ακολουθία α_ν ισχύει : $\alpha_3 = 1,\ \alpha_4 = \eta\mu^2\frac{\theta}{2},\ \alpha_5 = -\sigma\upsilon\nu\theta$.

α. Να αποδείξετε ότι οι α_3 , α_4 , α_5 είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου . Μονάδες 3

β. Να αποδειχθεί ότι η διαφορά ω της προόδου είναι $\omega = -\dfrac{1+\sigma\upsilon\nu\theta}{2}$. Μονάδες 4

γ. Αν επιπλέον υποθέσουμε ότι η α_ν είναι γεωμετρική πρόοδος , να βρεθεί το α_1 . Μονάδες 5

δ. Να λυθεί η εξίσωση : $\eta\mu^2 2x - 6\eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x - 3 = \alpha_3$ στο [-π , π]. Μονάδες 13

Θέμα 4ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \log(4^x - 8) - x\log 2 - \log 7$.

α. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f. Μονάδες 9

β. Να αποδειχθεί ότι $f(x) = \log\left(\dfrac{4^x - 8}{7 \cdot 2^x}\right)$. Μονάδες 6

γ. Να λυθεί η εξίσωση $f(x) = 0$. Μονάδες 10

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1ο

Α. Να αποδείξετε ότι το υπόλοιπο της διαίρεσης ενός πολυωνύμου $P(x)$ με το $x - \rho$ είναι ίσο με την τιμή του πολυωνύμου για, $x = \rho$ δηλαδή $\upsilon = P(\rho)$. Μονάδες 13

Β. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις ***Σωστό*** ή ***Λάθος,*** γράφοντας στο φύλλο απαντήσεων τον αριθμό της πρότασης και δίπλα την λέξη ***Σωστό*** ή ***Λάθος.***

a. Η συνάρτηση $f(x) = \rho \cdot \eta\mu(\omega x)$ είναι περιοδική με περίοδο $T = \frac{2\pi}{\omega}$.

b. Το μηδενικό πολυώνυμο έχει βαθμό μηδέν.

c. Αν $\theta_1, \theta_2 > 0$ τότε $\log(\theta_1 \cdot \theta_2) = \log(\theta_1) + \log(\theta_2)$.

d. Ισχύει ότι $\eta\mu(\alpha - \beta) = \eta\mu\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu\beta + \sigma\upsilon\nu\alpha \cdot \eta\mu\beta$

Μονάδες $4 \times 3 = 12$

Θέμα 2ο

Αν (α_ν), $\nu \in N^*$ είναι αριθμητική πρόοδος με τέταρτο όρο το 11 και έβδομο όρο το 20, να υπολογίσετε:

a. Τον πρώτο όρο α_1 και την διαφορά ω της προόδου.

b. Το άθροισμα των 101 πρώτων όρων της προόδου.

c. Το πλήθος των όρων που είναι μικρότεροι ή ίσοι του 137.

Μονάδες 10 + 7 + 8 =25

Θέμα 3ο

Αν $\eta\mu\alpha = \frac{4}{5}$ και $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, τότε:

a. Να υπολογίσετε το συνα και το συν2α.

b. Να δείξετε ότι $25\eta\mu 2\alpha + 50\sigma\upsilon\nu 2\alpha = -38$

Μονάδες 13 + 12 = 25

Θέμα 4ο

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = 2x^3 - (2\kappa + 1)x^2 + 13x - \kappa + 1$.

a. Αν το υπόλοιπο της διαίρεσης $P(x):(x - 2)$ είναι -6, να υπολογίσετε το k.

b. Για $k = 5$, με την βοήθεια του σχήματος Horner να εκτελέσετε την διαίρεση $P(x):(x - 4)$ και να γράψετε την ταυτότητα της ευκλείδειας διαίρεσης.

c. Να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 0$.

Μονάδες: 9 + 9 + 7 = 25

ΘΕΜΑΤΑ

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Να γράψετε τη λέξη Σωστό ή Λάθος δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση :

Σε αριθμητική Πρόοδο με πρώτο όρο α_1 και διαφορά ω ισχύουν:

a. $\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu-1)\omega$.

b. $\Sigma_\nu = \dfrac{2\alpha_1 + (\nu+1)\cdot\omega}{2}\cdot\nu$.

Σε Γεωμετρική Πρόοδο με πρώτο όρο $\boldsymbol{\alpha_1}$ και λόγο $\boldsymbol{\lambda \neq 1}$ ισχύουν:

c. $\alpha_\nu = \alpha_1\lambda^{\nu-1}$.

d. $S_\nu = \alpha_1 \dfrac{\lambda^{\nu-1} - 1}{\lambda - 1}$.

e. ημ(α−β) = ημασυνβ −ημβσυνα.

μονάδες 10

Β. Αν $\theta_1, \theta_2 \rangle\, 0$ και $\alpha \rangle\, 0, \alpha \neq 1$. Να αποδειχθεί ότι :$\log_\alpha(\theta_1\,\theta_2) = \log_\alpha\theta_1 + \log_\alpha\theta_2$

μονάδες 15

ΘΕΜΑ 2ο

a. Να λυθεί η τριγωνομετρική εξίσωση: $ημ^2χ = \dfrac{1}{2}$.

μονάδες 12

b. Να αποδειχθεί ότι: $\dfrac{ημ2α}{1+συν2α}\cdot\dfrac{συνα}{1+συνα} = εφ\dfrac{α}{2}$.

μονάδες 13

ΘΕΜΑ 3ο

Να υπολογίσετε τον αριθμό : $100^{\log\sqrt{3}}$.

μονάδες 10

Να λύσετε την εξίσωση : $3^{2\log x} - 2\cdot 3^{\log x} - 100^{\log\sqrt{3}} = 0$.

μονάδες 15

ΘΕΜΑ 4ο

Το πολυώνυμο $P(x) = 2χ^3+αχ^2+βχ+6$ ικανοποιεί τις συνθήκες:

- Έχει παράγοντα το χ−2 και
- η διαίρεση με το χ +1 δίνει υπόλοιπο 18.

a. Να αποδειχθεί ότι : α = 1 και β =-13.

μονάδες 10

b. Να λύσετε την εξίσωση : P(χ) = 0.

μονάδες 9

c. Να γραφεί το **P(χ)** σαν γινόμενο πρωτοβάθμιων παραγόντων.

μονάδες 6

ΘΕΜΑΤΑ

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Να αποδειχθεί ότι **:** $συν2ω = συν^2ω - ημ^2ω = 1 - 2ημ^2ω = 2συν^2ω – 1$

Μονάδες 10

Β. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο φύλο απαντήσεων τη λέξη Σωστό ή Λάθος δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α. Η περίοδος της συνάρτησης $F(x) = ημ3x$ είναι 3π

β. Είναι $\frac{1}{2}ημ2α = ημα.συνα$

γ. Αν ο αριθμός ρ είναι ρίζα ενός πολυωνύμου P(x) τότε το υπόλοιπο της διαίρεσης του P(x) με το x – ρ είναι ίσο με μηδέν .

δ. Η συνάρτηση $F(x) = e^x$ είναι γνησίως φθίνουσα στο πεδίο ορισμού της .

ε. Αν $0 < α \neq 1$, $θ > 0$ τότε $α^{\log_α θ} = θ$

Μονάδες 15(5 x 3)

ΘΕΜΑ 2ο

Να αποδειχθεί ότι **:** $\dfrac{ημα + ημ2α}{1 + συνα + συν2α} = εφα$

Μονάδες 25

ΘΕΜΑ 3ο

Να λυθεί η λογαριθμική εξίσωση **:** $\log(x-1) + \log(x+2) = 2(1- \log5)$

Μονάδες 25

ΘΕΜΑ 4ο

Δίνεται πολυώνυμο $P(x) = 2x^3 + x^2 – αx + 2$ με α ανήκει στο R .

α.. Να βρεθεί η τιμή του α ώστε το πολυώνυμο P(x) να έχει παράγοντα το x- 1 .

Μονάδες 10

β. Για την τιμή του α που βρήκατε να λύσετε την ανίσωση $P(x) \geq 0$

Μονάδες 15