

**ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Β' ΤΑΞΗΣ  
ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ  
ΠΕΜΠΤΗ 6 ΙΟΥΝΙΟΥ 2002  
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ  
ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ : ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ  
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)**

**ΘΕΜΑ 1ο**

**A.** Τι ονομάζουμε εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων  $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ .

**Μονάδες 4**

**B.** Να αποδείξετε ότι το εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων είναι ίσο με το άθροισμα των γινομένων των ομώνυμων συντεταγμένων τους.

**Μονάδες 9**

**Γ.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας την ένδειξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

**α.** Ένα διάνυσμα και μία ευθεία, αν έχουν τον ίδιο συντελεστή διεύθυνσης είναι παράλληλα.

**β.** Αν  $\det(\vec{\alpha}, \vec{\beta})$  είναι η ορίζουσα των διανυσμάτων  $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ , τότε ισχύει η ισοδυναμία:

$$\vec{\alpha} // \vec{\beta} \Leftrightarrow \det(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = 0.$$

**γ.** Αν  $\alpha, \beta$  είναι θετικοί ακέραιοι, τότε πάντα ισχύει:  $\alpha \cdot \beta \cdot [\alpha, \beta] = (\alpha, \beta)$  όπου  $[\alpha, \beta]$  είναι το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο των  $\alpha, \beta$  και  $(\alpha, \beta)$  είναι ο μέγιστος κοινός διαιρέτης των  $\alpha, \beta$ .

**δ.** Η εξίσωση  $x^2 + y^2 + Ax + By + \Gamma = 0$  με  $A^2 + B^2 - 4\Gamma > 0$  παριστάνει κύκλο με κέντρο  $K\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right)$ .

**Μονάδες 8**

- Δ. Στη **Στήλη Α** δίνονται εξισώσεις κωνικών τομών και στη **Στήλη Β** εξισώσεις εφαπτομένων κωνικών τομών στο σημείο επαφής  $(x_1, y_1)$ .

Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα της **Στήλης Α** και δίπλα σε κάθε γράμμα, τον αριθμό της **Στήλης Β** που αντιστοιχεί πάντα στη σωστή εξίσωση εφαπτομένης.

| Στήλη Α   | Στήλη Β  |
|---|--|
| α. $x^2 + y^2 = \rho^2$                             | 1. $yy_1 = \rho(x + x_1)$                                  |
| β. $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ | 2. $xx_1 + yy_1 = \rho^2$                                  |
| γ. $y^2 = 2px$                                      | 3. $\frac{xx_1}{\alpha^2} + \frac{yy_1}{\beta^2} = 1$      |
| δ. $\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ | 4. $xx_1 + yy_1 = 1$                                       |
|   | 5. $\frac{xx_1}{\alpha^2} - \frac{yy_1}{\beta^2} = \rho^2$ |
|   | 6. $\frac{xx_1}{\alpha^2} - \frac{yy_1}{\beta^2} = 1$      |

**Μονάδες 4**

**ΘΕΜΑ 2ο**

- Α. Να αποδείξετε ότι το γινόμενο δύο περιττών ακέραιων αριθμών είναι περιττός ακέραιος αριθμός.

**Μονάδες 5**

- Β. Να αποδείξετε ότι αν ο  $a$  είναι ακέραιος, τότε και ο  $\frac{a(a^2 + 1)}{2}$  είναι ακέραιος.

**Μονάδες 10**

Γ. Αν  $a$  είναι περιττός ακέραιος, να αποδείξετε ότι ο  $\frac{a(a^2+1)}{2}$  είναι επίσης περιττός ακέραιος.

**Μονάδες 10**

**ΘΕΜΑ 3ο**

Δίνεται η παραβολή  $y^2 = 4x$ . Να βρείτε:

Α. την εστία και τη διευθετούσα της παραβολής

**Μονάδες 6**

Β. τις ευθείες που διέρχονται από την εστία της παραβολής και απέχουν από την αρχή των αξόνων απόσταση ίση με  $\frac{\sqrt{2}}{2}$

**Μονάδες 10**

Γ. την εξίσωση της εφαπτομένης της παραβολής που είναι παράλληλη στην ευθεία  $y = x - 1$ .

**Μονάδες 9**

**ΘΕΜΑ 4ο**

Δίνεται η εξίσωση  $x^2 + y^2 - 2x\sin\theta - 2y\eta\mu\theta - 1 = 0$ ,  $0 \leq \theta < 2\pi$ .

Α. Να αποδείξετε ότι για κάθε  $\theta$  η εξίσωση αυτή παριστάνει κύκλο, του οποίου να προσδιορίσετε το κέντρο και την ακτίνα.

**Μονάδες 9**

Β. Αν  $\theta = \frac{\pi}{2}$ , να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης του κύκλου στο σημείο  $M(1,2)$ .

**Μονάδες 9**

Γ. Να αποδείξετε ότι για τις διάφορες τιμές του  $\theta$  τα κέντρα των παραπάνω κύκλων βρίσκονται σε κύκλο με κέντρο  $O(0,0)$  και ακτίνα  $\rho = 1$ .

**ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζόμενους)**

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, κατεύθυνση, εξεταζόμενο μάθημα). Τα θέματα να μην τα αντιγράψετε στο τετράδιο. Τα σχήματα που θα χρησιμοποιήσετε στο τετράδιο, μπορούν να γίνουν και με μολύβι.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. Καμιά άλλη σημείωση δεν επιτρέπεται να γράψετε. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα, τα οποία και θα καταστραφούν μετά το πέρας της εξέτασης.
3. Να απαντήσετε στο τετράδιό σας σε όλα τα θέματα.
4. Κάθε λύση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: Τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: Μιάμιση (1 1/2) ώρα μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.

**ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ**

**ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ**