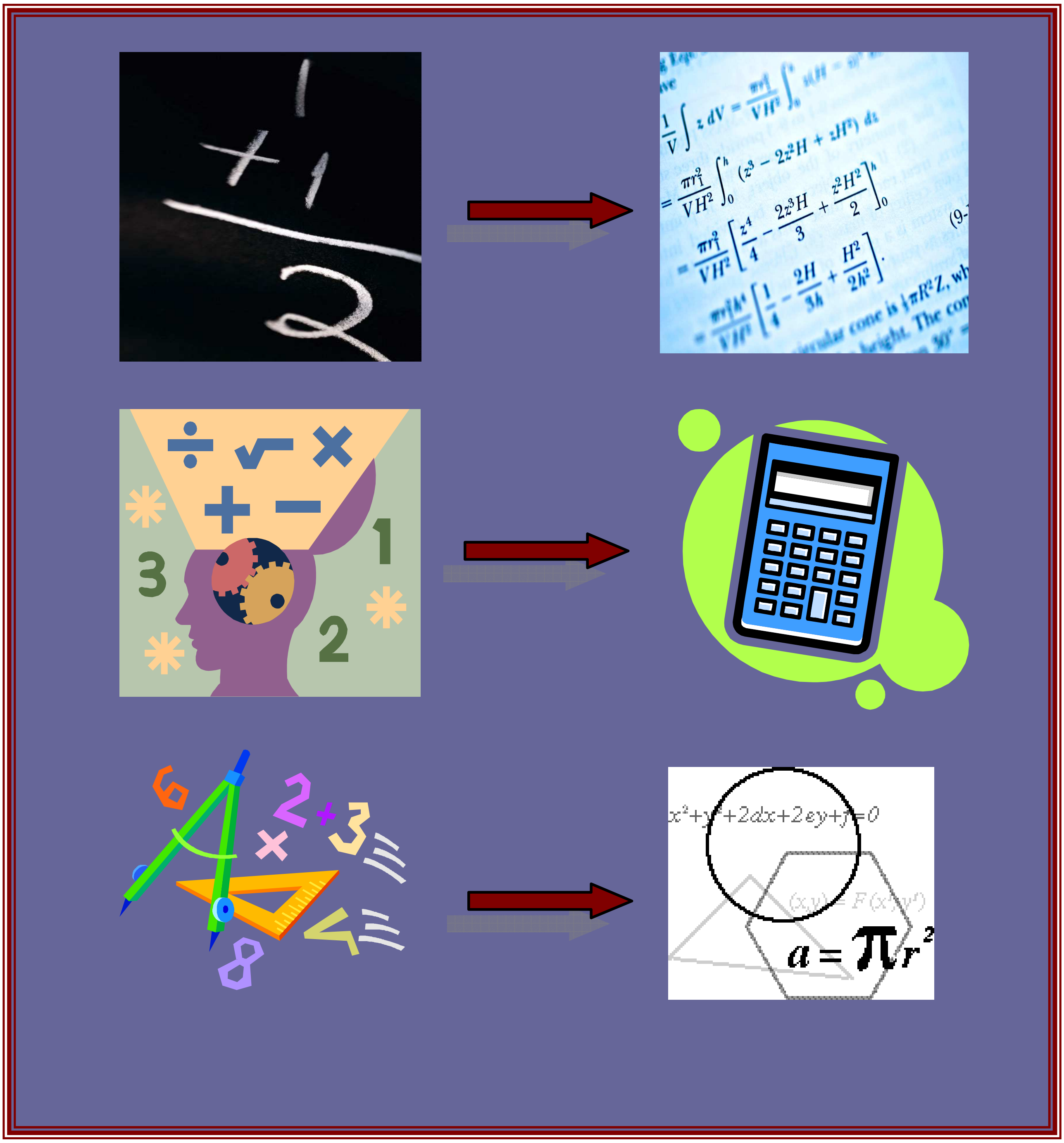
Σχ. Έτος : 2011-2012

1ο ΓΕΝΙΚΟ ΛΥΚΕΙΟ ΦΙΛΙΠΠΙΑΔΑΣ

ΕΡΕΥΝΗΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ (PROJECT)

ΘΕΜΑ: ***ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΣΤΗΝ ΚΑΘΗΜΕΡΙΝΗ ΖΩΗ***



ΤΑΞΗ:Α' ΛΥΚΕΙΟΥ

ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΣ-ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΣ 2011-2012

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Τα μαθηματικά είναι η επιστήμη που μελετά την ποσότητα (δηλαδή τους αριθμούς), τη δομή (δηλαδή τα σχήματα), το διάστημα, τη μεταβολή και τις σχέσεις όλων των μετρήσιμων αντικειμένων της πραγματικότητας και της φαντασίας μας. Περιγράφουν τις σχέσεις με τύπους ή και αλγόριθμους και ερευνούν την αλήθεια τους με αποδεικτική διαδικασία λογικών βημάτων που στηρίζονται σε αξιώματα και θεωρήματα. Έτσι θα μπορούσαμε να πούμε ότι τα μαθηματικά υπήρχαν απ' την αρχή του κόσμου, αλλά ο άνθρωπος τα ανακάλυψε κάπου τον 6^{ο} αι. π.Χ.

Από τα μαθηματικά στην αρχαία Αίγυπτο και Ελλάδα με τη χρυσή τομή και την ακολουθία Fibonacci και ολοκληρώνοντας τη διερεύνησή μας με τους κλάδους των μαθηματικών, την εφαρμογή τους τόσο στο ποδόσφαιρο, όσο και στην ιατρική, αλλά και τη στενή σχέση τους με τις… μέλισσες, καταλήξαμε στο συμπέρασμα ότι τα μαθηματικά δεν είναι μια επιστήμη σαν όλες τις άλλες. Πρόκειται για τη μητέρα όλων των επιστημών: φυσική, χημεία, βιολογία, ιατρική. Όλα αναπτύχτηκαν στηριζόμενα στα μαθηματικά. Έτσι, καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι χωρίς τα μαθηματικά δε θα υπήρχε ολόκληρος ο ανθρώπινος πολιτισμός και εμείς ίσως να ζούσαμε σε κάποια σπηλιά.

Ένα συνηθισμένο ερώτημα που κάνουν οι μαθητές στους καθηγητές τους είναι: «Γιατί μαθαίνουμε Μαθηματικά;» και «Πού θα μας χρησιμεύσουν;» Η απάντηση είναι πάντα η ίδια: «Επειδή είναι χρήσιμα στη ζωή μας». Η αλήθεια είναι ότι κανένας δεν μένει ικανοποιημένος από αυτή την απάντηση. Θα μπορούσε να είναι χρήσιμα μέχρι να μάθουμε τις τέσσερις πράξεις για τους καθημερινούς λογαριασμούς και υπολογισμούς μας. Τότε όμως γιατί μαθαίνουμε όλα αυτά τα Μαθηματικά; Είναι αλήθεια ότι προτιμούμε τα εύκολα και απλά πράγματα και όχι τα δυσνόητα . Όμως τα πράγματα είναι τελείως διαφορετικά. Τα μαθηματικά βρίσκονται παντού γύρω μας, μόνο που χρειάζεται κάποια προσπάθεια να τα ανακαλύψουμε. Όλες οι επιστήμες χρησιμοποιούν τα μαθηματικά για να λύσουν τα δικά τους προβλήματα. Οι Αρχαίοι Αιγύπτιοι δε θα μπορούσαν να ξαναβρούν τα όρια των χωραφιών τους μετά από κάθε πλημμύρα του Νείλου, αν δεν χρησιμοποιούσαν τη γεωμετρία, ούτε θα μπορούσαν να κτίσουν τις πυραμίδες, ούτε ποτέ ο Κολόμβος θα είχε ανακαλύψει την Αμερική αν δεν χρησιμοποιούσε τριγωνομετρία για να διαβάσει τ' αστέρια, ούτε τα διαστημόπλοια θα είχαν φτάσει στον Άρη αν δεν είχαν σχεδιαστεί με λεπτομέρεια οι τροχιές τους με μαθηματικούς υπολογισμούς. Ούτε φυσικά θα υπήρχαν οι ηλεκτρονικοί υπολογιστές και πολλά ακόμα. Η φυσική, η πληροφορική, η βιολογία, η ιατρική, η γεωλογία ακόμη και οι οικονομικές επιστήμες στηρίζονται στα μαθηματικά. Έτσι λοιπόν τα Μαθηματικά που φαίνονται απομακρυσμένα από την πραγματικότητα δίνουν απαντήσεις και αποκαλύπτουν με τεράστια επιτυχία τα φαινόμενα του κόσμου που είναι κατανοητά και συγκεκριμένα. Τα Μαθηματικά δεν είναι λοιπόν ένα μάθημα που απευθύνεται σε "λίγους και έξυπνους", αλλά ένα μάθημα απαραίτητο σε κάθε άνθρωπο, όπως είναι και η γλώσσα. Ακόμη και άνθρωποι που δεν έχουν πάει ποτέ σχολείο χρησιμοποιούν καθημερινά στη ζωή τους τα Μαθηματικά.

ΕΡΩΤΗΜΑΤΟΛΟΓΙΟ-ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Σε ενδιαφέρουν τα μαθηματικά; ΝΑΙ ☐

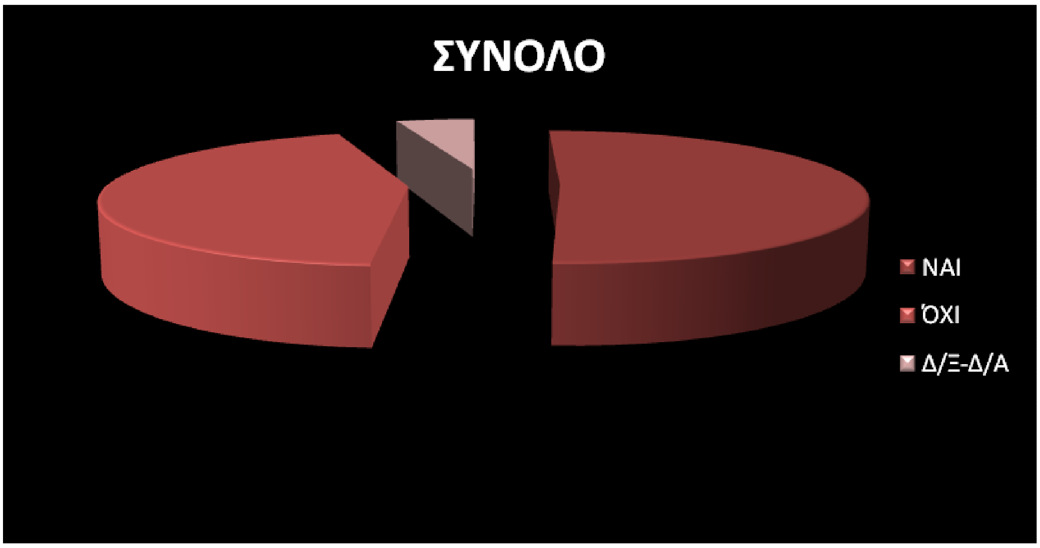
ΟΧΙ α) είναι δύσκολα ☐

β) είναι βαρετά ☐

γ) μου είναι αδιάφορα ☐

δ) άλλο… ☐

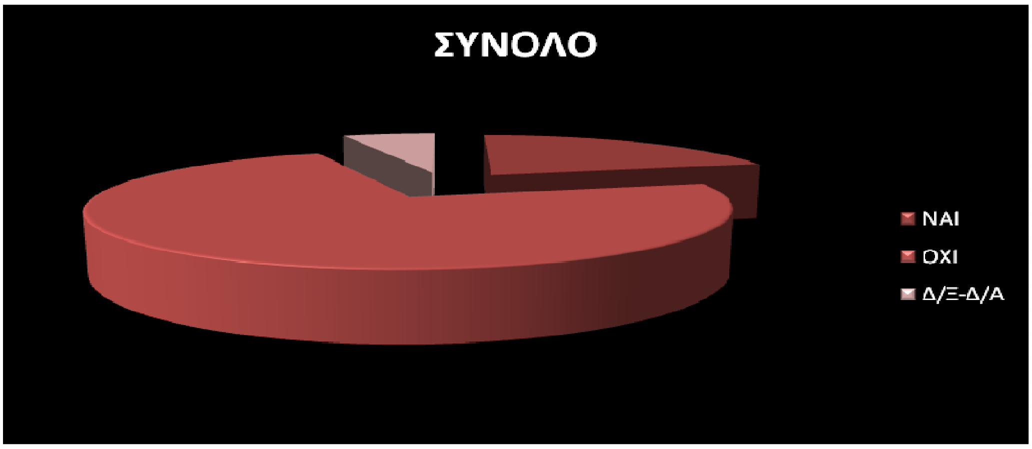
Δ/Ξ-Δ/Α ☐



2. Θα σου άρεσε να ασχοληθείς επαγγελματικά στο μέλλον με τα μαθηματικά; ΝΑΙ ☐

ΟΧΙ ☐

Δ/Ξ-Δ/Α ☐



3. Πόσο χρόνο αφιερώνεις (καθημερινά) στο διάβασμα των μαθηματικών;

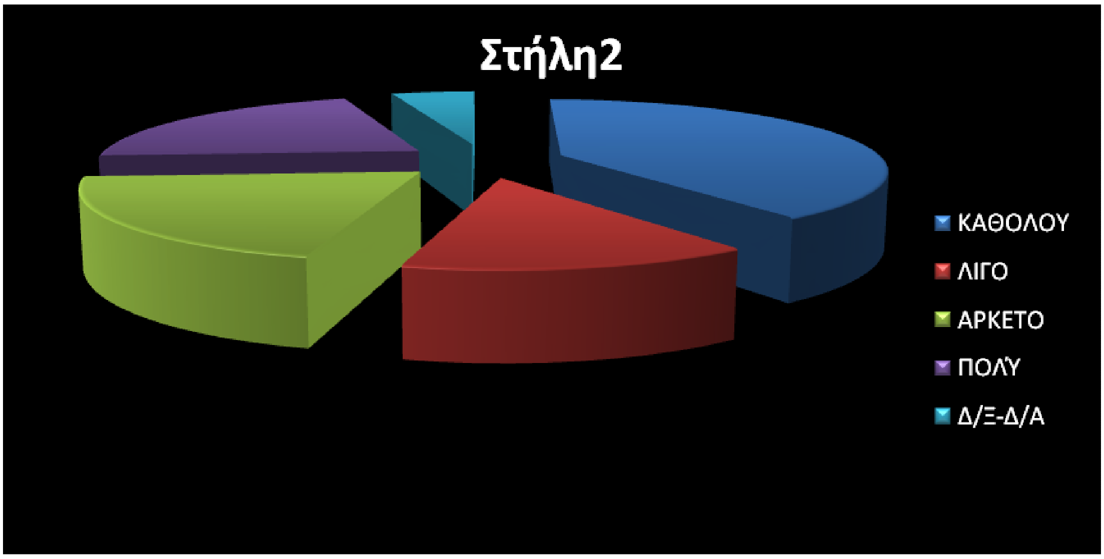
ΚΑΘΟΛΟΥ ☐

ΛΙΓΟ ☐

ΑΡΚΕΤΟ ☐

ΠΟΛΥ ☐

Δ/Ξ-Δ/Α ☐

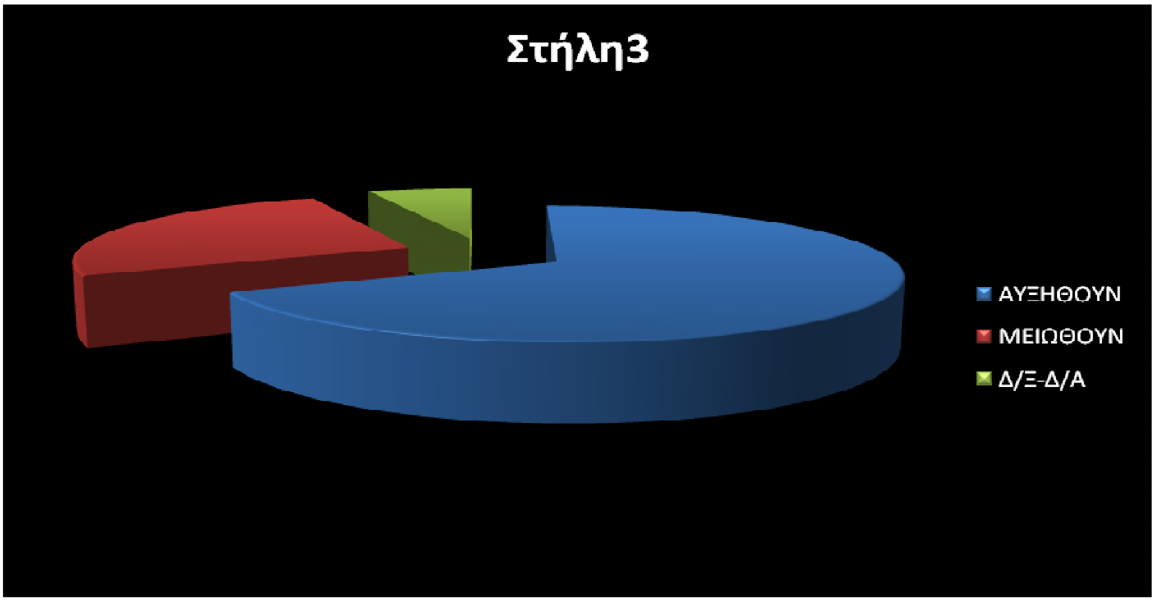


4. θεωρείς ότι πρέπει να αυξηθούν ή να μειωθούν οι ώρες των μαθηματικών ;

ΜΕΙΩΘΟΥΝ ☐

ΑΥΞΗΘΟΥΝ ☐

Δ/Ξ-Δ/Α ☐

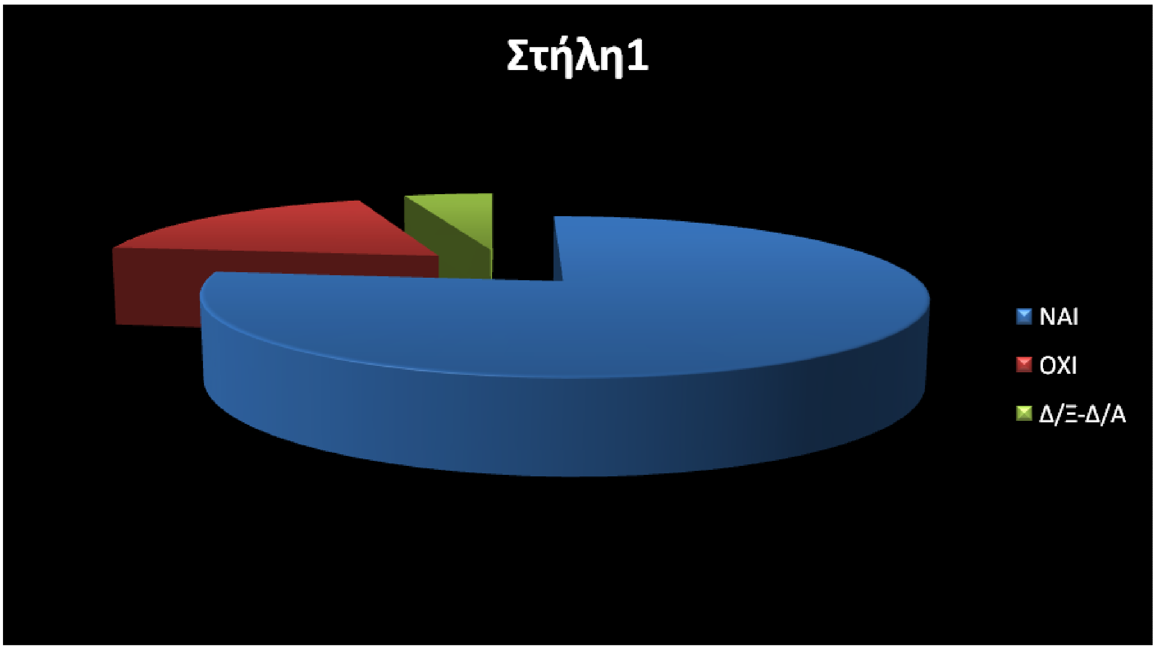


5. Πιστεύεις πως τα μαθηματικά έχουν εφαρμογή στην καθημερινή ζωή ;

ΝΑΙ ☐

ΟΧΙ ☐

Δ/Ξ-Δ/Α ☐

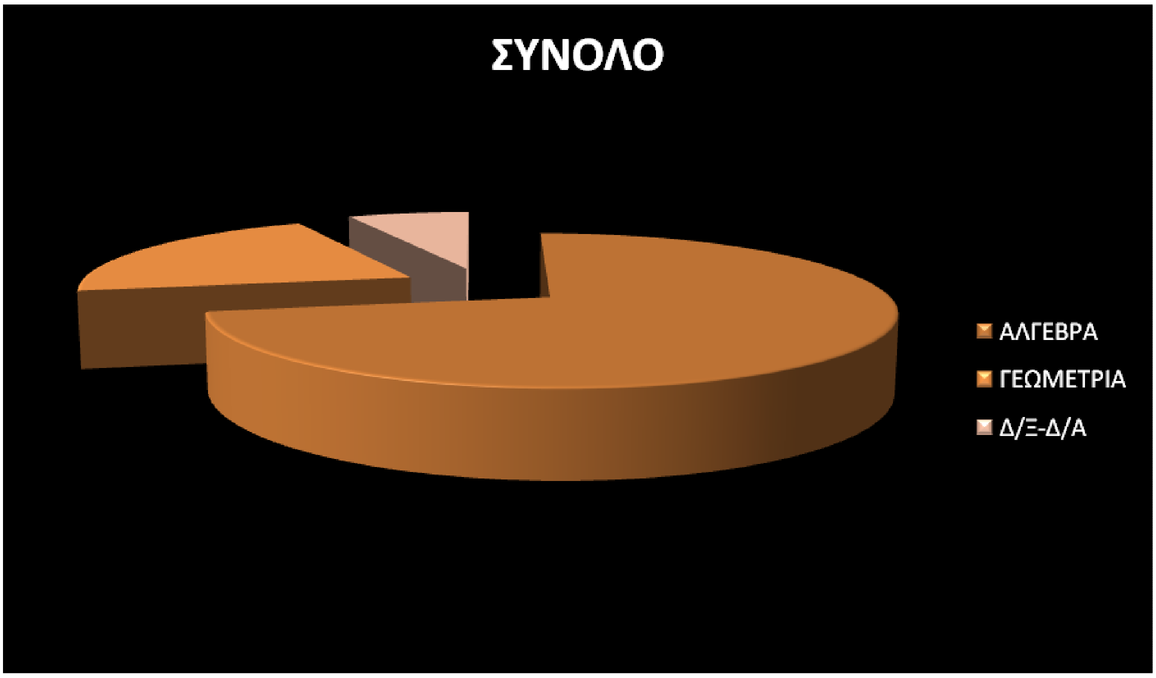


6. Σε ενδιαφέρει περισσότερο ο κλάδος της Άλγεβρας ή της Γεωμετρίας

ΑΛΓΕΒΡΑ ☐

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ ☐

Δ/Ξ-Δ/Α ☐

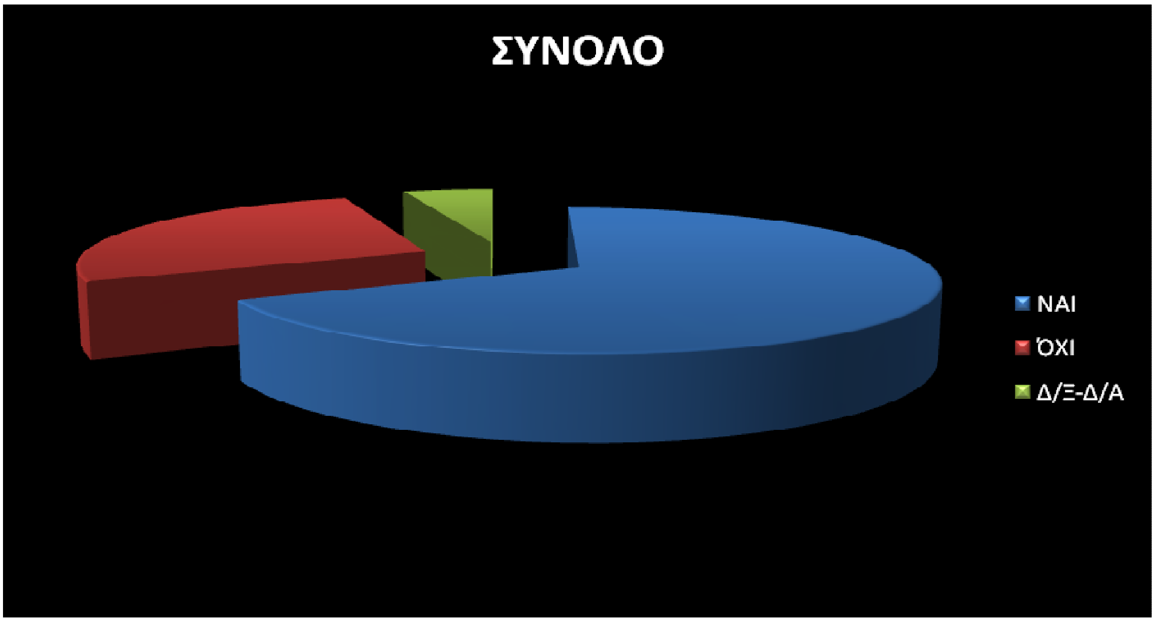


7. Είναι τα μαθηματικά επιστήμη που αναπτύσσεται συνεχώς ;

ΝΑΙ ☐

ΟΧΙ ☐

Δ/Ξ- Δ/Α ☐



8. Θα έπρεπε τα μαθηματικά να είναι πρωτεύον μάθημα στις Πανελλαδικές εξετάσεις ;

ΝΑΙ ☐

ΟΧΙ ☐

Δ/Ξ-Δ/Α ☐

Μετά την συγκέντρωση και την καταμέτρηση των απαντήσεων καταλήξαμε στο συμπέρασμα ότι η πλειοψηφία των μαθητών, αν και δεν ασχολούνται με τα μαθηματικά, πιστεύουν ότι είναι μια συνεχώς αναπτυσσόμενη επιστήμη και πως έχει πολλές εφαρμογές στην καθημερινή ζωή. Έτσι κατανοούμε ότι παρόλο που δεν είναι πολλοί αυτοί οι οποίοι ενδιαφέρονται μελλοντικά για τον κλάδο των μαθηματικών, όλοι αναγνωρίζουν την σημασία τους στην ανθρώπινη ανάπτυξη.

ΟΡΙΣΜΟΣ-ΔΙΑΧΡΟΝΙΚΗ ΕΞΕΛΙΞΗ-ΚΛΑΔΟΙ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Ορισμός

Τα μαθηματικά είναι η επιστήμη που μελετά την ποσότητα (δηλαδή τους αριθμούς), τη δομή (δηλαδή τα σχήματα), το διάστημα, τη μεταβολή και τις σχέσεις των διαφόρων αντικειμένων που αναφέρονται στο μέγεθος, στο σχήμα και είναι σχετικές θέσεις τους. Κύριο γνώρισμα των μαθηματικών είναι ότι εξετάζουν ιδιότητες των μεγεθών που μπορούν να μετρηθούν ή να υπολογιστούν χωρίς να ενδιαφέρονται καθόλου για την φύση τους. Οι μαθηματικοί περιγράφουν τις σχέσεις με τύπους ή και αλγόριθμους και ερευνούν την αλήθεια τους με αποδεικτική διαδικασία λογικών βημάτων που στηρίζονται σε αξιώματα και θεωρήματα.

Σύντομη διαχρονική εξέλιξη

Τα μαθηματικά είναι πνευματικά δημιούργημα των Αρχαίων Ελλήνων και συγκεκριμένα από τα λαμπρότερα. Αιώνες πριν μεγάλοι Έλληνες μαθηματικοί όπως ο Πυθαγόρας, ο Θαλής, ο Ευκλείδης, ο Αρχιμήδης ασχοληθούν με αυτά, τα μαθηματικά απασχολούσαν τους ανθρώπους αλλά ως τότε δεν ήταν παρά μια απλή συλλογή γνώσεων που είχαν άμεση χρήσιμη πρακτική εφαρμογή. Για παράδειγμα οι πρωτόγονοι άνθρωποι γνώριζαν να μετρούν, αλλά οι γνώσεις τους για τα μαθηματικά δεν έφταναν πιο πέρα από το δέκα ή έστω το είκοσι, κι αυτό γιατί χρησιμοποιούσαν για το μέτρημα τους τα δάχτυλα των χεριών και των ποδιών τους ..Η λογική θεωρούταν το μοναδικό μέσο που μπορούσε να οδηγήσει την ανθρώπινη σκέψη στην αλήθεια. Η μαθηματική φιλοσοφική σκέψη υπήρξε ο οδηγός του αρχαίου κόσμου. Έξω όμως από την γεωμετρία δεν υπήρχαν ούτε πραγματικά μαθηματικά ούτε πραγματική φιλοσοφία.

Κλάδοι των μαθηματικών

Άλγεβρα είναι ο μαθηματικός κλάδος που ασχολείται γενικά με την έννοια της (αλγεβρικής) δομής.

-*Μαθηματική Ανάλυση* είναι ο μαθηματικός κλάδος που ασχολείται γενικά με την έννοια της απόστασης.

-*Γεωμετρία* είναι ο μαθηματικός κλάδος που ασχολείται γενικά με την έννοια του σχήματος.

-*Εφαρμοσμένα Μαθηματικά.* Καθιερωμένοι κλάδοι εφαρμοσμένων μαθηματικών είναι οι εξής

- Μαθηματική Φυσική

-Θεωρία Πιθανοτήτων

-Στατιστική

-Θεωρία Πληροφοριών

-Βελτιστοποίηση

-Θεωρία Παιγνίων

-Λογισμός Μεταβολών

-Θεωρητική Πληροφορική

-Κρυπτογραφία

-Στα *Διακριτά Μαθηματικά* μελετούνται συγκεκριμένα πεπερασμένες ή αριθμήσιμες δομές.

-*Θεμέλια των μαθηματικών* είναι οι κλάδοι που προσπαθούν να θεμελιώσουν και να ενοποιήσουν τα Μαθηματικά είναι οι εξής

-Μαθηματική λογική

-Θεωρία μοντέλων

-Θεωρία αποδείξεων

-Θεωρία Συνόλων

-Θεωρία Κατηγοριών

Μια περιληπτική ιστορία των μαθηματικών

Για να φτάσουν τα μαθηματικά στην σημερινή τους μορφή υπήρξε μια πορεία. Τα μαθηματικά που ήταν ανώτερα ήταν των Αιγυπτίων και των Βαβυλωνίων. Οι Αιγύπτιοι ήταν ο πρώτος λαός που ασχολήθηκε με την μαθηματική επιστήμη. Τα ίδια περίπου ισχύουν και για τους αρχαίους Βαβυλώνιους. Στην Βαβυλωνία τα μαθηματικά αναπτύχθηκαν από τα 2000 π. Χ. Τουλάχιστον από το 1700 π .Χ. μελετήθηκαν αριθμητικά προβλήματα όπως οι Πυθαγόρειες τριάδες. Η βάση των μαθηματικών των Βαβυλωνίων κληρονομήθηκε από τους Έλληνες και ανεξάρτητη ανάπτυξη από τους Έλληνες άρχισε περί το 450 π. Χ. Η μέγιστη πρόοδος των μαθηματικών από τους Έλληνες υπήρξε από τα 300 έως το 200 π. Χ. Η μέγιστη πρόοδος των μαθηματικών στην Ευρώπη ξανάρχισε στις αρχές του 16^{ου} αιώνα με τους Pacioli, Cardan, Tartaglia, Ferrari, με την αλγεβρική επίλυση των τριτοβάθμιων και τεταρτοβάθμιων εξισώσεων. Οι Copernicus και Galileo επαναστάτησαν με τις εφαρμογές των μαθηματικών στη μελέτη του σύμπαντος.

Ο $17^{ος}$ αιώνας αντίκρισε τους Napier και Briggs, αλλά και άλλους να επεκτείνουν σημαντικά την υπολογιστική δύναμη των μαθηματικών με την ανακάλυψη των λογαρίθμων. Ο Cavalieri έκανε σημαντική πρόοδο για τον απειροστικό λογισμό και ο Descartes προσέθεσε τη δύναμη των αλγεβρικών μεθόδων στη Γεωμετρία. Επίσης η θεωρία της βαρύτητας του Newton, καθώς επίσης και η θεωρία του περί του φωτός, μας οδηγούν στον $18^{ο}$ αιώνα. Ο σημαντικότερος μαθηματικός του $18^{ου}$ Αιώνα ήταν ο Euler ο οποίος επιπροσθέτως της δουλείας του σε ένα εύρος μαθηματικών περιοχών, ανακάλυψε δύο νέους κλάδους, εκείνους του λογισμού των μεταβολών και της διαφορικής γεωμετρίας .Ο Euler υπήρξε επίσης σημαντικός στην επιπλέον ανάπτυξη της έρευνας στη θεωρία αριθμών, η οποία είχε αρχίσει από τον Fermat.

Η εξέλιξη κατά τον $19^{ο}$ αιώνα υπήρξε ταχεία. Θεμελιώδους σημασίας ήταν η εργασία του Fourier περί της θερμότητας. Ο Gauss θεωρούμενος από πολλούς ως ο μεγαλύτερος μαθηματικός όλων των εποχών, έκανε σημαντικότατες μελέτες. Μεταξύ αυτών, η εργασία του στη διαφορική γεωμετρία, η οποία ήταν επαναστατική για αυτόν τον τομέα. Επίσης, συνέβαλε κατά μεγαλειώδη τρόπο στην αστρονομία και το μαγνητισμό. Ο $19^{ος}$ αιώνας ανέδειξε την εργασία του Galois. Η εισαγωγή της έννοιας της ομάδας από τον Galois προανήγγειλε τη νέα κατεύθυνση της μαθηματικής έρευνας, η οποία συνεχίστηκε κατά τη διάρκεια του $20^{ου}$ αιώνα.

Το τέλος του $19^{ου}$ αιώνα βρήκε τον Cantor να ανακαλύπτει, σχεδόν μόνος του, τη θεωρία συνόλων.

ΒΙΟΓΡΑΦΙΕΣ ΣΠΟΥΔΑΙΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Είναι γνωστό ότι η Αρχαία Ελλάδα έβαλε τα θεμέλια των μαθηματικών επιστημών και ειδικά στον τομέα της Γεωμετρίας και της λογικής. Τα έργα των Αρχαίων Ελλήνων μαθηματικών όσα βέβαια διασώθηκαν αποτέλεσαν τη βάση για την πιο πέρα εξέλιξη των μαθηματικών επιστημών. Ονόματα όπως ο Θαλής έγιναν αντικείμενο μελέτης της ιστορίας των μαθηματικών . Ωστόσο πολλά από τα έργα τους με το πέρασμα των αιώνων καταστράφηκαν ή δεν ανακαλύφθηκαν . Για αυτούς τους μαθηματικούς παραθέτονται κείμενα για το βίο και τη συμβολή τους στην αξιωματική τοποθέτηση των μαθηματικών. Βέβαια και η συνεισφορά των ξένων μαθηματικών στην άνοδο της επιστήμης των μαθηματικών είναι πολυσήμαντη. Κάποιοι από τους σημαντικότερους ξένους μαθηματικούς είναι ο Καβαλιέρι , ο Πιερ Φερμά , ο Ισαάκ Νεύτων και ο Γαλιλέος για τον οποίο εν συνέχεια γίνεται λόγος.

ΘΑΛΗΣ Ο ΜΙΛΗΣΙΟΣ

Ο Θαλής του Εξαμίου και της Κλεοβουλίνης , είναι ο πρώτος άνθρωπος που αναφέρεται με το όνομα του στην ιστορία των Μαθηματικών. Διακρίθηκε σε πολλούς τομείς της γνώσης , Μαθηματικά , Αστρονομία , Μηχανική, Φιλοσοφία. Σύμφωνα με την πλέον αποδεκτή παράδοση ο Θαλής πραγματοποίησε πολυάριθμα ταξίδια στην Ασία, στην Κρήτη και στην Αίγυπτο. Στην πραγματοποίηση των ταξιδιών αυτών συνετέλεσε το γεγονός της μεγάλης οικονομικής του άνεσης που οφείλεται στο ότι από νωρίς ασχολήθηκε με το εμπόριο του αλατιού. Με τα ταξίδια του ο Θαλής αποκόμισε πλούτο γνώσεων , καθώς ήρθε σε επαφή με τη σοφία, τη γνώση και το μυστικισμό της Ανατολής. Ο Θαλής θεωρείται πρωτεργάτης της φιλοσοφίας και της επιστήμης αφού πρωτίστως κατόρθωσε να απελευθερώσει την ανθρώπινη σκέψη από τη μυθοπλαστική φαντασία και να την οδηγήσει με συστηματική μέθοδο στην ορθογραφική εξήγηση των φυσικών φαινομένων .

Εκεί όμως που διέπρεψε « Ο ιδρυτής της σοφίας» είναι στη γεωμετρία που μάλιστα θεωρείται και ως ο πατέρας της γεωμετρίας . Ο Θαλής έθεσε τις βάσεις της θεωρητικής γεωμετρίας εισάγοντας για πρώτη φορά την αποδεικτική διαδικασία ενώ μέχρι τότε οι μαθηματικές ανακαλύψεις βασίζονται στη διαίσθηση και μόνο. Ο Πρόκλος γράφει χαρακτηριστικά:

1. Ο κύκλος διχοτομείται από την διάμετρό του.

Πολλά από τα θεωρήματα της ευκλείδειας γεωμετρίας οφείλονται στο Θαλή:

Α. η εγγεγραμμένη γωνία σε ημικύκλιο είναι ορθή

Β. οι παρά την βάση γωνίες ισοσκελούς τριγώνου είναι ίσες

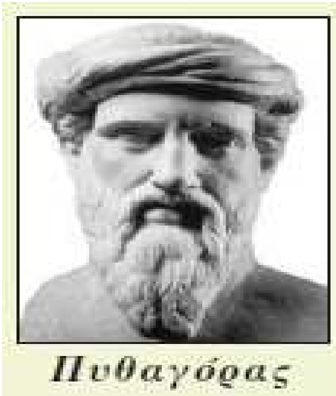
Γ. 2 κατακορυφήν γωνίες είναι ίσες

Δ. 2 τρίγωνα είναι ίσα, αν έχουν ανά μια πλευρά ίση και τις προσκείμενες σε αυτή ίσες.

Στον Θαλή αποδίδεται και το ομώνυμο θεώρημα (των ανάλογων τμημάτων), με την βοήθεια του οποίου υπολόγισε, όπως αναφέρουν ο Πρόκλος, ο Εύδημος και ο Πλίνιος, το ύψος της πυραμίδας του Χέοπος. Κατά τον Πλούταρχο, ο Θαλής υπήρξε ο πρώτος που ξεπέρασε στις έρευνές του το πεδίο των πρακτικών ερωτημάτων ‘ περαιτέρω της χρείας εξίκεσθαι τη θεωρία’ .

Ο μεγάλος Ίωνας φιλόσοφος θεωρείται ένας από τους βασικούς εκπροσώπους της ιωνικής σχολής (Θαλής ,Αναξίμανδρος , Αναξιμένης , Ηράκλειτος) θεωρείται ένας από τους εφτά σοφούς της αρχαίας Ελλάδας

Πυθαγόρας ο Σάμιος



Έζησε στο διάστημα (580-500 π.Χ.) Ιδρυτής του πρώτου συστηματικού πανεπιστημίου στον κόσμο, στον Κρότωνα της Ιταλίας. Το πανεπιστήμιο αυτό ήταν ένα πολιτικό – θρησκευτικό ίδρυμα με πολιτικούς κυρίως στόχους στο οποίο ανάμεσα στα άλλα μελετήθηκαν και αναπτύχθηκαν η Αριθμητική και η Γεωμετρία. Οι πληροφορίες για τη ζωή και τη δράση του ίδιου του Πυθαγόρα είναι αμφιλεγόμενες και γράφτηκαν περί της 15 βιογραφίες του. Βέβαιο είναι ότι οι προσωπικές του προσφορές στα Μαθηματικά ήταν:

- Το περίφημο θεώρημα που φέρει το όνομά του. Αγνοούμε την απόδειξη που έδωσε ο ίδιος ενώ γνωρίζουμε ότι αυτή διέφερε από εκείνη του Ευκλείδη.
- Η ανακάλυψη μερικών πυθαγόρειων τριάδων, δηλαδή ακέραιων αριθμών, που επαληθεύουν την ισότητα του θεωρήματός του.
- Αν οι αριθμοί α, β, γ εκφράζουν τα μήκη των πλευρών ενός ορθογωνίου τριγώνου, τότε όπως γνωρίζουμε, ισχύει το Πυθαγόρειο θεώρημα
- $α^2 = β^2 + γ^2$ (1)

Πυθαγόρειες τριάδες

Πόσα όμως ορθογώνια τρίγωνα μπορούμε να βρούμε που τα μήκη των πλευρών τους εκφράζονται με ακέραιους αριθμούς; Μια **τριάδα θετικών ακεραίων** αριθμών α, β, γ, για την οποία ισχύει η σχέση (1), λέμε ότι αποτελεί **Πυθαγόρεια τριάδα**. Την απλούστερη Πυθαγόρεια τριάδα σχηματίζουν οι αριθμοί 5, 4, 3 αφού 52 = 42 + 32.

Υπάρχουν, άραγε, τρόποι να σχηματίζουμε Πυθαγόρειες τριάδες; Ο Πυθαγόρας (6ος αιώνας π.Χ.) γνώριζε ότι οι αριθμοί της μορφής

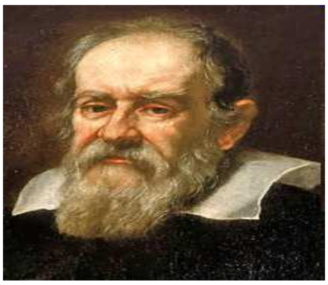
- $\frac{\mu^2+1}{2}, \quad \frac{\mu^2-1}{2}, \quad \mu, \quad \text{όπου } \mu \text{ περιττός } (\mu = 3, 5, 7, ...)$ σχηματίζουν μια Πυθαγόρεια τριάδα.

- Η ανακάλυψη των ασύμμετρων μεγεθών. Το γεγονός αυτό που κλόνισε το αριθμητικό δόγμα του, ότι «τα πάντα είναι αριθμοί»(δηλαδή αριθμήσιμα με τους γνωστούς τότε αριθμούς, τους ακέραιους και τα κλάσματα).
- Η κατασκευή και μελέτη τουλάχιστον των τριών από τα πέντε κανονικά πολύεδρα (τετράεδρο, κύβο, δωδεκάεδρο)
- Η κατασκευή της μουσικής κλίμακας. Μελέτη των λόγων της 4-χορδής λύρας και δημιουργία κανόνων κατασκευής της 8-χορδής λύρας.

Εκτός αυτών, σημαντική πρέπει να ήταν και η συμβολή του στις προτάσεις του βιβλίου II των στοιχείων (θεωρείται ολόκληρο πυθαγόρειο) και στην κατασκευή της λύσης δευτεροβάθμιας εξίσωσης (και εκείνης της χρυσής τομής)

Μεγάλη πρέπει να ήταν και η συμβολή του στην αριθμητική (θεωρία των αριθμών). Ειδικότερα σε θεωρήματα ακέραιων αριθμών και στην μελέτη των αριθμητικών προόδων.Σήμερα είναι βέβαιο ότι ο Πυθαγόρας υπήρξε μεγάλη μαθηματική προσωπικότητα και ότι με τις έρευνες και το πανεπιστήμιό του συνέβαλε στο άλμα των αρχαίων ελληνικών μαθηματικών. Η περίεργη μυστικότητα όμως, που διέπνεε το σύλλογο, έγινε αιτία να μην πληροφορηθούν οι βιογράφοι τα προσωπικά επιτεύγματα του ίδιου και έτσι να αγνοούμε σήμερα το δικό του έργο, το οποίο ασφαλώς θα ήταν σημαντικότατο.

ΓΑΛΙΛΑΙΟΣ



Γεννήθηκε στην Πίζα (Pisa) και πέθανε στο Αρκέτρι (Arcetri), κοντά στη Φλωρεντία. Ήταν μαθηματικός, αστρονόμος και φυσικός, που συνέβαλε αποφασιστικά στη σύγχρονη επιστημονική σκέψη.

- Βελτίωσε το τηλεσκόπιο
- Ανακάλυψε τους 4 δορυφόρους του Δία
- Ανακάλυψε τις ηλιακές κηλίδες
- Εφηύρε το θερμόμετρο και τον αναλογικό διαβήτη

ΑΡΧΙΜΗΔΗΣ

Ο μαθηματικός, φιλόσοφος, φυσικός και μηχανικός Αρχιμήδης ήταν ένα από τα μεγαλοφυή πνεύματα που γνώρισε στην πορεία της η ανθρωπότητα. Σίγουρο θεωρείται ότι ο Αρχιμήδης γεννήθηκε στις Συρακούσες περί το 285 π.Χ. και πιθανόν είχε πατέρα τον αστρονόμο Φειδία. Διασώθηκαν αρκετά συγγράμματά του, μερικά αποσπασματικά, «Περί σφαίρας και κυλίνδρου», «Κύκλου μέτρησις», «Περί πολυέδρων», «Περί σφαιροειδέων και κωνοειδέων», «Περί ελίκων», «Κέντρα βάρους επιπέδων», «Τετραγωνισμός παραβολής», «Κατοπτρικά», «Μηχανικά» κ.ά.

- Έκανε τα πρώτα βήματα για το μαθηματικό υπολογισμό επιφανειών με ακανόνιστο περίγραμμα και συμμετρικών εκ περιστροφής σωμάτων, μέθοδος που εξελίχθηκε, τεκμηριώθηκε και ονομάστηκε στη σύγχρονη εποχή Ολοκληρωτικός Λογισμός,
- Παρουσίασε μέθοδο προσδιορισμού του άρρητου αριθμού $\pi=3{,}14159\ldots$
  (Το π ορίζεται ως ο λόγος του μήκους ενός κύκλου προς τη διάμετρό του)
- Τελειοποίησε το Ελληνικό σύστημα αρίθμησης
- Πρωτοασχολήθηκε με τη Διαφορική Γεωμετρία
- Βρήκε τύπους πρόσθεσης και αφαίρεσης των τόξων

Βαβυλωνιακά Μαθηματικά

Όταν λέμε <<Βαβυλωνιακά Μαθηματικά>> εννοούμε τα μαθηματικά που αναπτύχθηκαν στη Μεσοποταμία από ποικίλους λαούς που την κατοίκησαν σε ένα χρονικό διάστημα 3000 ετών περίπου. Έχουν ανακαλυφθεί τετρακόσιες περίπου πήλινες πλάκες με μαθηματικό περιεχόμενο, καταγραμμένο σε γραφή σφηνοειδή. Από αυτές οι 300 είναι πίνακες αριθμητικών υπολογισμών και οι υπόλοιπες εκατό περιέχουν μαθηματικά προβλήματα. Από τις πλάκες-πίνακες αριθμητικών υπολογισμών, ένας μεγάλος αριθμός είναι πίνακες πολλαπλασιασμών. Υπάρχουν επίσης πίνακες αντίστροφων αριθμών, που χρησίμευαν για τη μετατροπή της διαίρεσης σε πολλαπλασιασμό. Αρκετοί από αυτούς είναι πίνακες μονάδων μέτρησης. Επιπλέον υπάρχουν πολλοί πίνακες οικονομικών υπολογισμών και εμπορικών συναλλαγών. Υπάρχουν επίσης πίνακες τετραγωνικών και κυβικών ριζών, καθώς και πίνακες δυνάμεων της μορφής $α^ν$ με α=9, 16, 100, 225 και ν=1, 2, 3,…, 10. Τέλος υπάρχουν πίνακες διάφορων μορφών π.χ. πίνακας υπολογισμού του αθροίσματος $n^3 + n^2$ με n= 1, 2,…, 30 που χρησιμοποιούνταν στη λύση της εξίσωσης: $x^3 + x^2=α$. Οι πλάκες με προβλήματα περιέχουν ποικίλα αριθμητικά και γεωμετρικά προβλήματα. Οι λύσεις των μαθηματικών προβλημάτων των Βαβυλωνίων που δίνονται είναι πρακτικού χαρακτήρα. Δηλαδή αυτό που προσφέρουν είναι το πώς λύνεται το πρόβλημα και όχι το γιατί μπορεί να λυθεί με η μία ή με την άλλη διαδικασία. Επιπρόσθετα έχει διαπιστωθεί ότι ούτε μία γενική πρόταση δεν υπάρχει στα Βαβυλωνιακά Μαθηματικά που να μπορεί να ταυτιστεί με εκείνο που ονομάζουμε σήμερα λογική απόδειξη.

Το εξηνταδικό σύστημα

Το εξηνταδικό σύστημα αρίθμησης όπου χρησιμοποίησαν οι λαοί της Μεσοποταμίας είναι ένα από τα αρχαιότερα συστήματα αρίθμησης του ανθρώπου. Χρησιμοποιήθηκε αρχικά από τους Σουμέριους και από το 2000 π.Χ. συστηματικά από όλους σχεδόν τους λαούς της Μεσοποταμίας. Από τον $18^ο$ αιώνα π.Χ. το εξηνταδικό σύστημα καθιερώθηκε ως το κυριότερο σύστημα αρίθμησης της χώρας. Το σύστημα αυτό είναι ένα εξηνταδικό σύστημα θέσης και χρησιμοποιεί μόνο δύο σύμβολα: ένα καρφί για τις μονάδες και μία σφήνα για τις δεκάδες. 𒁹 καί 𒌋 :(καρφί και σφήνα)

Με τον συνδυασμό των δύο αυτών συμβόλων παριστάνονται οι αριθμοί από το 2-59, χρησιμοποιώντας τη μέθοδο της πρόσθεσης και βάση το 10. Ειδικό σύμβολο για το μηδέν (0) δεν υπήρχε στο σύστημα αυτό. Δύο βασικά χαρακτηριστικά του συστήματος αρίθμησης των Βαβυλωνίων είναι:1° Ένα εξηνταδικό σύστημα. 2° Είναι ένα ελλιπές σύστημα θέσης. Η βάση του συστήματος είναι το 60 και ο συμβολισμός μονάδων είναι:$60^ν$ και το$1/60^ν$.

Ενδεικτικός πίνακας της γραφής των Βαβυλωνιακών αριθμών στο εξηνταδικό σύστημα αρίθμησης αλλά και στο δεκαδικό.

Μονάδες μέτρησης των Βαβυλωνίων.

Α. Μονάδες μήκους: su-si, kûs, cubit, ese, danna, gigar.

Β. Μονάδες επιφανειών: sar, gar, sur, buru, bur, iku.

Γ. Μονάδες χωρητικότητας: sila, gin, gur-lugal.gur

Δ. Μονάδες βάρους: mona ή mina, s^ve, gin, gû (τάλουτο) bashel, shekel

Στοιχειώδεις πράξεις

1. Πρόσθεση και αφαίρεση: Οι Βαβυλώνιοι για να προσθέσουν δύο ή περισσότερους αριθμούς άθροιζαν τα σύμβολα όλων των αριθμών και στη συνέχεια αντικαθιστούσαν κάθε δέκα σύμβολα τις μονάδες με ένα σύμβολο της δεκάδας και κάθε έξι σύμβολα της δεκάδας με ένα σύμβολο της εξηντάδας που ήταν ίδιο με το σύμβολο της μονάδας. Την αφαίρεση την αντιμετώπιζαν ως αντίθετη πράξη της πρόσθεσης, π.χ. για να αναιρέσουν το 17 από το 42, έβρισκαν έναν αριθμό που έπρεπε να προστεθεί στο 17 για να το κάνει 42.
2. Πολλαπλασιασμός: Στα Βαβυλωνιακά κείμενα δεν αναφέρεται κάποια μεθοδολογία την οποία ακολουθούν οι Βαβυλώνιοι για να πολλαπλασιάζουν αριθμούς. Ωστόσο πολλοί πίνακες περιέχουν τα πολλαπλάσια πολλών αριθμών. Οι πίνακες πολλαπλασιασμού που έχουν έρθει στο φως περιέχουν τα πολλαπλάσια των αριθμών: 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 12, 15, 16, 18, 20, 24, 25, 30,36,40,45,48,50.
3. Διαίρεση: Οι Βαβυλώνιοι τη διαίρεση ενός αριθμού προς έναν άλλον την αντιμετώπιζαν ως πολλαπλασιασμό του διαιρετέου επί τον αντίστροφο του διαιρέτη. π.χ. για να εκτελέσουν τη διαίρεση 36/9 έβρισκαν πρώτα το 1/9 που είναι 6,40 και στη συνέχεια υπολόγιζαν το γινόμενο 36*6,40 που είναι 240=4,0. Δηλαδή 36/9=36* 1/9=36*6,40=4,0.

Προβλήματα αριθμητικής και άλγεβρας:Οι λαοί της Μεσοποταμίας δε γνώριζαν αλγεβρικές μεθόδους και δεν είχαν αλγεβρικούς συμβολισμούς ούτε γενικούς τύπους. Σε κανένα Βαβυλωνιακό κείμενο δεν υπάρχει ούτε καν στοιχειώδης αλγεβρικός συμβολισμός, δεν έχει διατυπωθεί η έννοια της εξίσωσης ή του συστήματος. Όλα τα προβλήματα είναι πρακτικά και συγκεκριμένα. Εκτός αυτού τους λαούς της Μεσοποταμίας δεν τους απασχολούσε η γεωμετρική έννοια της ποσότητας, αλλά η ίδια η ποσότητα όπως αυτή εκφράζεται με συγκεκριμένους αριθμούς.

Δευτεροβάθμιες εξισώσεις: Κυριαρχούν πολλές απόψεις για τη διαδικασία και τους τρόπους με τους οποίους οι Βαβυλώνιοι έλυναν δευτεροβάθμιες εξισώσεις. Μια άποψη είναι ότι οι Βαβυλώνιοι γνώριζαν το γενικό τύπο λύσης των δευτεροβάθμιων εξισώσεων γενικής μορφής κι αυτόν εφάρμοζαν σε κάθε περίπτωση. Μία δεύτερη άποψη είναι ότι έλυναν τις εξισώσεις με τη βοήθεια κατάλληλων πινάκων. Μια Τρίτη υπόθεση είναι ότι έλυναν τις εξισώσεις με τη μέθοδο της δοκιμής και του λάθους. Τέλος, μερικοί ισχυρίζονται ότι ο Βαβυλώνιος γραφέας γνώριζε τη λύση από την αρχή, πριν κατασκευάσει, το πρόβλημα και η διαδικασία λύσης ήταν προκαθορισμένη. Γενικά, σε κανένα Βαβυλωνιακό κείμενο δεν υπάρχει ούτε ένας γενικός κανόνας, ένα θεώρημα, που να αναφέρεται όχι μόνο στις δευτεροβάθμιες εξισώσεις αλλά σε οποιαδήποτε μαθηματική ενότητα.

Η Γεωμετρία των Βαβυλωνίων: Η γεωμετρία των Βαβυλωνίων είχε καθαρά πρακτικό χαρακτήρα. Από τα κείμενά τους προκύπτει ότι δεν είχαν συνειδητοποιήσει τη σημασία των γεωμετρικών εννοιών ή δεν τους ενδιέφεραν οι γεωμετρικές έννοιες. Ο Solomon Gandz δηλώνει με σαφήνεια ότι οι αρχαίοι Βαβυλώνιοι δεν είχαν << γεωμετρία της γωνίας>> δηλαδή δεν υπάρχει καθόλου αναφορά σε γωνίες ή σε μέτρηση γωνιών στα Βαβυλωνιακά Μαθηματικά. Δεν είχαν ούτε τον όρο για να εκφράσουν την ιδέα της γωνίας. Μάλιστα σε πολλά προβλήματα εφάρμοζαν το πυθαγόρειο θεώρημα αλλά δεν το γνώριζαν ως μία πρόταση η οποία ισχύει για κάθε ορθογώνιο τρίγωνο.

Τετραγωνική ρίζα αριθμών: Οι Βαβυλώνιοι όταν ήθελαν να υπολογίσουν την τετραγωνική ρίζα κάποιου αριθμού, έστω α, έβρισκαν έναν αριθμό x του οποίου το τετράγωνο ήταν ίσο με τα α. Αυτό γινότανε με τη βοήθεια αντίστοιχων πινάκων τετραγώνων. Αυτή ήταν η μόνη μέθοδος υπολογισμού της τετραγωνικής ρίζας αριθμών. Σύμφωνα, όμως, με τον Neugehauer, δεν μπορούμε να πούμε ότι οι Βαβυλώνιοι γνώριζαν τη διαδικασία εξαγωγής της τετραγωνικής ρίζας αριθμού, αλλά δεν μπορούμε να αποδείξουμε και το αντίστροφο.

Ανακεφαλαίωση: Τα μαθηματικά των Βαβυλωνίων παρ' όλο που δεν ξεπέρασαν το προεπιστημονικό στάδιο, μπορεί να θεωρηθεί ότι ήταν υψηλού επιπέδου. Αν λάβουμε υπόψη μας και την αρχή κατά την οποία αναπτύχθηκαν τότε ασφαλώς θα συμφωνήσουμε ότι τα μαθηματικά αυτά έχουν μία ξεχωριστή φιλοσοφία και ένα αναμφισβήτητο μεγαλείο. Στην αριθμητική και την άλγεβρα οι Βαβυλώνιοι γνώριζαν να εκτελούν τις στοιχειώδεις πράξεις τις πρόσθεσης, της αφαίρεσης και του πολλαπλασιασμού. Από τη γεωμετρία γνώριζαν να υπολογίζουν σωστά το εμβαδόν τριγώνου, ορθογωνίου και τραπεζίου, καθώς και τον όγκο ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου του κυλίνδρου. Είναι βέβαιο ότι δεν γνώριζαν το πυθαγόρειο θεώρημα ως μία πρόταση με γενική ισχύ. Μόνο κατά την εποχή των Σελευκιδών, υπάρχουν κάποιες ενδείξεις για εφαρμογή του πυθαγορείου θεωρήματος. Όμως την εποχή αυτή η Βαβυλωνία αποτελούσε μέρος ελληνικού Βασιλείου και είναι πολύ πιθανόν τα μαθηματικά που είχαν αναπτυχθεί στην αρχαία Ελλάδα να ήταν γνωστά στους Βαβυλώνιους.

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΣΤΗΝ ΑΡΧΑΙΑ ΑΙΓΥΠΤΟ

Τα μαθηματικά αποτέλεσαν κατάκτηση του ανθρώπου από τη στιγμή που αυτός κατανόησε ότι θα βρισκόταν αντιμέτωπος με προβλήματα, είτε αυτά θα ήταν απλά είτε πιο σύνθετα. Είναι αδιαμφισβήτητη λοιπόν η σημαντικότητά τους όπως επίσης και η λειτουργία τους στην καθημερινή μας ζωή. Ποιοι ήταν όμως εκείνοι που βελτίωσαν την επιστήμη των μαθηματικών και πού τους χρησίμευσαν στην καθημερινή τους ζωή;

Οι Αιγύπτιοι ήταν ένας απ' τους λαούς που ασχολήθηκαν ιδιαίτερα με τα μαθηματικά και κυρίως με τη γεωμετρία, δηλαδή τον κλάδο των μαθηματικών που πραγματεύεται την έννοια του σχήματος. Ο αιγυπτιακός λαός ήρθε σε επαφή με τα μαθηματικά επειδή του ήταν απαραίτητα για την επίλυση πρακτικών θεμάτων όπως ο επαναπροσδιορισμός των χωραφιών μετά τις πλημμύρες του Νείλου, σύμφωνα με αναφορές του Ηροδότου. Ο Αιγυπτιακός πολιτισμός ήταν χτισμένος στις όχθες του Νείλου και παρόλο που ανέπτυξε την κτηνοτροφία βασιζόταν οικονομικά στη γεωργία. Εκμεταλλευόμενοι λοιπόν την τοποθεσία τους δίπλα στο ποτάμι, κατασκεύασαν αρδευτικά κανάλια, τα οποία θα χάριζαν ευφορία στα χωράφια τους. Όμως ο Νείλος συχνά πλημμύριζε μετατρέποντας τα κτήματά τους σε έναν τεράστιο λασπότοπο. Την αποστολή επαναπροσδιορισμού των ορίων των χωραφιών έφερναν σε πέρας ειδικοί, οι οποίοι κατείχαν τις απαραίτητες γνώσεις για τέτοιου είδους υπολογισμούς.

Αυτοί οι ειδικοί ονομάστηκαν από τους αρχαίους Έλληνες αρπεδονάπτες, επειδή το όργανο που χρησιμοποιούσαν για τους υπολογισμούς τους ήταν η αρπεδόνη.

Η αρπεδόνη ήταν ένα κλειστό κορδόνι με κόμπους σε καθορισμένες θέσεις που χώριζαν το σκοινί σε 12 ίσα τμήματα. Με τη βοήθεια λοιπόν αυτού του οργάνου οι αρπεδονάπτες (αυτοί που άπτονται της αρπεδόνης) κατασκεύαζαν μια ορθή γωνία. Χρησιμοποιώντας τα 12 ίσα τμήματα του σκοινιού, έφτιαχναν ένα τρίγωνο με πλευρές 3,4 και 5 εφαρμόζοντας παράλληλα χωρίς να το γνωρίζουν το Πυθαγόρειο, όπως αργότερα ονομάστηκε, θεώρημα. Με αυτόν τον τρόπο καταλάβαιναν ότι ένα τρίγωνο με πλευρές 3, 4 και 5 ήταν ορθογώνιο τρίγωνο. Το αξιοσημείωτο, όμως, είναι πως κάτι ανάλογο συμβαίνει και σήμερα. Οι σημερινοί οικοδόμοι χρησιμοποιούν ένα εργαλείο παρόμοιο της αρπεδόνης για να «γωνιάσουν» όπως λένε τα κτήρια που θέλουν να παρασκευάσουν σε σχήμα ορθογωνίου.

Αρκετοί όμως πιστεύουν πως το επίπεδο γνώσης των μαθηματικών των Αιγυπτίων αποκαλύφθηκε την περίοδο της κατασκευής των πυραμίδων 3.500 π.Χ.-2.500 π.Χ. Η πιο αξιοθαύμαστη απ' αυτές είναι η πυραμίδα του Χέοπα ή όπως αλλιώς ονομάζεται Μεγάλη πυραμίδα της Γκίζα.

Οι Αιγύπτιοι χρησιμοποίησαν τα μαθηματικά για να μετρήσουν και να υπολογίσουν το μέγεθος στο οποίο ήθελαν να είναι οι ογκόλιθοι αλλά και για να μετρήσουν την κλίση που δημιούργησαν οι πλευρές της πυραμίδας με το επίπεδο ώστε να δημιουργηθεί ομοιόμορφη η κορυφή της πυραμίδας. Βέβαια παραμένει ακόμα ανεξήγητο το πώς μετέφεραν και τοποθέτησαν με ακρίβεια χιλιοστού τους τεράστιους ογκόλιθους μέχρι την κορυφή της πυραμίδας. Ο έλληνας ιστορικός Ηρόδοτος το 480 π.Χ. μίλησε για ένα είδος μηχανισμού με ξύλινο ημικυλινδρικό αναφορέα.

Οι Αιγύπτιοι όπως προαναφέρθηκε ανέπτυξαν τα μαθηματικά και κυρίως τη Γεωμετρία γεγονός που ήρθε ως συνέπεια των πρακτικών προβλημάτων με τα οποία ήρθαν αντιμέτωποι. Φρόντισαν βέβαια να κληροδοτήσουν τις επόμενες γενιές με τις γνώσεις στα μαθηματικά. Η ενασχόληση των Αιγυπτίων με τα μαθηματικά φανερώνεται μέσα από τους παπύρους οι οποίοι αποκαλύπτουν τους τρόπους με τους οποίους έλυναν οι Αιγύπτιοι τα τότε μαθηματικά προβλήματα. Ο πιο γνωστός και σημαντικός πάπυρος είναι ο πάπυρος του Ριντ(Rhind) ή πάπυρος του Αχμέτ και χρονολογείται περίπου το 1800 π.Χ. Η δεύτερη ονομασία οφείλεται στον γραφέα Αχμέτ(Ahmet) ο οποίος το 1650 έκανε αντιγραφή του παπύρου από ένα παλαιότερο έγγραφο. Ο πάπυρος του Ριντ περιλαμβάνει 84 εκφωνήσεις προβλημάτων μαζί με την λεπτομερή λύση. Περιέχει ακόμα και προβλήματα που σήμερα θα λυνόταν με τη βοήθεια εξισώσεων πρώτου και δευτέρου βαθμού.

Εν κατακλείδι παρατηρώντας γενικότερα την πορεία του Αιγυπτιακού λαού στα Μαθηματικά οδηγούμαστε στο συμπέρασμα ότι ο αιγυπτιακός τρόπος ζωής αλλά και σκέψης αποτελεί ένα «θαύμα» του αρχαίου κόσμου. Παρόλο που ασχολήθηκαν μόνο με πρακτικά προβλήματα και όχι με θεωρητικές έννοιες έφτασαν τα μαθηματικά σε αρκετά υψηλό επίπεδο. Αν και αξιοθαύμαστο επίπεδο γνώσης των Αιγυπτίων μας έκανε κληρονόμους έργων και επιτευγμάτων απαράμιλλης αξίας είναι πολύ πιθανό η συνεισφορά τους στον κλάδο των μαθηματικών να έχει υποτιμηθεί, αφού έχει διασωθεί μόνο ένας μικρός αριθμός παπύρων που αναφέρονται στα μαθηματικά.

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

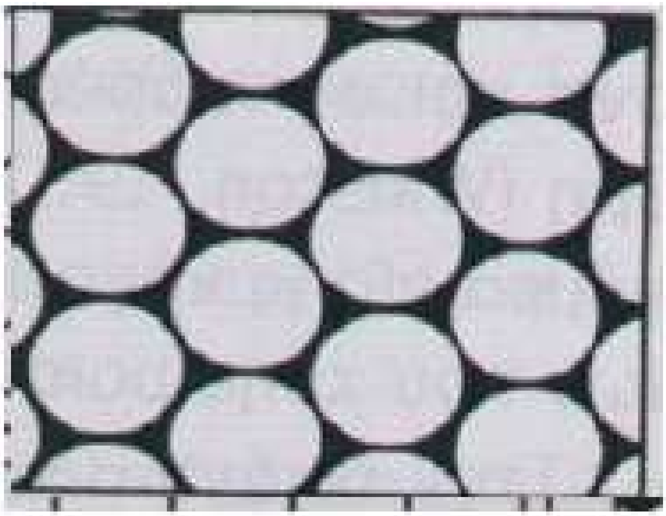
Ξέρουν οι μέλισσες μαθηματικά;

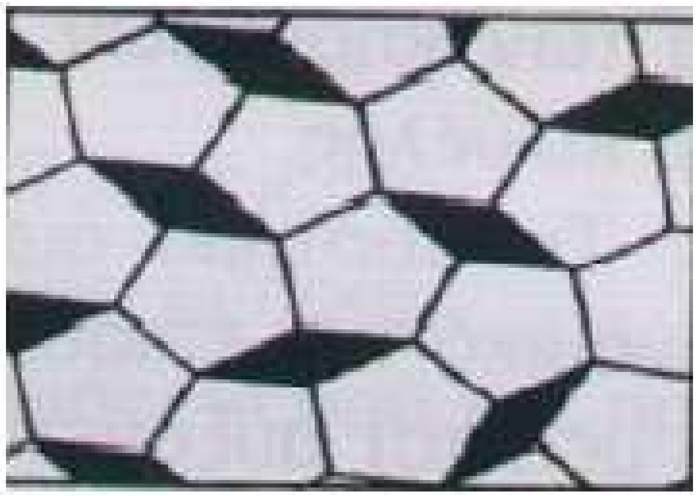
Στη φύση υπάρχουν πολλά αξιοθαύμαστα πράγματα τα οποία σχετίζονται με τα μαθηματικά. Ένα από αυτά είναι η επαναλαμβανόμενη μορφή των κελιών στις κυψέλες των μελισσών. Έχει παρατηρηθεί ότι οι μέλισσες λειτουργώντας ενστικτωδώς κατασκευάζουν εξαγωνικά κελιά στις κηρήθρες τους. Αλλά πού οφείλεται αυτή η έμμονα επαναλαμβανόμενη μορφή των κελιών;

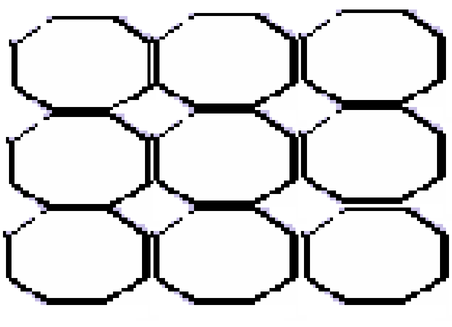
Εάν το σχήμα των κελιών ήταν κυκλικό, οκτάγωνο ή πεντάγωνο τότε δε θα γέμιζε όλος ο διαθέσιμος χώρος, καθώς οι γωνίες που ενώνονται θα πρέπει να έχουν άθροισμα 360 μοίρες, και έτσι θα υπήρχαν κενά και θα έπρεπε τα τοιχώματα να ήταν διπλά με συνέπεια τη σπατάλη χρόνου αλλά και υλικού.

Τα μόνα κανονικά πολύγωνα των οποίων οι γωνίες είναι διαιρέτες του 360 είναι:

Το ισόπλευρο τρίγωνο (γωνία : 60^o) το τετράγωνο (γωνία : 90^o) και το κανονικό εξάγωνο (γωνία : 120^o)

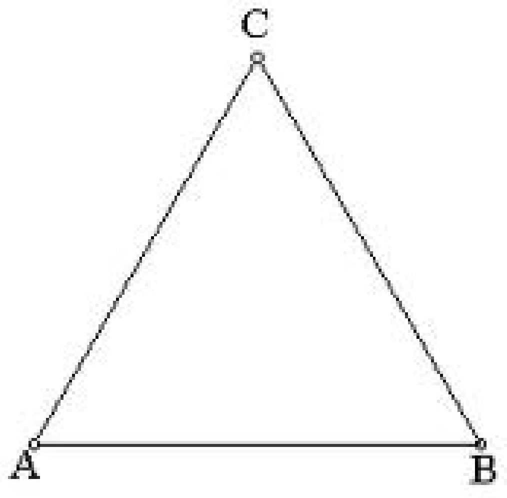






Παρ’ όλα αυτά επιλέγουν το κανονικό εξάγωνο γιατί έχει τα περισσότερα πλεονεκτήματα σε σχέση με τα άλλα δυο σχήματα. Το κανονικό εξάγωνο είναι αυτό που έχει τη μεγαλύτερη επιφάνεια σε σχέση με την περίμετρό του. Αναλυτικότερα, αν πάρουμε ένα ισόπλευρο τρίγωνο, ένα τετράγωνο και ένα κανονικό εξάγωνο, τα οποία έχουν την ίδια περίμετρο, τότε το κανονικό εξάγωνο είναι αυτό που έχει τη μεγαλύτερη επιφάνεια.

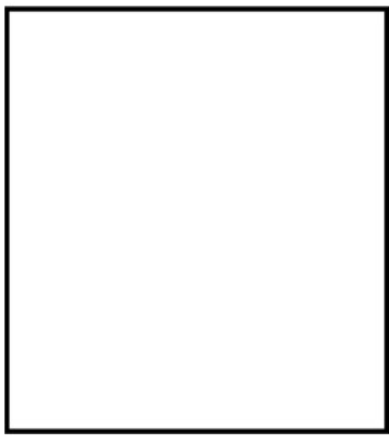
Για παράδειγμα, αν η περίμετρος και των τριών σχημάτων είναι 24m ισχύουν τα παρακάτω:



Τύπος υπολογισμού του εμβαδού

$E = α^2 \frac{\sqrt{3}}{4}$ όπου α είναι η πλευρά του τριγώνου.

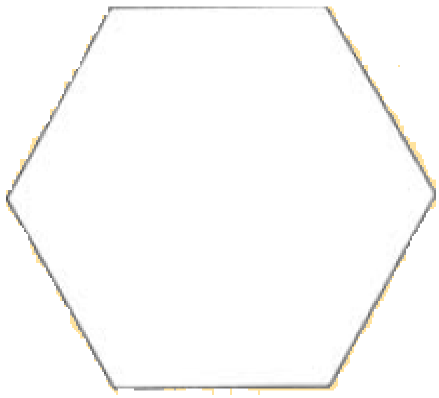
Άρα αν η περίμετρος είναι 24 m τότε η πλευρά είναι $α=\frac{24}{3}=8$ m και το εμβαδόν του είναι : $E = 8^2 \frac{\sqrt{3}}{4} =16*1{,}7=27{,}2\ m^2$



Τύπος υπολογισμού του εμβαδού

$E = α^2$ όπου α είναι η πλευρά του τετραγώνου.

Άρα αν η περίμετρος είναι 24 m τότε η πλευρά είναι $α=\frac{24}{4}=6$ m και το εμβαδόν του είναι : $E = 6^2 =36\ m^2$



Τύπος υπολογισμού του εμβαδού

$E = 6 \cdot \alpha^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}$

όπου α είναι η πλευρά του εξαγώνου.
Άρα αν η περίμετρος είναι 24 m τότε η πλευρά είναι α= $\frac{24}{6}$ m

και το εμβαδόν του είναι :

$E = 6 \cdot 4^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = 24 \cdot 1{,}7$=40,8

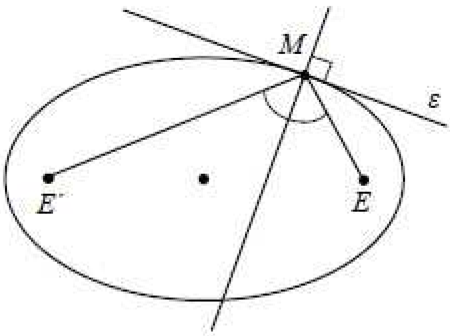
Πάντως παρά τους μικροσκοπικούς τους εγκεφάλους οι μέλισσες είναι ικανές για εντυπωσιακά κατορθώματα στη συμπεριφορά τους.

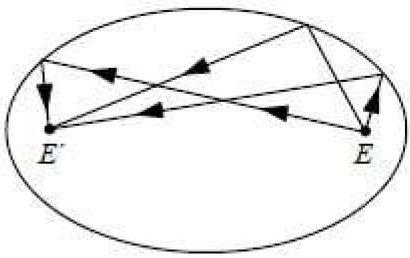
__ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΣΤΗΝ ΙΑΤΡΙΚΗ__

Τα Μαθηματικά αποτελούν ένα από τους στυλοβάτες της ιατρικής επιστήμης. Οι βασικές επιστημονικές αρχές της στηρίζονται σε μαθηματικά πρότυπα. Δεν νοείται επιστημονική σκέψη χωρίς τη θεώρησή της από μαθηματική σκοπιά. Είναι αλήθεια για παράδειγμα ότι η ιατρική φυσική δεν νοείται χωρίς μαθηματική υποδομή.

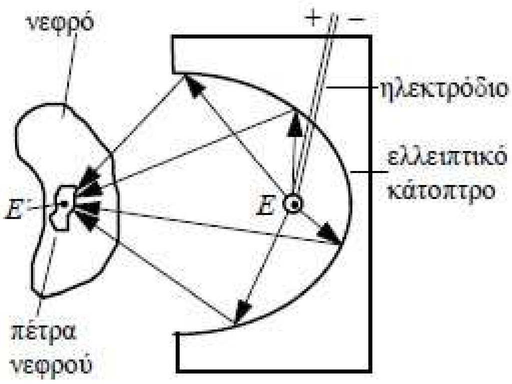
ΜΙΑ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΣΤΗΝ ΙΑΤΡΙΚΗ

Η έλλειψη είναι μία πολύ χρήσιμη και πρακτική κωνική τομή. Το χαρακτηριστικό της είναι ότι το άθροισμα των αποστάσεων ενός τυχαίου σημείου της από τις εστίες, είναι σταθερό. Μια άλλη ιδιότητά της εξαιρετικά χρήσιμη, είναι η <u>ανακλαστική</u>. Η κάθετη στην εφαπτομένη μιας έλλειψης στο σημείο επαφής *Μ* διχοτομεί τη γωνία $E'\hat{M}E$, όπου *E',E* οι εστίες της έλλειψης





Σύμφωνα με την ιδιότητα αυτή ένα ηχητικό κύμα ή μια φωτεινή ακτίνα που ξεκινούν από τη μία εστία μιας έλλειψης, ανακλώμενα σε αυτήν, διέρχονται από την άλλη εστία.Η μοναδική αυτή ιδιότητα της έλλειψης, ενέπνευσε τους επιστήμονες να κατασκευάσουν μια συσκευή για τη θεραπεία των νεφρικών και χολικών πετρών.



Η διαδικασία αυτή ονομάζεται λιθοτριψία. Στη συσκευή της λιθοτριψίας, τοποθετείται το μισό κομμάτι ενός ελλειψοειδούς, που είναι φτιαγμένο από τέτοιο υλικό που να επιτρέπει την ανάκλαση διαφόρων ενεργειακών κυμάτων. Το ελλειψοειδές είναι η τρισδιάστατη εκδοχή της έλλειψης. Από την εστία λοιπόν του μισού ελλειψοειδούς εκπέμπονται κρουστικά κύματα, τα οποία ανακλώμενα, διέρχονται κανονικά από τη δεύτερη –νοητή –εστία στην οποία όμως βρίσκεται η νευρική πέτρα που πρέπει να διαλυθεί. Η θέση της πέτρας πρέπει, όπως είναι προφανές, να είναι αυστηρά ακριβώς στη θέση της δεύτερης εστίας. Η συσκευή είναι επίσης καλυμμένη με ένα ‘μαξιλαράκι, που περιέχει νερό , και το οποίο ακουμπάει την εκάστοτε πέτρα. Η πυκνότητα του νερού είναι μικρότερη από αυτή της πέτρας, και ως αποτέλεσμα , η πέτρα θρυμματίζεται αμέσως μόλις τη χτυπήσει το κρουστικό κύμα. Τα θρύμματα που προκύπτουν από τις συνεχείς διασπάσεις είναι τόσο μικρά που αποβάλλονται με φυσικό τρόπο από τον οργανισμό. Μάλιστα δεν απαιτεί χειρουργική επέμβαση μειώνοντας τους όποιους κινδύνους.

Η ιδιότητα αυτή επίσης χρησιμοποιείται στο σχεδιασμό ορισμένων τύπων οπτικών οργάνων και στην κατασκευή των λεγόμενων "στοών με ειδική ακουστική". Οι στοές αυτές είναι αίθουσες με ελλειπτική οροφή, στις οποίες ένα πρόσωπο που ψιθυρίζει στη μια εστία μπορεί να ακουστεί στην άλλη εστία.

Ηλεκτρονική Τομογραφία

Σήμερα μπορούμε να «δούμε» μέσα στο ανθρώπινο σώμα. Ένας σωλήνας Roentgen διατρέχει βραδέως το ανθρώπινο σώμα ενώ εκπέμπει μια ασθενή ακτίνα. Πάνω σε μια οθόνη, η ακτίνα παράγει ένα «φάντασμα» του εσωτερικού του ανθρώπινου σώματος. Είναι η γνωστή μας ακτινογραφία. Στις νέες συσκευές η οθόνη αποτελείται από ανιχνευτές ακτινών οι οποίοι μετρούν ποσοτικά την ένταση απορρόφησης της ακτίνας Roentgen από το ανθρώπινο σώμα. Στη συνέχεια οι ανιχνευτές μεταβιβάζουν την πληροφορία σε ένα Η/Υ ο οποίος αναπαράγει ένα πιστό αντίγραφο του σώματος. Είναι η Ηλεκτρονική Τομογραφία.

Και που είναι τα μαθηματικά; Η εσωτερική εικόνα είναι άγνωστη. Από αυτή γνωρίζουμε μόνο ένα (ασθενές) ομοίωμα που παράγεται από την ακτίνα Roentgen. Η εικόνα αυτή όμως είναι το Επικαμπύλιο Ολοκλήρωμα άγνωστης συνάρτησης πάνω στην εσωτερική εικόνα. Πως ανακτούμε λοιπόν από το Επικαμπύλιο Ολοκλήρωμα την άγνωστη συνάρτηση; Ο μαθηματικός Johann Radon επεξεργάστηκε μαθηματικά το πρόβλημα το 1917. Η ηλεκτρονική τομογραφία δεν είναι τίποτα άλλο από την αντιστροφή του μετασχηματισμού Radon.

Μαγνητική Τομογραφία: τεράστιοι μαγνήτες δακτυλιοειδώς διατεταγμένοι γύρω από το ανθρώπινο σώμα παράγουν ισχυρό μαγνητικό πεδίο, το οποίο ευθυγραμμίζει τους άξονες των ατόμων Υδρογόνου στο ανθρώπινο σώμα, μετριέται η ένταση των προκαλούμενων παλμών και έτσι παράγεται μια εικόνα του εσωτερικού του σώματος. Τα μαγνητικά πεδία έπρεπε να υπολογιστούν με Ελλειπτικά Ολοκληρώματα, για τον δε υπολογισμό αυτών ήσαν απαραίτητοι πολύ «γρήγοροι» αλγόριθμοι με σκοπό την ταχύτατη αντίδραση στα δεδομένα, για βραχυχρόνια έκθεση σε ακτινοβολίες.

Την απάντηση έδωσε ο μαθηματικός Jacobi, δηλαδή πριν από 60 χρόνια τα Μαθηματικά είχαν δώσει τα κατάλληλα εργαλεία για την Μαγνητική Τομογραφία.

Μια περίπτωση εφαρμογής της στατιστικής

Πρόβλημα

Γνωρίζουμε ότι μία ποικιλία ποντικών παρουσιάζει σταθερό ποσοστό καρκίνου αυτομάτου γενέσεως, έστω 20%. Για να διερευνήσουμε την αποτελεσματικότητα νέου σκευάσματος, χορηγούμε τούτο σε 50 ποντικούς, που επιλέξαμε τυχαίως και παρατηρούμε, μετά από ορισμένο χρόνο, ότι 3 εξ΄ αυτών είναι καρκινοπαθείς. Εκ του πειράματος αυτού, τι μπορούμε να συμπεράνουμε για την αποτελεσματικότητα του νέου αυτού σκευάσματος;

Απάντηση

Στην περίπτωση αυτή γνωρίζουμε την θεωρητική συχνότητα χαρακτηριστικού σε ένα πληθυσμό και θέλομε να την συγκρίνουμε με την παρατηρούμενη συχνότητα του χαρακτηριστικού σε ένα δείγμα. Η σύγκριση θα γίνει με εφαρμογή της δοκιμασίας χ2 (Chi-square).

Διατυπώνουμε την υπόθεση H0: Η παρατηρούμενη συχνότητα δεν διαφέρει της θεωρητικής συχνότητας. Το σκεύασμα δεν είναι αποτελεσματικό.

Εισάγουμε στο [SPSS Data Editor] του στατιστικού προγράμματος SPSS 16.0 τα δεδομένα του προβλήματος υπό τη μορφή του παρακάτω πίνακα.

Sample	Disease	Count
TH	C	20.0
TH	NC	80.0
EXP	C	3.0
EXP	NC	47.0

Ενεργοποιούμε μια σειρά εντελών από το κύριο menu του προγράμματος. Στο Output- SPSS Viewer εμφανίζονται οι πίνακες:

Crosstabs

Sample * Disease Crosstabulation

			Disease		
			C	NC	Total
Sample	EXP	Count	3	47	50
		Expected Count	7,7	42,3	50,0
	TH	Count	20	80	100
		Expected Count	15,3	84,7	100,0
	Total	Count	23	127	150
		Expected Count	23,0	127,0	150,0

Chi-Square Tests

	Value	df	Asymp. Sig. (2-sided)	Exact Sig. (2-sided)	Exact Sig. (1-sided)
Pearson Chi-Square	5,033a	1	,025		
Continuity Correctionb	4,012	1	,045		
Likelihood Ratio	5,757	1	,016		
Fisher's Exact Test				,030	,018
N of Valid Cases	150				

a. 0 cells (,0%) have expected count less than 5. The minimum expected count is 7,67.

Chi-Square Tests

	Value	df	Asymp. Sig. (2-sided)	Exact Sig. (2-sided)	Exact Sig. (1-sided)
Pearson Chi-Square	5,033a	1	,025		
Continuity Correctionb	4,012	1	,045		
Likelihood Ratio	5,757	1	,016		
Fisher's Exact Test				,030	,018
N of Valid Cases	150				

a. 0 cells (,0%) have expected count less than 5. The minimum expected count is 7,67.

b. Computed only for a 2x2 table

Η υπολογισθείσα τιμή χ2 = 5,033 συγκρίνεται με τις κρίσιμες τιμές της κατανομής του χ2 για ένα βαθμό ελευθερίας και για επίπεδα σημαντικότητας 5% και 1% που είναι χ2 1/ 0,05 = 3,84, χ2 1/ 0,01 = 6,63 αντίστοιχα. Επειδή 5,033 > 3,84 και 5,033 < 6,63 απορρίπτουμε την υπόθεση Η0 για επίπεδο σημαντικότητας 5% και την δεχόμαστε για επίπεδο 1%. Τελικά το σκεύασμα είναι αποτελεσματικό σε επίπεδο 5%, δηλαδή αν εφαρμοστεί σε 100 ποντικούς υπάρχει πιθανότητα μόνο οι 5 να παρουσιάσουν καρκίνο ενώ δεν υπάρχει πιθανότητα μόνο ένας να νοσήσει.

Αναστασιάδου, Ι. (1974). Στοιχεία ανώτερων μαθηματικών και στατιστικής ΙΙ. Θεσσαλονίκη (σ. 309-311).

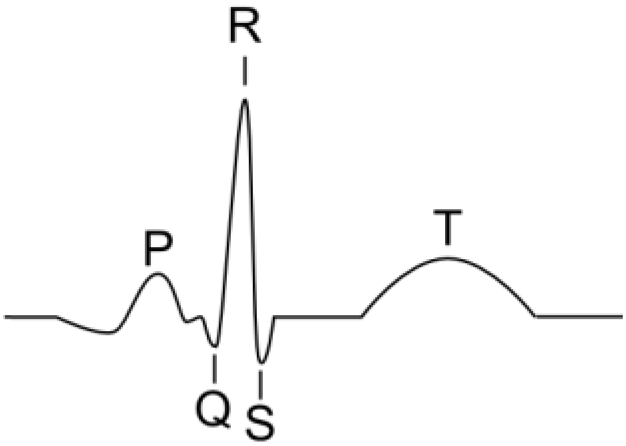
Η περίπτωση του καρδιογραφήματος

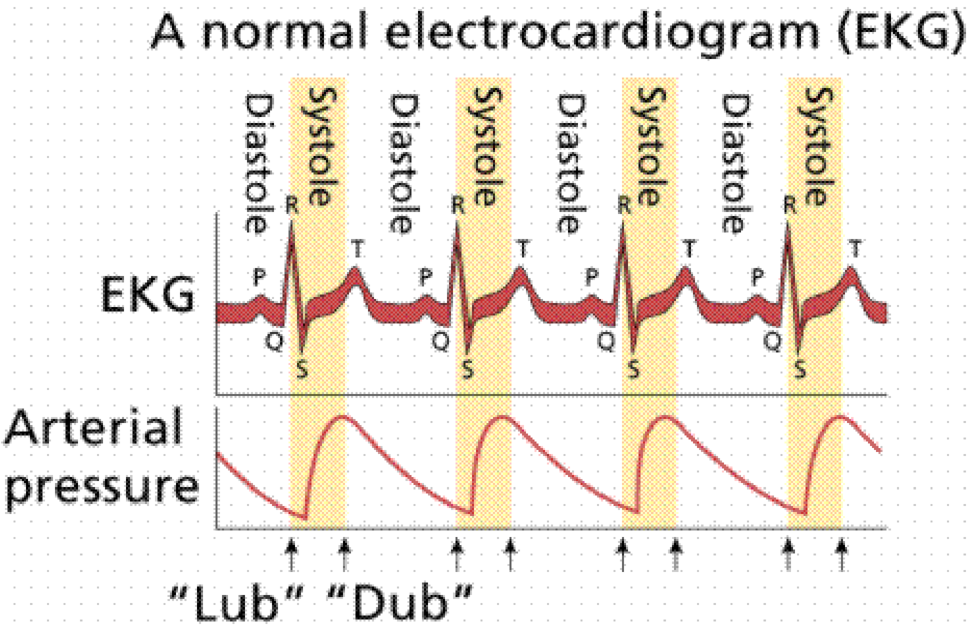
Η καταγραφή της ηλεκτρικής δραστηριότητας της καρδιάς δίνει το ηλεκτροκαρδιογράφημα (ΗΚΓ), από το οποίο με κατάλληλη ανάλυση της κυματομορφής του παίρνουμε σημαντικές πληροφορίες για τη λειτουργία της καρδιάς.

Τα περιοδικά σήματα μπορούν να αναλυθούν σε μια σειρά (άθροισμα) απλών ημιτονοειδών σημάτων, των οποίων οι συχνότητες είναι πολ/σια μιας βασικής συχνότητας με τη χρήση των μετασχηματισμών Fourier.

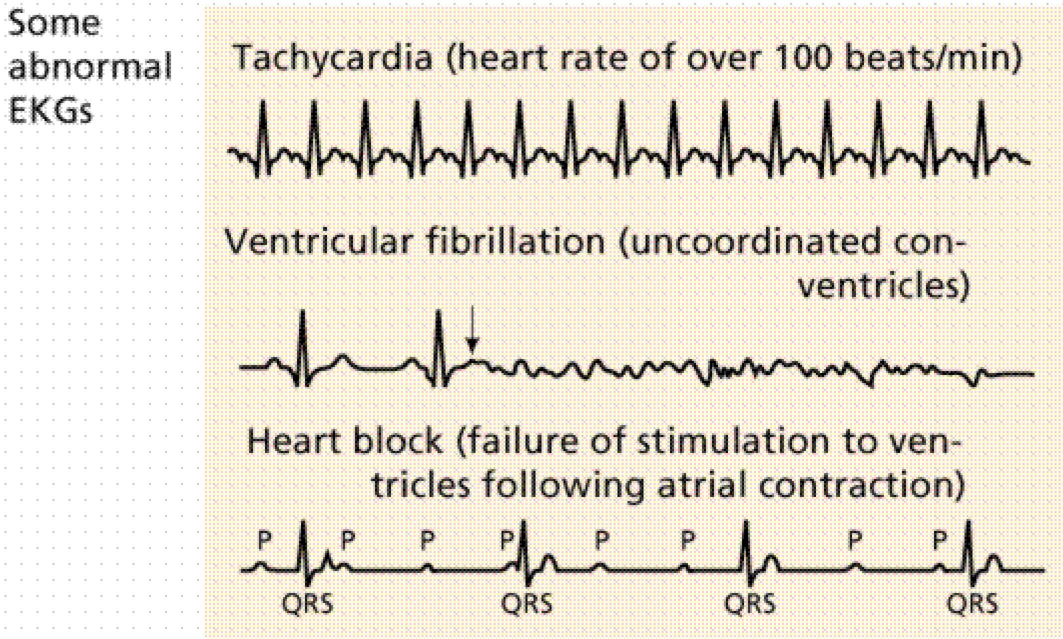
Το σήμα της πίεσης του αίματος μπορεί να προσεγγισθεί από ένα περιοδικό σήμα με περίοδο τη διάρκεια ενός καρδιακού παλμού και την κυματομορφή του ενός παλμού που επαναλαμβάνεται.

Το ΗΚΓ μπορεί να το θεωρήσουμε ως «περιοδικό» (παρόλο που το διάστημα RR του ΗΚΓ δεν είναι σχεδόν ποτέ σταθερό αλλά η PQRST κυματομορφή είναι σχεδόν πάντα όμοια).
Το ΗΚΓ μπορεί να το θεωρήσουμε ως «περιοδικό» (παρόλο που το διάστημα RR του ΗΚΓ δεν είναι σχεδόν ποτέ σταθερό αλλά η PQRST κυματομορφή είναι σχεδόν πάντα όμοια).





Το φυσιολογικό ΗΚΓ αποτελείται από ένα έπαρμα (κύμα)P, ένα «σύμπλεγμα QRS» και ένα έπαρμα (κύμα)T. Το σύμπλεγμα QRS συνήθως αποτελείται από τρία διαφορετικά κύματα, τα Q, R και S, που παράγονται-και τα τρία-από τη διέλευση της καρδιακής διέγερσης από τις κοιλίες.



Βιοηλεκτρικά σήματα από το ανθρώπινο σώμα
(Από σημειώσεις στο διαδίκτυο της Επίκ. Καθ. Της Ιατρικής Σχολής Αθηνών, Άννη Λουϊζη)

http://www.physics.ntua.gr/~mmakro/index_files/Kef9_Electrical_signals_red.pdf

ΠΟΔΟΣΦΑΙΡΟ ΚΑΙ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Ποια σχέση έχουν τα μαθηματικά με το ποδόσφαιρο? ¨ Μια σχέση που θα κάνουν τους ανυποψίαστους να εκπλαγούν και τους υποψιασμένους να σιγουρευτούν ¨

Σε μια εποχή όπου το επαγγελματικό ποδόσφαιρο δεν είναι μόνο ζήτημα ταλέντου, τύχης και πολλών χρημάτων ,η επιστήμη αναγνωρίζεται ως το πιο χρήσιμο ¨εργαλείο¨ για την απόδοση ομάδων και ποδοσφαιριστών.

Το ποδόσφαιρο είναι τέχνη αλλά ταυτόχρονα και επιστήμη, και κάθε παίκτης χρησιμοποιεί γεωμετρία, αεροδυναμική και τις πιθανότητες για να φτάσει το μέγιστο απόδοσής του. Τα μαθηματικά παίζουν τόσο καθοριστικό ρόλο στο παιχνίδι, ώστε οι κορυφαίοι παίκτες συνδυάζουν τον αθλητισμό με την επιστημονική σκέψη για να ξεχωρίσουν από τους υπόλοιπους παίκτες.

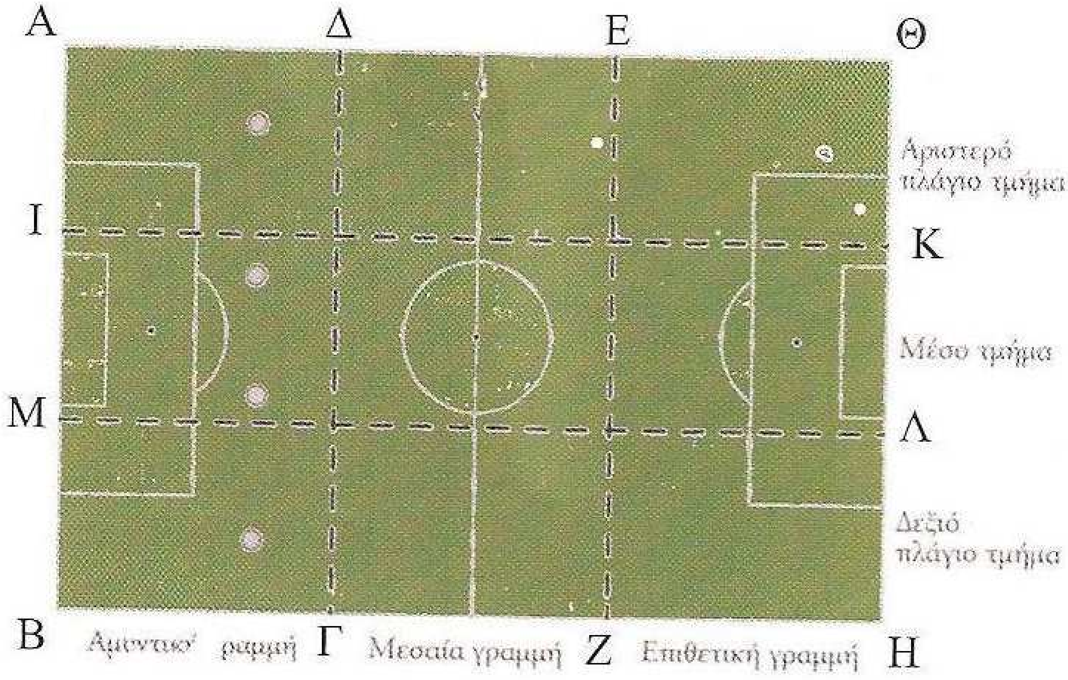
Για τις εκτελέσεις φάουλ από απόσταση 23 μέτρων η μπάλα πρέπει να φύγει από το πόδι του ποδοσφαιριστή με γωνία 16 μοιρών. Για τους δεξιοπόδαρους πρέπει να χτυπηθεί ελαφρά προς τα δεξιά ώστε να πάρει τα φάλτσα και να κατευθυνθεί με δύναμη προς την εστία. Η αρχική ταχύτητα της μπάλας πρέπει να είναι 95-115 χλμ./Ώρα και να περιστρέφεται με 600 στροφές το λεπτό.

Το γήπεδο ποδοσφαίρου που παίζεται το ποδόσφαιρο είναι ορθογώνιο. Το μήκος του είναι από 90 μέχρι 120 μέτρα και το πλάτος του από 45 μέχρι 90 μέτρα. Από την τελική γραμμή κάθε περιοχής και στη μέση της υπάρχουν δύο κάθετα δοκάρια, που απέχουν μεταξύ τους 7,32 μ. και συνδέονται μ' ένα οριζόντιο δοκάρι που έχει ύψος απ' το έδαφος 2,44 μ. Αυτό είναι το τέρμα.

Το γήπεδο ποδοσφαίρου το χωρίζουμε σε ίσες ζώνες στο μήκος και στο πλάτος. Δημιουργούμε δηλαδή έξι (6) ορθογώνια. Η επιτιθέμενη πλευρά κινείται από αριστερά στα δεξιά. Το ορθογώνιο ΑΒΓΔ αποτελεί την ¨ αμυντική γραμμή¨ , το ΓΔΕΖ την ¨ μεσαία γραμμή¨ και το ΕΖΗΘ την ¨επιθετική γραμμή ¨ . οι περισσότερες ενέργειες που αφορούν την στρατηγική στην άμυνα, στο κέντρο και την επίθεση εκδηλώνονται σ' αυτές τις ζώνες.

Εξίσου σημαντικά είναι και τα κεντρικά και πλάγια τμήματα. Το ορθογώνιο ΑΙΚΘ αποτελεί το ¨αριστερό πλάγιο τμήμα¨ , το ΙΜΛΚ το ¨ μέσο τμήμα ¨ και το ΜΛΗΒ το

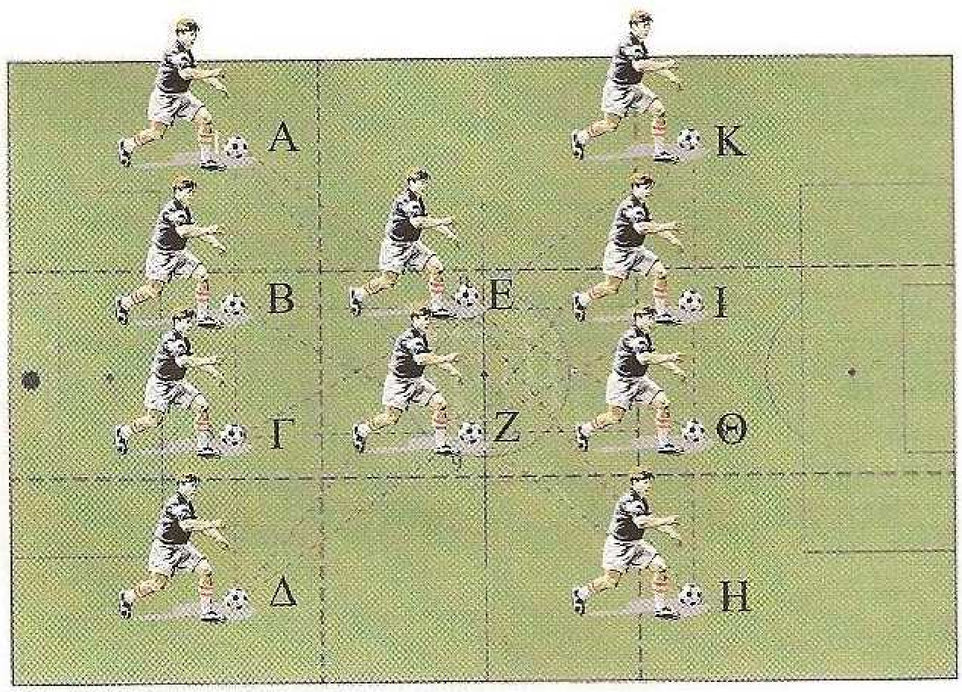
¨δεξιό πλάγιο τμήμα¨.



Α. Σύστημα 4-2-4

Ονομάζεται έτσι επειδή τέσσερις παίκτες καλύπτουν την αμυντική γραμμή, δύο παίκτες την μεσαία γραμμή και τέσσερις την επιθετική.

Ας βρούμε πόσες επιλογές πάσας έχουν οι 10 παίκτες, εκτός του τερματοφύλακα . Ο κάθε παίκτης μπορεί να δώσει πάσα στους υπόλοιπους 9 άρα 9 πάσες δηλάδη συνολικά 9*10= 90 πάσες. Αν επιλέξουμε ως ανώτατο όριο της πάσας, τα 40 μέτρα, γιατί όσο πιο μακριά “ταξιδεύει η μπάλα, τόσο πιο πιθανό είναι να κοπεί από αντίπαλο, και υποθέσουμε πως όλες οι πάσες είναι την εμβέλεια τότε θα έχουμε :



Ο Α παίκτης έχει : 4 επιλογές (στο Β, Γ, Ε, Ζ)

Ο Β παίκτης έχει : 5 επιλογές (Α, Γ, Δ, Ε, Ζ)

Ο Γ παίκτης έχει : 5 επιλογές (Α, Β, Δ, Ε. Ζ)

Ο Δ παίκτης έχει : 4 επιλογές (Γ, Β, Ε, Ζ)

Ο Ε παίκτης έχει : 9 επιλογές (Α, Β, Γ, Δ, Ζ, Η, Θ, Ι ,Κ)

Ο Ζ παίκτης έχει : 9 επιλογές (Α, Β, Γ, Δ, Ε, Η, Θ, Ι, Κ,)

Ο Η παίκτης έχει : 4 επιλογές (Ε, Ζ, Θ, Ι)

Ο Θ παίκτης έχει : 5 επιλογές (Ε, Ζ, Η, Ι, Κ)

Ο Ι παίκτης έχει : 5 επιλογές (Ε, Ζ, Η, Θ, Κ)

Ο Κ παίκτης έχει : 4 επιλογές (Ε, Ζ, Θ, Ι)

Συνολικά 54 διαθέσιμες πάσες σε αυτό το σύστημα. Από αυτές μόνο 4+4=8 πάσες φτάνουν στην γραμμή επίθεσης δηλαδή ποσοστό 8/54*100= 14,81= 15%

Β. Σύστημα 4-3-3

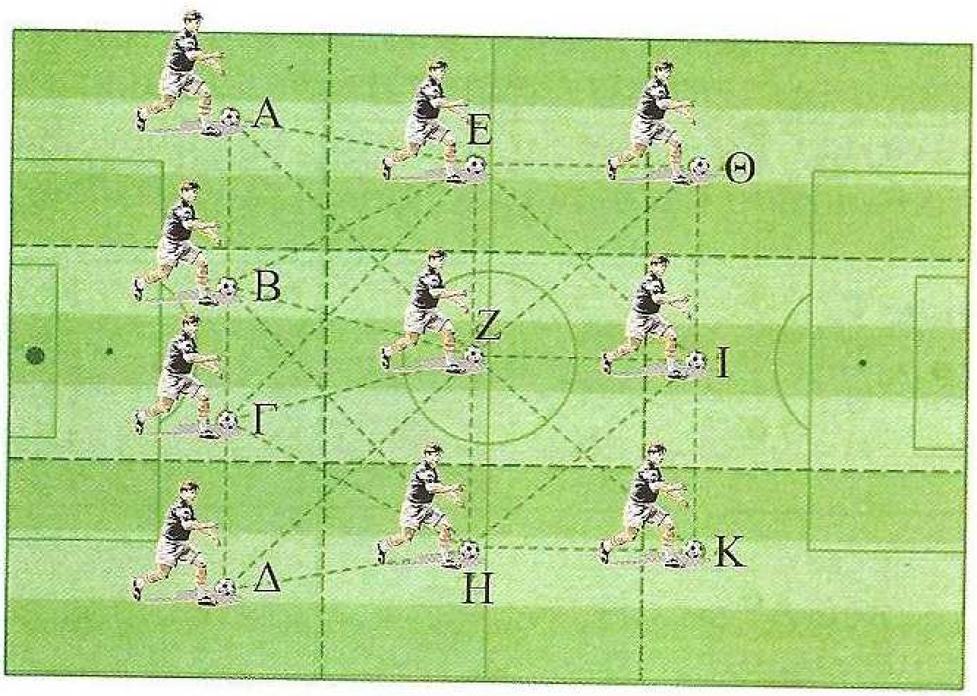
Με όμοιο τρόπο, οι επιλογές πάσας 40 μέτρων σε αυτό το σύστημα είναι:

αμυντικοί : 4+6+6+4= 20

Μέσοι : 7+9+7= 23

Επιθετικοί : 4+5+4= 13

Συνολικά 56 πάσες με ποσοστό 7/56*100= 12,5% στη γραμμή επίθεσης.



Γ. Σύστημα 4-4-2

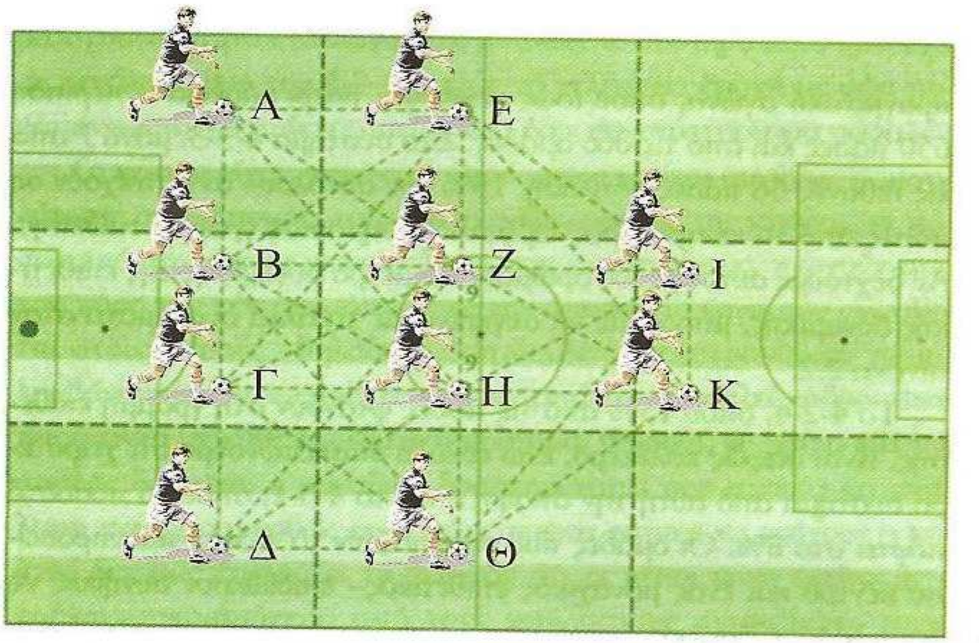
Οι επιλογές πάσας είναι :

Αμυντικοί : 5+7+7+5= 24

Μέσοι : 7+9+9+7= 32

Επιθετικοί : 5+5=10

Συνολικά 66 πάσες με ποσοστό 8/66*100= 12,1 % στην γραμμή επίθεσης.



Δ. Σύστημα 4-5-1

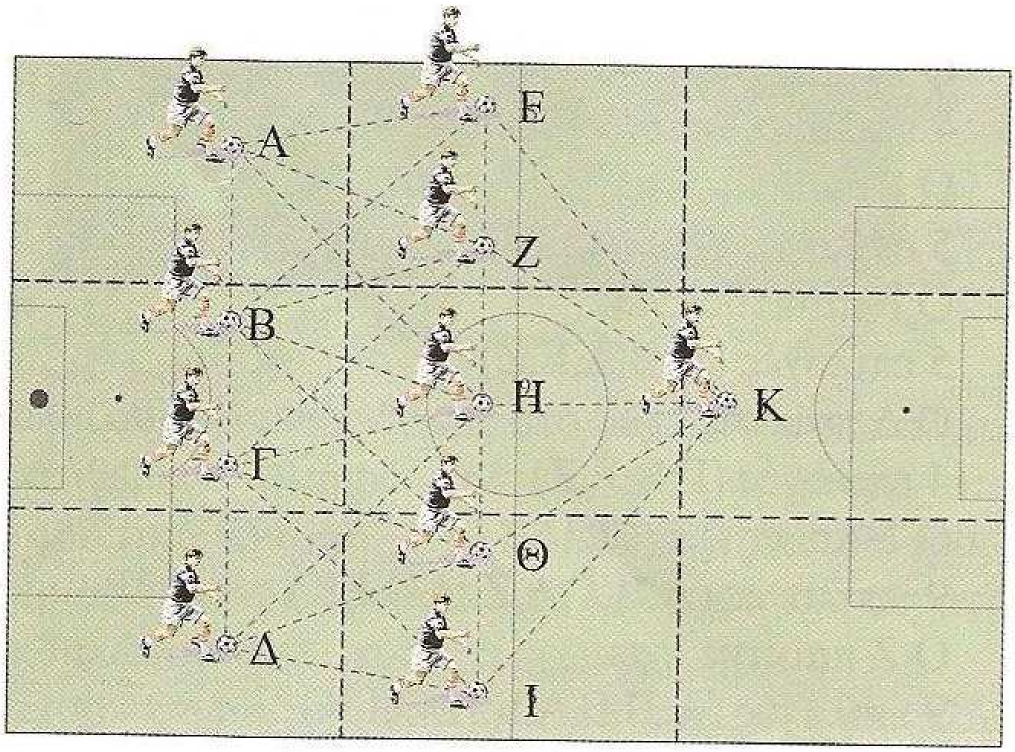
Οι επιλογές πάσας είναι :

Αμυντικοί : 5 +7+7+5=24

Μέσοι : 5+7+9+7+5=33

Επιθετικοί : =5

Συνολικά 62 πάσες με ποσοστό 5/62*100= 8% στην επιθετική γραμμή.



Παρατηρούμε ότι το σύστημα 4-4-2 (66 εναλλαγές) είναι το καλύτερο , ενώ το 4-2-4 (54 εναλλαγές) είναι το χειρότερο.

Στο 4-4-2 κάθε παίκτης έχει περισσότερες επιλογές, καθώς υπάρχουν 66/100= 6,6=7 συμπαίκτες σε απόσταση για πάσα, ενώ στο 4-2-4 υπάρχουν 54/10= 5,4=5 παίκτες, κατά μέσο όρο, σε απόσταση για πάσα.

Το κέντρο είναι η περιοχή όπου παρατηρείται συνήθως ο μεγαλύτερος συνωστισμός, καθώς όλη η κυκλοφορία της μπάλας, οι πάσες από την άμυνα στην επίθεση και αντίστροφα, περνούν από το χώρο του κέντρου. Από αυτήν την άποψη, το έργο που ανατίθεται στους μέσους, δηλαδή πόση δουλειά διεκπεραιώνουν παραλαμβάνοντας και “μοιράζοντας” την μπάλα, αποτελεί καθοριστικό παράγοντα σε κάθε αγωνιστικό σύστημα.

Για να δούμε λοιπόν πόσες πάσες ενός αγώνα(πάσες προς τα εμπρός, προς τα πίσω και από παίκτη σε παίκτη) περνούν από το κέντρο σε κάθε αγωνιστικό σύστημα.

Στα 4-2-4 έχουμε : 9/54*100= 16,66= 17% σε κάθε μέσο παίκτη, πολύ απαιτητικό, γι’ αυτό το σύστημα αυτό έχει εγκαταλειφθεί.

Στο 4-3-3 έχουμε : 23/3*56= 14% σε κάθε μέσο παίκτη.

Στο 4-4-2 έχουμε : 32/4*66 = 12% σε κάθε μέσο παίκτη.

Στο 4-5-1 έχουμε : 33/5*62=11% σε κάθε μέσο παίκτη.

Άραγε ποιο σύστημα είναι ανώτερο από τα άλλα; Η απάντηση δεν είναι και τόσο προφανής. Πολλά εξαρτώνται από τον βαθμό στον οποίο επηρεάζεται το ποδόσφαιρο από τις στατιστικές πιθανότητες. Ίσως σε τελική ανάλυση, να είναι οι παίκτες που κάνουν το σύστημα και όχι το αντίθετο.

Γ. ***<u>Άμυνα ζώνης κατά κύκλο στο σύστημα 4-4-2</u>***

Κάθε παίκτης είναι η κορυφή ισοπλεύρου τριγώνου πλευράς 20 μέτρων. Επίσης κάθε παίκτης είναι το κέντρο κύκλου ακτίνας 20 μέτρων. Οι κύκλοι αλληλοτέμνονται και έτσι δεν μένει χώρος του γηπέδου ακάλυπτος.

Το άθλημα με τους περισσότερους φίλους στον κόσμο, συναντά την επιστήμη. Ή πιο σωστά, η επιστήμη με τα σύγχρονα μέσα που διαθέτει κατορθώνει να μελετήσει τα ενδότερα του δημοφιλέστερου αθλήματος στον κόσμο : του ποδοσφαίρου

ΧΡΥΣΗ ΤΟΜΗ ΣΤΗ ΖΩΗ ΜΑΣ

Ποια είναι η σημασία του μαγικού αριθμού 1,62 στη ζωή μας; Τόσο η φύση όσο και οι καλλιτέχνες φαίνεται ότι ακολουθούν τους κανόνες της αρμονίας, η οποία βασίζεται σε μαθηματικούς τύπους που είχαν επινοήσει οι αρχαίοι Έλληνες.

***Ορισμός*: Η χρυσή τομή δίνει το σημείο που πρέπει να διαιρεθεί ένα ευθύγραμμο τμήμα, ώστε ο λόγος του ως προς το μεγαλύτερο τμήμα να ισούται με τον λόγο του μεγαλύτερου τμήματος ως προς το μικρότερο.**

Δηλαδή

$$\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b} = \varphi \, .$$

Από την δεξιά ισότητα παίρνουμε ότι

$$a = \phi b$$

Αντικαθιστώντας έχουμε

$$\frac{b\varphi + b}{b\varphi} = \frac{b\varphi}{b} \, .$$

Απαλοίφοντας τα *b* παίρνουμε

$$\frac{\varphi + 1}{\varphi} = \varphi.$$

Που τελικά δίνει

$$\varphi^2 - \varphi - 1 = 0.$$

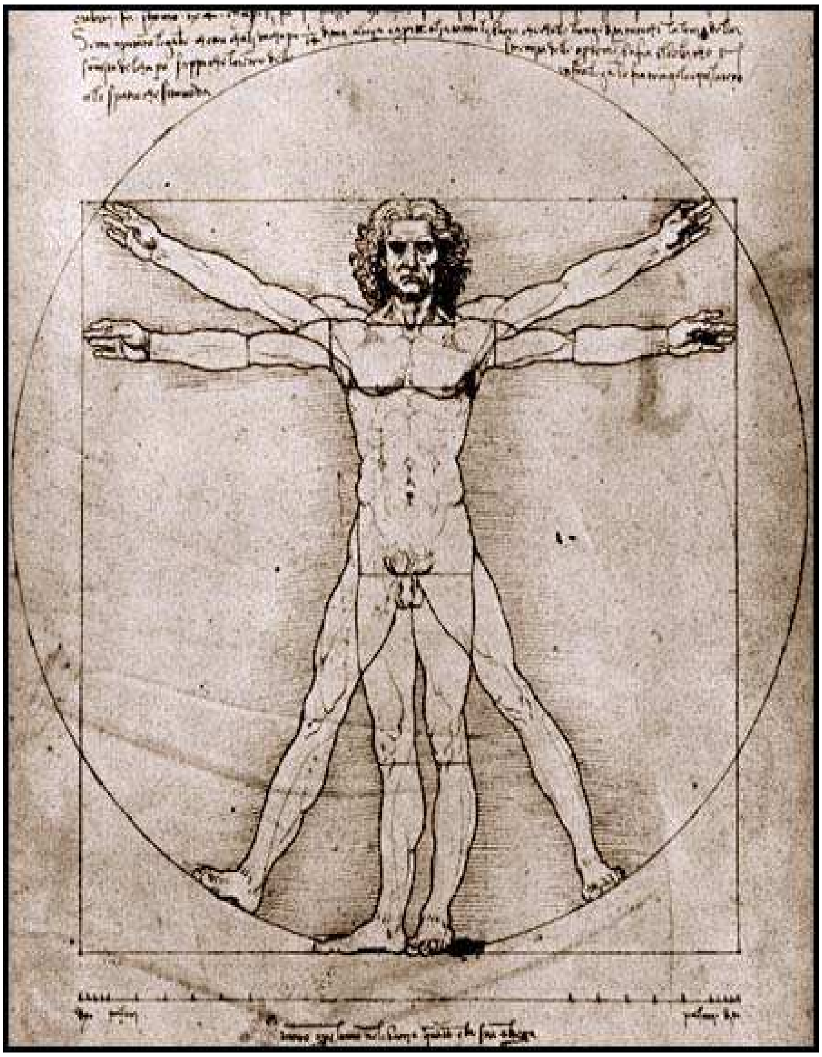
Η παραπάνω δευτεροβάθμια εξίσωση έχει μία μόνο θετική λύση, την

$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.6180339887\ldots$$

ΙΣΤΟΡΙΚΗ ΑΝΑΔΡΟΜΗ

Ο Πυθαγόρας υποστήριζε ότι αποτελεί μια από τις κρυμμένες αρμονίες της φύσης. Ο Ικτίνος τη χρησιμοποίησε στην κατασκευή του Παρθενώνα και ο Ντα Βίντσι στα υπέροχα γυμνά του. Κανένας όμως δεν μπορούσε να φανταστεί ότι χαρακτηρίζει τη μορφή φυσικών σχηματισμών σε όλες τις κλίμακες των μεγεθών, από τις μικρότερες, όπως είναι τα όστρακα, ως τις μεγαλύτερες, όπως είναι οι κυκλώνες και οι γαλαξίες. Πρόκειται για τη Χρυσή Τομή.

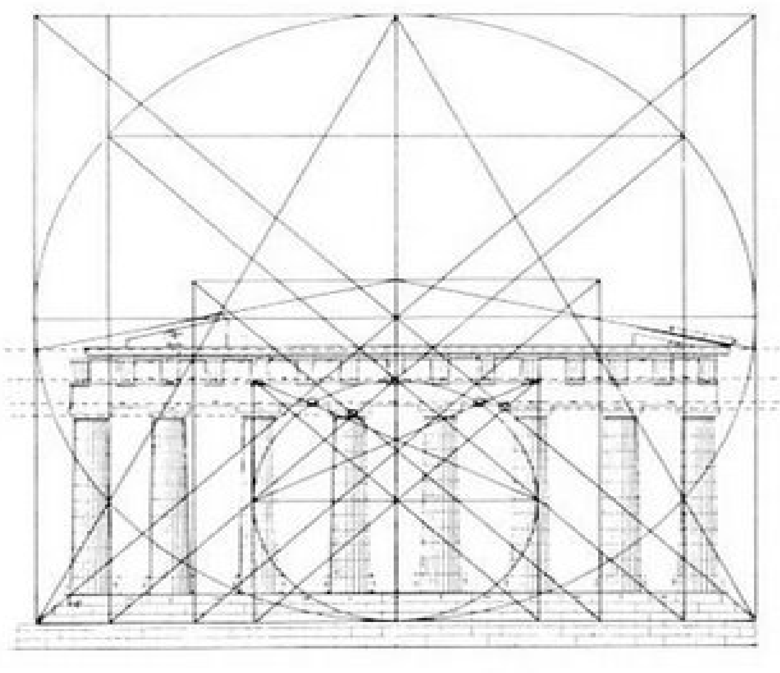
Οι αρχαίοι έλληνες μαθηματικοί, με τη γνωστή αδυναμία τους στην τελειότητα της αρμονίας, είχαν δώσει ξεχωριστή σημασία στη διαίρεση ενός ευθύγραμμου τμήματος σε «μέσο και άκρο λόγο». Η αρκετά σκοτεινή αυτή διατύπωση σημαίνει, με απλά λόγια, να χωρίσουμε μια γραμμή σε δύο άνισα τμήματα, έτσι ώστε ο αριθμός που παίρνουμε αν διαιρέσουμε το μήκος του μεγάλου τμήματος με το μήκος του μικρού να ισούται με τον αριθμό που παίρνουμε αν διαιρέσουμε το μήκος ολόκληρης της γραμμής με το μήκος του μεγάλου. Ο αριθμός αυτός ονομάστηκε από τους αρχαίους *Χρυσή Τομή* ή θεία αναλογία και ισούται, περίπου, με 1,62. Κατά τους αρχαίους Ελληνες η Χρυσή Τομή διαιρούσε μια γραμμή με τον τελειότερο αισθητικά τρόπο, και για τον λόγο αυτόν ο Πλάτωνας θεωρούσε ότι ο αριθμός αυτός βρίσκεται στον υπερουράνιο τόπο. Η φαινομενικά απλή αυτή κατασκευή απέκτησε μεγάλη σημασία με το πέρασμα των αιώνων. Για παράδειγμα είναι γνωστό ότι υπάρχουν άνθρωποι με ψηλά πόδια και άλλοι με κοντά._Ο Leonardo da Vinci (1402-1519) είναι γνωστός για τα επιτεύγματά του τόσο στις επιστήμες όσο και στις καλές τέχνες. Στα έργα του χρησιμοποίησε παραστατική γεωμετρία προκειμένου να δημιουργήσει τα πρώτα παραμορφωμένα πλέγματα, τα οποία όταν ειδωθούν από κάποια συγκεκριμένη γωνία εμφανίζονται κανονικά. Ο μεγάλος αυτός ζωγράφος της Αναγέννησης θεωρούσε ότι από όλους τους δυνατούς τύπους ανθρώπινων σωμάτων φαίνεται πιο «φυσικός» στο ανθρώπινο μάτι εκείνος στον οποίο ο ομφαλός χωρίζει το σώμα σε μέσο και άκρο λόγο. Ετσι για έναν «μέσο» άνθρωπο με ύψος 1,80 μέτρα, ο ομφαλός βρίσκεται σε απόσταση 1,10 από το έδαφος. Έτσι σχεδίασε και τον γνωστό Βιτρούβιο άντρα.



Την χρυσή τομή στην τέχνη τους χρησιμοποίησαν και πολλοί άλλοι μεγάλοι ζωγράφοι όπως οι Johanes kepler, Maurits Escher ,Van Gogh και Salvator Dali. Πέρα όμως από τη διαίρεση ευθύγραμμων τμημάτων, η Χρυσή Τομή παίζει σημαντικό ρόλο στην αισθητική των επιφανειών. Για παράδειγμα, αν παρουσιάσετε σε μια ομάδα ανθρώπων ορθογώνια παραλληλόγραμμα με διάφορες αναλογίες πλευρών, οι περισσότεροι επιλέγουν ως «αρμονικότερο» αυτό του οποίου οι πλευρές έχουν λόγο ίσο με τη Χρυσή Τομή. Η τάση αυτή ήταν ήδη γνωστή στους αρχιτέκτονες της αρχαίας Ελλάδας, όπως δείχνει το γεγονός ότι η βάση και το ύψος της πρόσοψης του Παρθενώνα, αν συνυπολογίσει κανείς και το τμήμα του αετώματος που λείπει, έχουν λόγο ίσο με τη Χρυσή Τομή._Ο Fibonacci επίσης ήταν πολύ γνωστός στην εποχή του και αναγνωρίζεται σήμερα ως ο μεγαλύτερος μαθηματικός του Μεσαίωνα. Γεννήθηκε στη δεκαετία του 1170 και πέθανε το 1250.Η σειρά Fibonacci είναι η σειρά στην οποία ο κάθε αριθμός είναι το άθροισμα των δύο προηγουμένων της σειράς και είναι η 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597, 2584, 4181

Ο λόγος δυο διαδοχικών ζευγαριών της σειράς ονομάζεται χρυσή αναλογία και είναι ο φ=1.618033989..

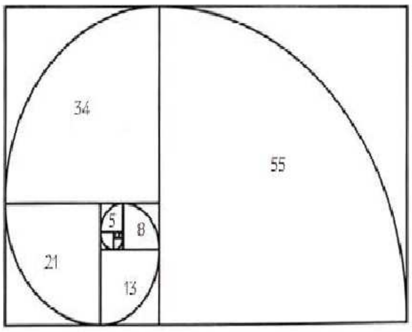
Η πρόσοψη του Παρθενώνα αποτελεί ένα παράδειγμα χρήσης της χρυσής τομής στην αρχιτεκτονική. Η ίδια αναλογία εμφανίζεται σε πάρα πολλά κτήρια και πίνακες ζωγραφικής

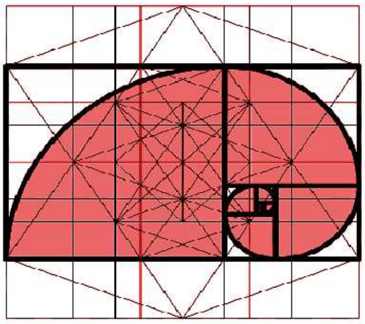
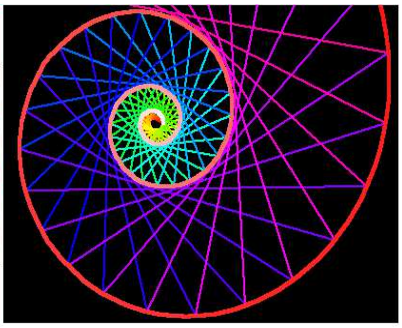


Η ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΤΗΣ ΣΤΗΝ ΚΑΘΗΜΕΡΙΝΟΤΗΤΑ

<u>ΣΤΗ ΦΥΣΗ</u>

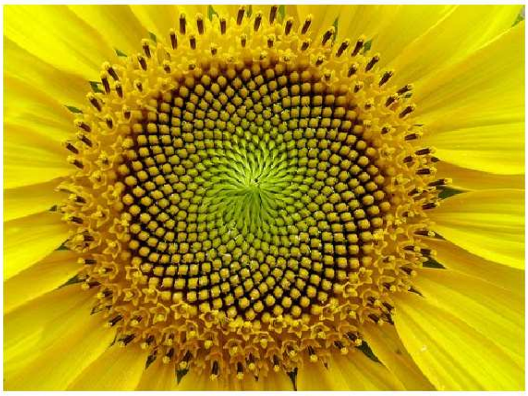
Ο Πυθαγόρας είχε παρατηρήσει ότι οι περισσότερες αναλογίες στην φύση τείνουν να ακολουθούν μια συγκεκριμένη αναλογία, την χρυσή τομή φ. Όμορφα σώματα και πρόσωπα ανδρών και γυναικών βασίζονται σε αυτήν την αναλογία. Αυτήν την αναλογία ακολούθησαν οι μεγάλοι καλλιτέχνες και αρχιτέκτονες της αρχαιότητας, όπως ο γλύπτης Φειδίας (απο τον οποίο πήρε το αρχικό γράμμα φ), αλλά και της ρωμιοσύνης. Η σημασία της Χρυσής Τομής όμως δεν περιορίζεται στις καλές τέχνες, όπως ίσως θα μπορούσε να συμπεράνει κανείς εκ πρώτης όψεως. Οι πραγματικά ενδιαφέρουσες εφαρμογές ξεκινούν από την κατασκευή, με τη βοήθεια της Χρυσής Τομής, ενός άλλου γεωμετρικού σχήματος, που ονομάζεται *Λογαριθμική Σπείρα*. Η κατασκευή αυτή βασίζεται στην ακόλουθη ιδιότητα των «χρυσών» ορθογωνίων. Αν «κόψουμε» ένα τετράγωνο από ένα τέτοιο ορθογώνιο, τότε το μικρότερο ορθογώνιο που απομένει είναι πάλι «χρυσό»! Με τον τρόπο αυτόν μπορούμε να κατασκευάσουμε μια ακολουθία από ολοένα και μικρότερα «χρυσά» ορθογώνια, που βρίσκονται το ένα μέσα στο άλλο. Η λογαριθμική σπείρα είναι το σχήμα που σχηματίζεται σε αυτή την ακολουθία των χρυσών ορθογωνίων, αν εγγράψουμε σε κάθε τετράγωνο ένα τεταρτοκύκλιο



Αν οι άνθρωποι επιλέγουν τη Χρυσή Τομή για αισθητικούς λόγους, τι μπορούμε να πούμε για τη φύση, που επιλέγει τη λογαριθμική σπείρα για να «κατασκευάσει» μια πληθώρα από δομές; Οι επιστήμονες έχουν διαπιστώσει με έκπληξη ότι η λογαριθμική σπείρα εμφανίζεται σε σχήματα φυσικών αντικειμένων με εντελώς διαφορετικές ιδιότητες. Στη μικρότερη κλίμακα εμφανίζεται στα όστρακα πολλών θαλάσσιων οργανισμών, όπως για παράδειγμα είναι ο ναυτίλος. Στην ενδιάμεση κλίμακα εμφανίζεται στο σχήμα των κυκλώνων, όπως αποτυπώνεται χαρακτηριστικά στις φωτογραφίες των μετεωρολογικών δορυφόρων. Τέλος στη μεγαλύτερη δυνατή κλίμακα εμφανίζεται στο σχήμα των σπειροειδών γαλαξιών, τεράστιων σχηματισμών από εκατοντάδες δισεκατομμύρια αστέρια, τους οποίους μπορούμε να απολαύσουμε στις φωτογραφίες των σύγχρονων τηλεσκοπίων.

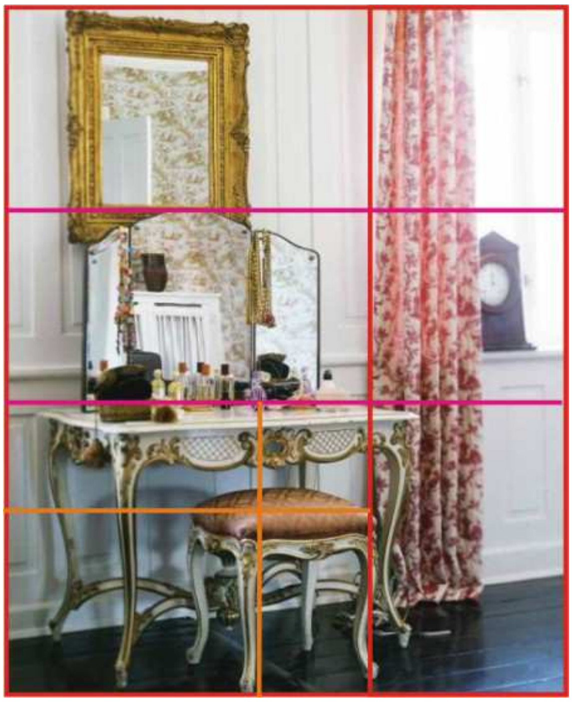
Ποιος είναι άραγε ο βαθύτερος λόγος που κάνει έναν αριθμό, κατασκευασμένο με βάση μια αφηρημένη μαθηματική ιδιότητα, να έχει τόσο σημαντικές εφαρμογές στη φύση, και μάλιστα σε τόσο διαφορετικά συστήματα; Τα όστρακα, οι κυκλώνες και οι γαλαξίες δεν έχουν καμία κοινή ιδιότητα και διέπονται από εντελώς διαφορετικούς φυσικούς νόμους. Η ανάπτυξη των οστράκων επηρεάζεται από τον διαθέσιμο χώρο. Η δημιουργία των κυκλώνων οφείλεται στη ροή του υγρού αέρα από περιοχές υψηλής πίεσης σε περιοχές χαμηλής. Λόγω της περιστροφής της Γης, τα ρεύματα του αέρα αποκλίνουν από την ευθεία, έτσι ώστε στο βόρειο ημισφαίριο όλοι οι κυκλώνες να περιστρέφονται αντίθετα από τη φορά των δεικτών του ρολογιού ενώ στο νότιο ημισφαίριο αντίστροφα. Τέλος οι σπείρες είναι περιοχές ενός γαλαξία όπου υπάρχει συγκέντρωση αστέρων, σκόνης και αερίων, οι οποίες δημιουργούνται όταν κάποιος άλλος γαλαξίας περάσει σε κοντινή απόσταση. Φαίνεται λοιπόν ότι η Χρυσή Τομή αποτελεί έναν αριθμό με «παγκόσμιες» ιδιότητες, παρόμοιο με τον αριθμό π = 3,14 ο οποίος ισούται με το πηλίκο της περιφέρειας ενός κύκλου διά τη διάμετρό του. Για τον λόγο αυτόν οι μαθηματικοί παριστάνουν τη Χρυσή Τομή με ένα άλλο ελληνικό γράμμα, το *φι*, οπότε έχουμε ότι φ = 1,62.

ΣΤΗΝ ΤΕΧΝΗ

Οι μαθηματικές αναλογίες του αγάλματος "Δορυφόρος" του αρχαίου γλύπτη Πολύκλειτου, αναλογίες οι οποίες χρησιμοποιήθηκαν ως πρότυπο απεικόνισης του ανθρωπίνου σώματος από την κλασική Ελλάδα, το Βιτρούβιο και στη συνέχεια μέχρι την ύστερη Αναγέννηση. Η χρήση της μαθηματικής αναλογίας της χρυσής τομής από τον διάσημο αρχαίο γλύπτη Φειδία (προς τιμήν του οποίου άλλωστε πολλούς αιώνες αργότερα η Δύση την ονόμασε με το αρχικό του γράμμα Φ) και στη συνέχεια στην Αναγέννηση από τους διασημότερους καλλιτέχνες της όπως ο DaVinci. Ο επηρεασμός σημαντικών γλυπτών από σύγχρονους νέους κλάδους των Μαθηματικών όπως η Τοπολογία.

Ο κανόνας λέει ότι: ab/ac=ac/cb= 1,618. Δηλαδή εάν έχεις ένα τετράγωνο 1×1 το καλύτερο παραλληλόγραμμο που μπορείς να βγάλεις από αυτό και έτσι να έχεις το συναίσθημα της χρυσής τομής θα είναι το 1x (1×1.618) = 1×1.618. Από εκεί και πέρα πολλαπλασιάζοντας ή διαιρώντας με τον ίδιο αριθμό, θα έχεις το καλύτερο feeling than ever στην εικόνα. Αλλιώς, παρομοίως δηλαδή παίζεις με τα 2/3 ή το 1/3. Οι ίδιες συνθήκες αφορούν και στη λήψη φωτογραφίας. Από κάτω έχουμε μια φωτογραφία που βλέπεις ότι στην έχω χωρίσει σε έναν κάναβο με 1/3 και 2/3. Η κουρτίνα γεμίζει το 1/3 της εικόνας σε πλάτος. Στο ύψος έχουμε διαιρέσει δια τρία και έχουμε ένα αντικείμενο σε κάθε κουτάκι. Όλα τα κουτάκια φυσικά ακολουθώντας τον κανόνα μπορούν να υποδιαιρεθούν αναλόγως και έτσι βρίσκουμε τη σωστή θέση του σκαμπό για μια άρτια οπτικά εικόνα.



Η ακολουθία Fibonacci στη φύση

Η ακολουθία Fibonacci είναι μια σειρά στην οποία κάθε αριθμός είναι ίσος με το άθροισμα των δύο προηγούμενων. Η σειρά εξελίσσεται ως εξής:

1,1,2,3,5,8,13,21,34,55,89,144,233,377,610,987,1597,2584,4181…

Οι αριθμοί Fibonacci, αποτελώντας το αριθμητικό σύστημα της φύσης, εμφανίζονται παντού σε αυτή, καθώς σχετίζονται με την ανάπτυξη κάθε ζωντανού οργανισμού.

Συνηθισμένο αλλά χαρακτηριστικό παράδειγμα της εφαρμογής των αριθμών Fibonacci στη φύση καθίσταται ο τρόπος ανάπτυξης των φυτών. Αγνοώντας την ακολουθία Fibonacci, τα φυτά μεγαλώνουν απλά, με τον πιο πρόσφορο και αποδοτικό τρόπο. Αναλυτικότερα, στο φυτό ηλιοτρόπιο, η κατανομή των σπόρων είναι κυκλική. Έχοντας διπλή κατεύθυνση, η σπείρα είναι τοποθετημένη προς τα έξω και αντίστροφα από το κέντρο του λουλουδιού. Ο αριθμός των σπειρών και προς τις δύο κατευθύνσεις είναι δύο διαδοχικοί αριθμοί στην ακολουθία Fibonacci.

Ένα ακόμη τρανό παράδειγμα της ακολουθίας Fibonacci είναι ο περίτεχνος τρόπος με τον οποίο είναι κατανεμημένες οι σπείρες στα κουκουνάρια Η ανάπτυξη τους έχει ως αφετηρία τη βάση, όπου βρισκόταν ο μίσχος, και πηγαίνοντας κυκλικά στην κορυφή.

Την ακολουθία Fibonacci ακολουθούν τόσο το κέλυφος των σαλιγκαριών όσο και το κέλυφος του ναυτίλου(μαλάκιο). Η μοναδική διαφορά που σημειώνεται μεταξύ των δύο οργανισμών είναι ότι το κέλυφος του ναυτίλου αναπτύσσεται σε τρισδιάστατες σπείρες, σε αντίθεση με το κέλυφος των σαλιγκαριών που αναπτύσσεται σε δισδιάστατες σπείρες.

Αξίζει να σημειωθεί και η σχέση της ακολουθίας Fibonacci με το ανθρώπινο σώμα. Κάθε ανθρώπινο ον έχει 2 χέρια, καθένα από τα οποία έχει 5 δάκτυλα. Κάθε δάκτυλο αποτελείται από 3 τμήματα που χωρίζονται από 2 αρθρώσεις. Όλοι οι προαναφερθείσαντες αριθμοί ανήκουν στην ακολουθία Fibonacci.

Είναι αξιοθαύμαστο το πώς η φύση εν αγνοία της χρησιμοποιεί σε τόσους πολλούς τομείς τα μαθηματικά. Είναι προφανές ότι η φύση δεν επιδιώκει την αξιοποίηση της ακολουθίας Fibonacci αλλά αυτή εμφανίζεται ως το δευτερεύον αποτέλεσμα μιας πολύ βαθύτερης φυσιολογικής διαδικασίας. Τελικά, ο κόσμος στον οποίο ζούμε είναι πραγματικά εκπληκτικός!

Ένα συνηθισμένο πρωινό, ενός συνηθισμένου ανθρώπου

Άρθρο του Τεύκρου Μιχαηλίδη σε εφημερίδα

Το ραδιόφωνο-ξυπνητήρι του Θανάση χτύπησε στις 7:00. Χάρη στην ψηφιακή τεχνολογία, βασισμένη στην αριθμητική ανάλυση και το δυαδικό σύστημα το δωμάτιο γέμισε μουσική, λες και μια ορχήστρα ολόκληρη είχε μαζευτεί στο προσκέφαλό του. Σηκώθηκε. Σε δέκα λεπτά το ψυγείο και το φουρνάκι του, που λειτουργούσαν με fuzzy logic - παρακλάδι της πλειότιμης συμβολικής λογικής που ήταν υπεύθυνη και για την ασφαλή λειτουργία του ABS στο αυτοκίνητό του - του εξασφάλισαν ένα πλούσιο πρωινό. Στις 7:40 πληκτρολογούσε στο συναγερμό τον τετραψήφιο κωδικό του – η θεωρία των πιθανοτήτων λέει πως ο ενδεχόμενος διαρρήκτης είχε μόλις 1 στις 10.000 πιθανότητα να τον παραβιάσει – κι έφυγε ήσυχος για τη δουλειά. Μπήκε στο μετρό - άλλο θαύμα κι αυτό, σήραγγες, κανάλια υπονόμων, δίκτυα παροχής, μια ολόκληρη υπόγεια πόλη σχεδιασμένη με βάση τα γραφήματα του Όιλερ - βολεύτηκε κι άνοιξε την εφημερίδα. «Μείωση κατά 12% των ατυχημάτων μετά την εφαρμογή του αλκοτέστ. 27% των οδηγών συμμορφώθηκαν ήδη με τους νέους αυστηρούς κανονισμούς». 12%, 27%! Και πώς το βρήκανε; Τα νύχια τους μυρίσανε; Γύρισε στα αθλητικά. Ο Κωνσταντίνου να στέλνει με κεφαλιά στα δίχτυα το ημικανονικό 32-εδρο β' τύπου του Αρχιμήδη – τη μπάλα του ποδοσφαίρου δηλαδή – δέσποζε στην σελίδα. Στις 8:30 έμπαινε στο γραφείο. Άνοιξε τον υπολογιστή (ήταν γεμάτος ολοκληρωμένα κυκλώματα βασισμένα στην άλγεβρα Μπουλ αλλά ο Θανάσης ούτε το ήξερε ούτε ήθελε να το μάθει) και μπήκε στο Ίντερνετ. Ο κώδικας RSA βασισμένος στους πρώτους αριθμούς του εξασφάλισε μια ασφαλή σύνδεση και άνοιξε το ηλεκτρονικό ταχυδρομείο. Μήνυμα από τη Μαρία! – το πρόσωπο. Καλό κορίτσι η Μαρία, σκέφτηκε. Καλλιεργημένη, πρόσχαρη, σπιρτόζα, όμορφη. Ένα μονάχα κουσούρι είχε. Σπούδαζε Μαθηματικά. Χάθηκε να σπουδάσει κάτι άλλο, κάτι πιο κοντά στην καθημερινή ζωή, κάτι χρήσιμο τελοσπάντων! Έτσι σκέφτηκε ο Θανάσης και βγήκε επειγόντως απ' το e-mail γιατί πλησίαζε ο διευθυντής.

ΓΝΩΣΤΕΣ ΡΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

" Ο άνθρωπος είναι ένα κλάσμα που αριθμητή **έχει την** *πραγματική του αξία και παρονομαστή την ιδέα που έχει για τον εαυτό του.*

Ο αριθμητής παραμένει ο ίδιος (δηλαδή η πραγματική αξία του ανθρώπου).
Γι' αυτό όσο μεγαλύτερος είναι ο παρονομαστής (η ιδέα που έχει για τον εαυτό του)

Τόσο μικρότερο είναι το κλάσμα (δηλαδή ο άνθρωπος)".

Λέων Τολστόι . Ρώσος λογοτέχνης.

" Μόνο δύο γλώσσες έχει ο άνθρωπος για να αντιμετωπίσει την πραγματικότητα , τα μαθηματικά και την ποίηση"

Χάιζεμπεργκ Βραβείο Νόμπελ 1932.

Μαθηματικά και ποίηση είναι δύο παράθυρα μας προς τον κόσμο. Η θέα που το καθένα προσφέρει είναι διαφορετική από την άλλη , κατά ένα παράδοξο όμως τρόπο είναι συμπληρωματικές μεταξύ τους , γεγονός που αντανακλά και στη δική μας δίδυμη φύση : Λογική - Συναίσθημα".

<u>ΕΡΩΤΗΜΑΤΟΛΟΓΙΟ</u>

<u>1</u>. Σε ενδιαφέρουν τα μαθηματικά; ΝΑΙ ☐ ΟΧΙ ☐ Γιατί:

α)είναι δύσκολα

β)είναι βαρετά

γ)μου είναι αδιάφορα

δ)άλλο

<u>2</u>.Θα σου άρεσε να ασχοληθείς επαγγελματικά στο μέλλον με τα μαθηματικά; <u>ΝΑΙ</u> ☐ <u>ΟΧΙ</u> ☐

<u>3</u>.Πόσο χρόνο αφιερώνεις (καθημερινά) στο διάβασμα των μαθηματικών; <u>ΚΑΘΟΛΟΥ</u> ☐ <u>ΛΙΓΟ</u> ☐ <u>ΑΡΚΕΤΟ</u> ☐ <u>ΠΟΛΥ</u> ☐

<u>4</u>. Θεωρείς πως πρέπει να αυξηθούν ή να μειωθούν οι ώρες των μαθηματικών; <u>ΝΑ ΜΕΙΩΘΟΥΝ</u> ☐ <u>ΝΑ ΑΥΞΗΘΟΥΝ</u> ☐

<u>5</u>. Πιστεύεις πως τα μαθηματικά έχουν εφαρμογή στην καθημερινή μας ζωή; <u>ΝΑΙ</u> ☐ <u>ΟΧΙ</u> ☐

<u>6</u>. Σε ενδιαφέρει περισσότερο ο κλάδος της άλγεβρας ή της γεωμετρίας; <u>ΑΛΓΕΒΡΑ</u> ☐ <u>ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ</u> ☐

<u>7</u>. Είναι τα μαθηματικά επιστήμη η οποία αναπτύσσεται συνεχώς; <u>ΝΑΙ</u> ☐ <u>ΟΧΙ</u> ☐

<u>8</u>. Θα έπρεπε τα μαθηματικά να είναι πρωτεύον μάθημα στις Πανελλαδικές Εξετάσεις; <u>ΝΑΙ</u> ☐ <u>ΟΧΙ</u> ☐

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Ηλεκτρονικές Πηγές

http://www.iranon.gr/PENTELI/PENTELI/2addendum.htm

http://www.atopo.gr/egkiklopedika/136/

http://www.tovima.gr/science/article/?aid=154503

http://www.mathimatiki-foni.otenetdomains.gr/endiafer/mozart.htm

http://www.e-telescope.gr/el/science-and-technology/115-fidonacci-numbers

http://www.google.gr/imghp?hl=el&tab=wi

http://news.pathfinder.gr/scitech/476446.html

http://www.zougla.gr/page.ashx?pid;2&aid=189788&aid=17

http://kykeon.ning.com/forum/topics/2937592:topic:102857

http://www.angelfire.com/mn3/theopage/math01.html

http://www.mathfoni/endiafer/arpedoni.htm

http://www.logistics-management.gr/article.php?ID=522

http://pilavakis.tripod.com/new-page-76.htm

http://www.maths.com

http://www.wikipedia.com

http://el.wikipedia.org/wiki/%CE%9C%C8%B8%CE%B7%CE%BC%CE%B1%CF%84%CE%B9%CE%BA%CE%AC

http://sotmath.tripod.com/hismaths.pdf

http://www.tanea.gr/ΕκτύπωσηΆρθρου/?αιδ=4623166

Βιβλία

Θεόδωρος Γ. Εξαρχάκος τόμος Α’

ΙΣΤΟΡΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Τα μαθηματικά των Βαβυλωνίων και των Αρχαίων Αιγυπτίων

Βαγγέλης Σπανδάγος-Ρούλα Σπανδάγου-Δέσποινα Τραυλού

Οι Μαθηματικοί της Αρχαίας Ελλάδας

Επιβλέποντες καθηγητές : Παππάς Γρηγόριος – Μπακάρας Ιωάννης

Μαθητές που συμμετείχαν:

Α'ομάδα: Βαβυλωνιακά Μαθηματικά-Βιογραφίες Σπουδαίων Μαθηματικών-Μαθηματικά στην Ιατρική

Μπαλάφα Παρασκευή

Σταμάτη Ελένη

Ρίζου Παναγιώτα

Πήλιου Μαρία

Β' ομάδα:Μαθηματικά στην Αρχαία Αιγυπτο-Μελισσες και Μαθηματικά-Ακολουθία Fibonacci

Σταύρου Ιωάννα

Φασιά Βασιλίνα

Σταμάτη Λαμπρινή

Σιαμαντά Ισαβέλλα

Γ' ομάδα: Ορισμός και κλάδοι των Μαθηματικών-Μαθηματικά και ποδόσφαιρο

Τσιαρή Ελένη

Χριστογιάννη Δήμητρα

Σίσκας Ευάγγελος

Βέργος Γεώργιος

Δ' ομάδα:Χρυσή Τομή-Στάσεις και αντιλήψεις των μαθητών Λυκείου απέναντι στα μαθηματικά

Λάππα Αγγελική

Ντέτσικα Κωνσταντίνα

Συμεωνίδη Δανάη

Θειοπούλου Χρύσα